РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ 2001 ГОДА

Вариант 2001.28
(экзамен в школах-лицеях, продолжительность – 4 часа)

Задача 1. Найти экстремумы функции

$$y = \left(-x^3 - 3x^2 + 24x + 4\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Решение.
Найдем область определения функции. Подкоренное выражение является многочленом, то есть определено при любом действительном x; кубический корень тоже существует при любом значении подкоренного выражения. Следовательно, область определения – (- ∞; + ∞).
Критические точки функции – корни уравнения $y' = 0$ или значения x, при которых y' не существует. Используем формулу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \frac{1}{3}\left(-x^3 - 3x^2 + 24x + 4\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-x^3 - 3x^2 + 24x + 4)' = \frac{-3x^2 - 6x + 24}{3\sqrt[3]{(-x^3 - 3x^2 + 24x + 4)^2}}.$$

Возможно, у функции имеются критические точки, в которых знаменатель полученной дроби равен 0, но они явно не будут точками экстремума, так как знаменатель положителен при любом x, при котором y' определена, следовательно, производная не меняет знак при x, равном корню знаменателя. Поэтому найдем лишь те критические точки, в которых $-3x^2 - 6x + 24 = 0$, $x^2 + 2x - 8 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.
Определим знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:

```
              –               +               –
________________o________________o______________
               - 4               2
```

Итак, при $x = -4$ функция меняет свое поведение с убывания на возрастание, то есть $x = -4$ – точка минимума. Соответственно $x = 2$ – точка максимума.

Ответ: При $x = -4$ – минимум; при $x = 2$ – максимум.

Задача 2. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 120 деталей. Первые два дня он выполнял установленную планом норму, а затем каждый день изготовлял на 6 деталей больше плана, поэтому за два дня до срока было изготовлено 132 детали. Сколько деталей в день он должен был изготовлять по плану?

Решение.
Пусть x – количество деталей в день, которое должно было изготавливаться по плану, y – число дней, за которое по плану должна была быть выполнена вся работа. Тогда общее количество деталей по плану можно выразить как xy. Реально рабочий за первые два дня изготовил $2x$ деталей, а затем в течение $y - 2 - 2 = y - 4$ дней изготавливал в день по $x + 6$ деталей; следовательно, всего он сделал $2x + (x + 6)(y - 4)$ деталей. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 120 \\ 2x + (x+6)(y-4) = 132 \end{cases}; \quad \begin{cases} xy = 120 \\ xy + 6y - 2x = 156 \end{cases}.$$

Подставим во второе уравнение значение xy из первого, тогда второе уравнение станет линейным, и можно будет сделать подстановку: $120 + 6y - 2x = 156$, $3y - x = 18$,

$x = 3y - 18$. Тогда $xy = y(3y - 18) = 120$, $y^2 - 6y - 40 = 0$, $y_1 = 10$, $y_2 = -4 < 0$ – не удовлетворяет условию задачи. Отсюда $x = 30 - 18 = 12$.

Ответ: 12 деталей.

Задача 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 x + \log_5(x+2y) = 4\log_5 2 + 1 \\ \log_5 y + \log_5(y+2x) = 7\log_5 2 \end{cases}.$$

Решение.
Область допустимых значений неизвестных достаточно задать неравенствами $x > 0$, $y > 0$ – при этом все логарифмируемые выражения положительны.
Используя свойства логарифмов, преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} x(x+2y) = 80 \\ y(y+2x) = 128 \end{cases}.$$

Из такой системы можно получить однородное уравнение. Для этого умножим первое уравнение на 8 и вычтем из него второе, умноженное на 5: $8x^2 + 6xy - 5y^2 = 0$. Так как $y = 0$ не является допустимым значением, разделим обе части уравнения на y^2 и сделаем замену: $t = \frac{x}{y}$ ($t > 0$, так как x и y положительны). Тогда $8t^2 + 6t - 5 = 0$, $t_1 = ½$,

$t_2 = -\frac{5}{4} < 0$ - посторонний корень.

Следовательно, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $y = 2x$, и, подставляя в первое уравнение системы, получаем: $x(x + 4x) = 80$, $5x^2 = 80$, $x^2 = 16$, $x = 4$ (учитываем, что $x > 0$). Тогда $y = 2\cdot 4 = 8$.

