РЕШЕНИЯ ВАРИАНТОВ 2000 ГОДА

Вариант 2000.2
(экзамен в школах-лицеях, продолжительность – 4 часа)

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy+3(x+y)=-5 \end{cases}.$$

Решение.
Умножим второе уравнение системы на 2 и сложим его с первым:
$x^2 + 2xy + y^2 + 6(x + y) = -5$, $(x + y)^2 + 6(x + y) + 5 = 0$.
Сделаем замену: $t = x + y$, тогда $t^2 + 6t + 5 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = -5$.
А) $x + y = -1$. Подставив это значение во второе уравнение исходной системы, получим: $xy - 3 = -5$, $xy = -2$. Следовательно, теперь нужно решить систему

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}.$$

Подстановка $y = -x - 1$ приводит к уравнению для x: $-x^2 - x = -2$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. При этом $y_1 = -2$, $y_2 = 1$.
Б) $x + y = -5$, тогда аналогичным образом получаем систему $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=10 \end{cases}$. Отсюда $y = -x - 5$, $x^2 + 5x + 10 = 0$ – уравнение с отрицательным дискриминантом, решений нет.

Ответ: (1; -2), (- 2, 1).

Задача 2. Решить уравнение

$$\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{15\cos 2x}{16}.$$

Решение.
Преобразуем левую часть уравнения:

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x) =$$
$$= \cos 2x((\cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x) - \sin^2 x\cos^2 x) = \cos 2x((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x\cos^2 x) =$$
$$= \cos 2x(1 - \sin^2 x\cos^2 x) = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x) = \cos 2x\left(1 - \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)\right) = \cos 2x \cdot \frac{7 + \cos 4x}{8}.$$

Подставим полученный результат в уравнение:

$$\cos 2x \cdot \frac{7+\cos 4x}{8} = \frac{15\cos 2x}{16}; \quad \cos 2x(14 + 2\cos 4x - 15) = 0; \quad \cos 2x(2\cos 4x - 1) = 0.$$

А) $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{p}{2} + pn$, $x = \frac{p}{4} + \frac{pn}{2}$.

Б) $2\cos 4x - 1 = 0$, $\cos 4x = \frac{1}{2}$, $4x = \pm\frac{p}{3} + 2pn$, $x = \pm\frac{p}{12} + \frac{pn}{2}$.

Ответ: $\frac{p}{4} + \frac{pn}{2}$; $\pm\frac{p}{12} + \frac{pn}{2}$.

Задача 3. К бассейну объемом 1800 м^3 подведено две трубы – подающая и отводящая. Если открыть одновременно обе трубы, то бассейн наполнится за 60 ч. Если же открыта одна труба, то заполнение бассейна водой продолжается на 3 ч меньше, чем его освобождение от воды. Сколько воды в час пропускает каждая труба?

Решение.
Предлагаем в начале решения не учитывать то, что нам известен объем бассейна. Примем его за 1, а в качестве неизвестных выберем x – время заполнения бассейна через подводящую трубу и y – время его освобождения от воды через отводящую трубу.
Тогда за час подводящая труба заполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а через отводящую трубу за это же время выливается $\frac{1}{y}$ часть. Следовательно, при совместной работе двух труб бассейн за час наполняется на свою $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ часть. Это позволяет составить систему двух уравнений: $\begin{cases} y = x+3 \\ \dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = 60 \end{cases}$. Отсюда $\frac{x(x+3)}{x+3-x} = 60$, $x^2+3x-180=0$, $x_1=12$, $x_2=-15<0$ – не удовлетворяет условию задачи. Значит, подающая труба заполняет бассейн за 12 часов, а отводящая опустошает его за 12 + 3 = 15 часов.
Остается найти пропускную способность каждой трубы. Через первую трубу проходит в час 1800:12 = 150 м^3 воды, а через вторую – 1800:15 = 120 м^3.

Ответ: 150 м^3 и 120 м^3.