Ответ: $x = 4$, $y = 8$.

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sin 4x} = 4(\sin 2x + \cos 2x) - 3.$$

Решение.
Преобразуем подкоренное выражение: $1 + \sin 4x = \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x =$
$= (\sin 2x + \cos 2x)^2$. Следовательно, $\sqrt{1+\sin 4x} = \sqrt{(\sin 2x + \cos 2x)^2} = |\sin 2x + \cos 2x|$.
Сделаем замену: $t = \sin 2x + \cos 2x$ и решим уравнение $|t| = 4t - 3$.
А) если $t \geq 0$, то $|t| = t$. Тогда $3t = 3$, $t = 1$.
Б) при $t < 0$ $|t| = -t$, $5t = 3$, $t = \frac{3}{5} > 0$ - не удовлетворяет условию на знак подмодульного выражения.
После обратной замены получаем: $\sin 2x + \cos 2x = 1$. Применим метод дополнительного угла и разделим обе части этого равенства на $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{p}{4} = \cos\frac{p}{4}$, получаем: $\sin 2x \cos\frac{p}{4} + \cos 2x \sin\frac{p}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, или

$\sin\left(2x+\dfrac{p}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда $2x+\dfrac{p}{4}=(-1)^n\dfrac{p}{4}+pn,\ \ x=(-1)^n\dfrac{p}{8}-\dfrac{p}{8}+\dfrac{pn}{2}$.

Ответ: $x=(-1)^n\dfrac{p}{8}-\dfrac{p}{8}+\dfrac{pn}{2}$.

Задача 5. При каких значениях параметра k уравнение

$$|x-k|(x-4)=1$$

имеет единственное решение?

Решение.

Преобразуем уравнение к виду: $|x-k|=\dfrac{1}{x-4}$ и построим в одной координатной системе графики его левой и правой частей:

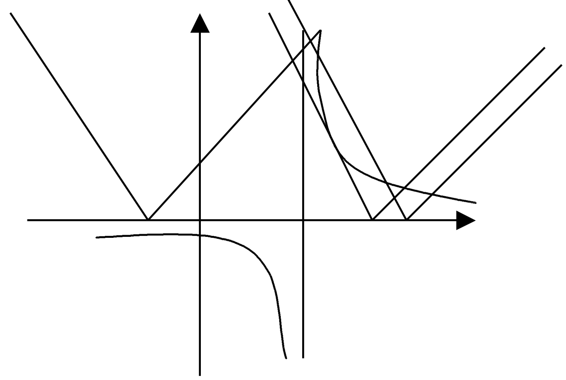


График правой части – гипербола, ветви которой разделены прямой $x = 4$.
Графики левой части – ломаные, сдвигающиеся по оси Оx вправо при увеличении k.
Единственную общую точку с гиперболой имеют те из них, которые лежат левее графика, левая ветвь которого касается правой ветви гиперболы. Следовательно, ответ на вопрос задачи будет иметь вид: $k < k_0$, где k_0 – значение параметра, при котором происходит касание.
Заметим, что касательной является прямая $y = - x + k$, а абсцисса точки касания $x_0 > 4$.
Составим систему уравнений для определения k_0 и x_0:

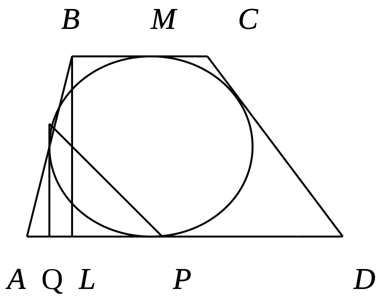
$$\begin{cases} -x_0+k_0=\dfrac{1}{x_0-4} \\ -1=-\dfrac{1}{(x_0-4)^2} \end{cases}$$

(в точке касания равны ординаты обеих функций, а угловой коэффициент касательной равен значению производной функции $y=\dfrac{1}{x-4}$ в точке касания).
Из второго уравнения $(x_0 - 4)^2 = 1$, откуда $x_0 = 5$ или $x_0 = 3$, но второе значение меньше 4, то есть является посторонним. Из первого уравнения $k_0=5+\dfrac{1}{5-4}=6$.
Итак, уравнение имеет единственное решение при $k < 6$.

Ответ: $k < 6$.

Задача 6. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, которая касается боковых сторон AB и CD в точках K и E соответственно, а основания AD в точке P, причем $AK : KB = 4 : 1$ и $DE : EC = 9 : 4$. Найти отношение площадей треугольника APK и трапеции $ABCD$.

Решение.



Можно доказать, что точки касания с вписанной окружностью делят боковые стороны на отрезки, произведение которых одинаково для каждой стороны: $AK{\cdot}KB = CE{\cdot}ED$ (с доказательством этого утверждения вы можете познакомиться в книге «Сборник задач по математике с решениями для поступающих в МАТИ-РГТУ» (М., «Триада-Плюс», 2002), стр. 156-157). Пусть $KB = a$, $AK = 4a$, $CE = 4b$, $ED = 9b$. Тогда $a \cdot 4a = 4b \cdot 9b$, откуда $a = 3b$.

Пусть M – точка касания вписанной окружности и верхнего основания трапеции. Тогда по свойству касательных $BM = BK$, $CM = CE$, следовательно, $BC = BK + CE = a + 4b = 7b$. Аналогично $AD = AP + PD = AK + ED = 4a + 9b = 21b$. Пусть h – высота трапеции, тогда ее площадь можно записать как $\dfrac{AD + BC}{2}h = \dfrac{7b + 21b}{2}h = 14bh.$

Выразим через произведение bh площадь треугольника AKP. Его основание $AP = 12b$, а высоту KQ можно выразить через h, используя подобие треугольников AKQ и ABL, где KQ и BL перпендикулярны AD: $\dfrac{KQ}{BL} = \dfrac{AK}{AB}$, $KQ = \dfrac{AK \cdot BL}{AB} = \dfrac{12bh}{15b} = \dfrac{4}{5}h.$ Таким образом,

$S_{AKP} = \dfrac{1}{2}AP \cdot KQ = \dfrac{1}{2} \cdot 12b \cdot \dfrac{4}{5}h = \dfrac{24}{5}bh.$ Отсюда $S_{APK} : S_{ABCD} = \dfrac{24}{5}bh : 14bh = 12 : 35.$

Ответ: $S_{APK} : S_{ABCD} = 12 : 35.$

Вариант 2001.13

(летнее тестирование, продолжительность экзамена – 1 час 15 мин)

Задача 1. Решить уравнение

$$4 + \sin 2x{\cdot}\cos 2x - 7\cos^2 2x = 0.$$

Решение.

Используем основное тригонометрическое тождество: $4 = 4\sin^2 2x + 4\cos^2 2x$. Тогда $4\sin^2 2x + 4\cos^2 2x + \sin 2x{\cdot}\cos 2x - 7\cos^2 2x = 0$, $4\sin^2 2x + \sin 2x{\cdot}\cos 2x - 3\cos^2 2x = 0$. Проверкой можно убедиться, что для корней уравнения $\cos 2x \neq 0$, поэтому можно разделить обе части равенства на $\cos^2 2x$: $4\mathrm{tg}^2\, 2x + \mathrm{tg}\, 2x - 3 = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, 2x = -1$ или $\mathrm{tg}\, 2x = ¾$.

А) tg $2x$ = - 1, $2x = -\frac{p}{4} + pn,\ \ x = -\frac{p}{8} + \frac{pn}{2}$.

Б) tg $2x$ = $\frac{3}{4}$, $2x = arctg\frac{3}{4} + pn,\ \ x = \frac{1}{2}arctg\frac{3}{4} + \frac{pn}{2}$.

Ответ: $x = -\frac{p}{8} + \frac{pn}{2}$, $x = \frac{1}{2}arctg\frac{3}{4} + \frac{pn}{2}$.

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 1 \\ 3y^2 + xy = 5 \end{cases}.$$

Решение.

Разложим на множители левые части уравнений: $\begin{cases} x(x+3y) = 1 \\ y(3y+x) = 5 \end{cases}$ и разделим левую и правую части второго уравнения на соответствующие части первого: $\frac{y}{x} = 5,\ \ y = 5x$.