Задача 4. Решить неравенство

$$\log_{x+3} 4 - \log_{9-x} 16 \geq 0.$$

Решение.
Основания логарифмов должны быть положительными и не равными 1. Поэтому ОДЗ задается условиями: $x+3>0$, $x+3\neq 1$, $9-x>0$, $9-x\neq 1$ и в результате имеет вид: $(-3;-2)\cup(-2;8)\cup(8;9)$.
Перейдем в обоих логарифмах к основанию 4:
$\log_{x+3} 4 = \frac{1}{\log_4(x+3)}$, $\log_{9-x} 16 = 2\log_{9-x} 4 = \frac{2}{\log_4(9-x)}$.
Теперь неравенство имеет вид: $\frac{1}{\log_4(x+3)} - \frac{2}{\log_4(9-x)} \geq 0$.
Приведем левую часть к общему знаменателю и воспользуемся свойствами логарифмов:
$$\frac{\log_4(9-x)-2\log_4(x+3)}{\log_4(x+3)\cdot\log_4(9-x)} \geq 0; \quad \frac{\log_4 \frac{9-x}{(x+3)^2}}{\log_4(x+3)\cdot\log_4(9-x)} \geq 0.$$
Будем решать это неравенство методом интервалов, а для этого найдем корни числителя и знаменателя:
А) $\log_4 \frac{9-x}{(x+3)^2} = 0$; $\frac{9-x}{(x+3)^2} = 1$, $x^2+7x=0$, $x_1=0$, $x_2=-7$ - не входит в ОДЗ.

Б) $\log_4(x+3)=0,\ \ x+3=1,\ \ x=-2.$ Отметим, что это значение не включено в ОДЗ, но по обе стороны точки x = - 2 определены все функции, входящие в неравенство, причем в самой этой точке меняет знак один из множителей в знаменателе, следовательно, меняет знак и вся дробь.

В) $\log_4(9-x)=0,\ 9-x=1,\ \ x=8$ (к этому значению можно отнести все рассуждения из пункта Б).

Итак, на интервале (- 3; 9) дробь, стоящая в левой части неравенства, поменяет знак трижды: при x = -2, x = 0 и x = 8. При этом значение x = 0 войдет в ответ, так как в этой точке числитель дроби обращается в 0, и неравенство превращается в строгое равенство, что соответствует условию задачи.

Остается определить знак дроби на интервалах (- 3; - 2); (- 2; 0), (0; 8) и (8; 9). Для этого достаточно найти знак на одном интервале, так как в каждой граничной точке он будет меняться.

Выясним, какой знак имеет дробь при x = 1. $\log_4\dfrac{9-1}{(1+3)^2}=\log_4\dfrac{8}{16}=\log_4\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0;$

$\log_4(x+3)\cdot\log_4(9-x)=\log_4 4\cdot\log_4 8=1\cdot\dfrac{3}{2}>0.$ Итак, при x = 1 числитель дроби отрицателен, знаменатель положителен, следовательно, вся дробь отрицательна. (Заметим, что при такой проверке вовсе не обязательно вычислять значения логарифмов; достаточно вспомнить, что логарифм принимает положительные значения, если основание и логарифмируемое выражение лежат «по одну сторону единицы», то есть оба больше 1 или оба меньше 1, и отрицательные значения, если эти числа расположены «по разные стороны единицы»).

Расставим знаки на полученных интервалах:

```
        –             +             –           +
 0__________0_______________•_______________0__________0
- 3        - 2              0               8          9
```

Остается выбрать интервалы нужного знака и записать ответ.

Ответ: (- 2; 0] U (8; 9).

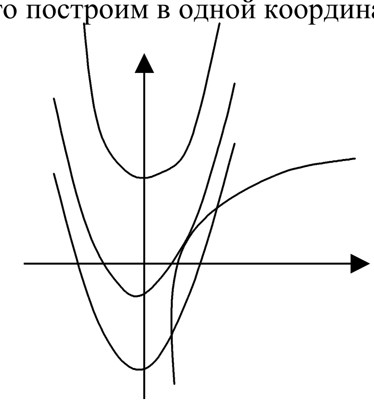
Задача 5. При каких значениях параметра k уравнение

$$\ln(x+k)-4(x+k)^2+k=0$$

имеет одно решение?