Подставим полученное выражение в первое уравнение: $x^2 + 15x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{16}$, $x = \pm\frac{1}{4}$, $y = \pm\frac{5}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{5}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{4}\right)$.

Задача 3. Решить неравенство

$$\log_{x-2} 4 \le \log_{x+10} 16.$$

Решение.

ОДЗ задается условиями: $x - 2 > 0$, $x - 2 \ne 1$, $x + 10 > 0$, $x + 10 \ne 1$. В итоге получаем: $2 < x < 3$, $x > 3$.

Перейдем в обоих логарифмах к основанию 4: $\log_{x-2} 4 = \frac{1}{\log_4(x-2)}$,

$\log_{x+10} 16 = 2\log_{x+10} 4 = \frac{2}{\log_4(x+10)}$. Тогда $\frac{1}{\log_4(x-2)} - \frac{2}{\log_4(x+10)} \le 0$,

$\frac{\log_4(x+10) - 2\log_4(x-2)}{\log_4(x-2)\cdot\log_4(x+10)} \le 0$, $\frac{\log_4\frac{x+10}{(x-2)^2}}{\log_4(x-2)\cdot\log_4(x+10)} \le 0$.

Применим метод интервалов, а для этого найдем корни числителя и знаменателя:

А) $\log_4\frac{x+10}{(x-2)^2} = 0$, $\frac{x+10}{(x-2)^2} = 1$, $x + 10 = x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 5x - 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = -1$ - не входит в ОДЗ.

Б) $\log_4(x-2)=0,\ \ x-2=1,\ \ x=3$ (само это значение в ОДЗ не входит, но разделяет два промежутка, принадлежащие ОДЗ, на которых $\log_4(x-2)$ имеет разные знаки).

В) $\log_4(x+10)=0,\ \ x+10=1,\ \ x=-9$ - значение, лежащее вне ОДЗ.

Итак, числитель дроби меняет знак при $x = 6$, а знаменатель – при $x = 3$. Следовательно, в этих точках меняет знак вся дробь.

Определим знак дроби при $x = 10$:

$$\log_4\frac{10+10}{(10-2)^2}=\log_4\frac{20}{64}=\log_4\frac{5}{16}<0,\ \ \log_4(10-2)=\log_4 8>0,\ \ \log_4(10+10)=\log_4 20>0$$

(учитываем, что логарифм положителен, если основание и аргумент лежат по одну сторону от 1, и отрицателен, если по разные).

Итак, при $x = 10$ числитель дроби отрицателен, знаменатель положителен, то есть вся дробь отрицательна. Теперь можно указать знак левой части неравенства на всех интервалах:

– + –

2 3 6

Ответ: $2 < x < 3,\ \ x \ge 6$.

Задача 4. При каких значениях параметра k уравнение

$$x^2 - 10x + k = 0$$

не имеет решений на отрезке [3; 8] ?

Решение.

Графиком левой части уравнения при любом значении параметра является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины равна 5, то есть расположена на отрезке [3; 8]. Для выполнения условия задачи парабола не должна иметь общих точек с осью Оx на отрезке [3; 8]. Это возможно в двух случаях:

А) соответствующая часть графика лежит целиком выше оси Оx. Для этого достаточно потребовать, чтобы ордината вершины была положительной, то есть $f(5) > 0$, где $f(x) = x^2 - 10x + k$. Тогда $f(5) = 25 - 50 + k = k - 25 > 0,\ \ k > 25$.

Б) часть графика параболы при $3 \le x \le 8$ располагается ниже оси Оx. При этом должны выполняться условия: $f(3) < 0$, $f(8) < 0$, то есть $\begin{cases} k-21<0 \\ k-16<0 \end{cases}$, или $k < 16$.

Ответ: $k < 16,\ \ k > 25$.

С решениями вариантов вступительных экзаменов за ***1996-2001*** *годы вы можете познакомиться в книге «Сборник задач по математике с решениями для поступающих в МАТИ-РГТУ»* ***(****М.,* ***«****Триада-Плюс»,* ***2002).*** *За дополнительной информацией обращайтесь по адресу* vysk@yandex.ru.