Решение.

Сделаем замену: $t=x+k$ и исследуем число корней уравнения $\ln t-4t^2+k=0$, или $\ln t=4t^2-k$. Для этого построим в одной координатной системе графики левой и правой



частей уравнения. Отметим, что графики правой части при различных значениях k представляют собой одинаковые по форме параболы, вершины которых расположены на оси Оy, а ветви направлены вверх. При увеличении k ординаты точек параболы уменьшаются, и она опускается вниз; при уменьшении k график поднимается вверх.
По графику видно, что единственное решение уравнения, соответствующее одной общей точке графиков, возможно только в том случае, когда парабола касается логарифмической кривой, то есть когда два графика имеют одну общую точку, через которую проходит их общая касательная. Для этого должны выполняться два условия: при $t = t_0$, где t_0 – абсцисса точки касания, должны быть равными значения функций $y = \ln t$ и $y = 4t^2 - k$ и значения их производных. Это позволяет составить систему двух уравнений для неизвестных t_0 и k:

$$\begin{cases} \ln t_0 = 4t_0^2 - k \\ \dfrac{1}{t_0} = 8t_0 \end{cases}.$$

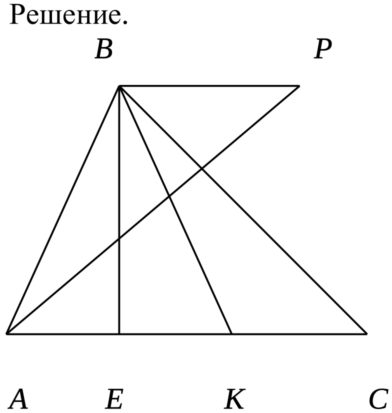
Из второго уравнения находим, что $t_0^2 = \dfrac{1}{8}$, $t_0 = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Условию задачи отвечает только положительное значение $t: t_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогда из первого уравнения

$$k = 4t_0^2 - \ln t_0 = \frac{4}{8} - \ln\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{1+3\ln 2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1+3\ln 2}{2}$.

Задача 6. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D такая, что $BD : DC = 1 : 5$, а на стороне AC – точки E и K, причем отрезки AD и BE пересекаются в точке M, а отрезки AD и BK – в точке N и $BM : ME = 3 : 4$, $BN : NK = 2 : 3$. Найти отношение $AE : KC$.

Решение.



Проведем через точку B прямую, параллельную AC, и продолжим отрезок AD до пересечения с этой прямой в точке P. Далее рассмотрим три пары подобных треугольников:
А) $\Delta EMA \sim \Delta BMP$ по двум углам (углы при вершине M равны как вертикальные, а углы BPM и EAM – как внутренние накрест лежащие). Тогда $\dfrac{AE}{BP} = \dfrac{ME}{BM} = \dfrac{4}{3}$, то есть $AE = \dfrac{4}{3}BP$.

Б) Аналогично доказывается подобие треугольников *KNA* и *BNP*, откуда

$$\frac{AK}{BP} = \frac{NK}{BN} = \frac{3}{2}, \quad AK = \frac{3}{2}BP.$$

В) Третья пара подобных треугольников - *CDA* и *BDP*, следовательно, $\frac{AC}{BP} = \frac{DC}{BD} = \frac{5}{1}$, поэтому $AC = 5\,BP$.

В результате длины отрезков *AE*, *AK* и *AC* выражены через длину отрезка *BP* (так сказать, «измерены одним аршином»). Выразим таким же образом длину *KC*:

$KC = AC - AK = 5BP - \frac{3}{2}BP = \frac{7}{2}BP.$ Тогда $AE : KC = \frac{4}{3}BP : \frac{7}{2}BP = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}.$

Ответ: $AE : KC = 8 : 21$.

Вариант 2000.19

(летнее тестирование, продолжительность экзамена – 1 час 15 мин)

Задача 1. Решить уравнение

$$x^2 - \frac{28}{x^2 - 5} - 2 = 0.$$

Решение.

Определим ОДЗ: $x^2 \neq 5$, $x \neq \pm\sqrt{5}$ - и сделаем замену: $t = x^2$ ($t \geq 0$, $t \neq 5$).

Решим уравнение

$t - \frac{28}{t-5} - 2 = 0,\quad t^2 - 5t - 28 - 2t + 10 = 0,\ t^2 - 7t - 18 = 0,\ t_1 = 9,\ t_2 = -2 < 0$ – посторонний корень.

Следовательно, $x^2 = 9$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Ответ: $x = 3$, $x = -3$.

Задача 2. Решить уравнение

$$3^{x+2} + 8 \cdot 3^x - 2^{x+1} = 4 \cdot 2^x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде: $9 \cdot 3^x + 8 \cdot 3^x = 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x$, $17 \cdot 3^x = 6 \cdot 2^x$. Поскольку $2^x \neq 0$, разделим обе части полученного равенства на $17 \cdot 2^x$: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{6}{17}$, $x = \log_{\frac{3}{2}}\frac{6}{17}$.

Ответ: $x = \log_{\frac{3}{2}}\frac{6}{17}$.

Задача 3. Решить уравнение

$$\frac{12}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\cos^2 2x} = 12.$$

Решение.

Используем основное тригонометрическое тождество:

$\frac{12}{1-\cos^2 2x} - \frac{1}{\cos^2 2x} = 12.$ Сделаем замену: $t = \cos^2 2x$ ($0 < t < 1$) и решим уравнение

$\frac{12}{1-t} - \frac{1}{t} = 12, \quad 12t - 1 + t = 12t - 12t^2, \; 12t^2 + t - 1 = 0, \; t_1 = \frac{1}{4}, \; t_2 = -\frac{1}{3} < 0$ - посторонний корень. После обратной замены получаем:

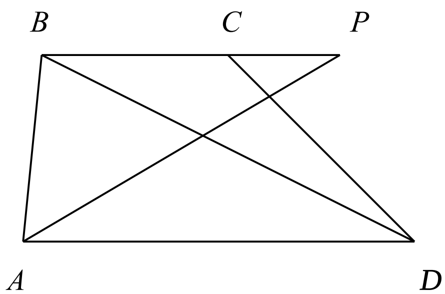
$\cos^2 2x = \frac{1}{4}, \; \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}, \; \cos 4x = -\frac{1}{2}, \; 4x = \pm\frac{2p}{3} + 2pn, \; x = \pm\frac{p}{6} + \frac{pn}{2}.$

Ответ: $x = \pm\frac{p}{6} + \frac{pn}{2}.$

Замечание. Можно было не понижать степень $\cos^2 2x$, *а решать два простейших уравнения:* $\cos 2x = \frac{1}{2}$ *и* $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. *Однако при этом часто забывают рассмотреть отрицательное значение косинуса, что приводит к потере корней.*

Задача 4. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* биссектриса угла *BAD* пересекает диагональ *BD* в точке *L* и боковую сторону *CD* в точке *K*. Найти отношение *CK* : *KD*, если известно, что *BL* = *LD* и *AL* : *LK* = 5 : 3.

Решение.



Продолжим сторону *BC* до пересечения с биссектрисой в точке *P*. Треугольники *DLA* и *BLP* равны по второму признаку равенства треугольников (*BL* = *LD*, углы при вершине *L* равны как вертикальные, а углы *BPL* и *LAD* – как внутренние накрест лежащие). Следовательно, *AL* = *LP*. Так как *AL* : *LK* = 5 : 3, обозначим *AL* = 5*a*, *LK* = 3*a*, *KP* = 5*a* – 3*a* = 2*a*.

Из подобия треугольников *CKP* и *DKA* (по двум углам) получаем, что *CK* : *KD* = *KP* : *AK* = = 2*a* : 8*a* = 1 : 4.

Ответ: *CK* : *KD* = 1 : 4.

С решениями вариантов вступительных экзаменов за 1996-2001 годы вы можете познакомиться в книге «Сборник задач по математике с решениями для поступающих в МАТИ-РГТУ» (М., «Триада-Плюс», 2002). За дополнительной информацией обращайтесь по адресу vysk@yandex.ru.