Экзаменационные варианты 2003 года

Вариант 2003.01

Задача 1. Упростить выражение $(2 - \log_3 45)(1 - \log_5 45)$.

Решение.
Используя определение логарифма, представим $2 = \log_3 9$, $1 = \log_5 5$. Тогда
$(\log_3 9 - \log_3 45)(\log_5 5 - \log_5 45) = \log_3 \frac{9}{45} \cdot \log_5 \frac{5}{45} = \log_3 \frac{1}{5} \cdot \log_5 \frac{1}{9} = \log_3(5^{-1})\log_5(3^{-2}) =$

$-1 \cdot (-2)\log_3 5 \cdot \log_5 3 = \frac{2\log_3 5}{\log_3 5} = 2$ (на последнем этапе преобразований было использовано то, что $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$).

Ответ: 2.

Задача 2. Решить уравнение $2|x + 2| + |x - 3| = 7 - 2x$.

Решение.
Найдем корни подмодульных выражений: $x + 2 = 0$, $x = -2$; $x - 3 = 0$, $x = 3$. Полученные числа разбивают числовую прямую на 3 промежутка ($(-\infty; -2)$, $[-2; 3)$, $[3; +\infty)$), на каждом из которых оба подмодульных выражения не обращаются в 0 и, соответственно, сохраняют постоянный знак. Следовательно, на каждом из найденных промежутков можно заменить модули либо подмодульными выражениями, либо выражениями, противоположными им, и свести задачу к решению обычных линейных уравнений, равносильных исходному уравнению на каждом из рассматриваемых интервалов:
А) при $x < -2$ $x + 2 < 0$, $x - 3 < 0$, поэтому по определению модуля $|x + 2| = -x - 2$, $|x - 3| = -x + 3$. Следовательно, исходное уравнение можно записать в виде:
$-2x - 4 - x + 3 = 7 - 2x$, откуда $x = -8$. Это значение принадлежит интервалу $(-\infty; -2)$, то есть является решением первоначального уравнения.
Б) для $-2 \le x < 3$ $x + 2 \ge 0$, $x - 3 < 0$. Тогда $|x + 2| = x + 2$, $|x - 3| = -x + 3$. Уравнение принимает вид: $2x + 4 - x + 3 = 7 - 2x$, $x = 0$ – значение, лежащее на промежутке $[-2; 3)$.
В) если $x \ge 3$, оба подмодульных выражения неотрицательны, и требуется решить уравнение $2x + 4 + x - 3 = 7 - 2x$. Его корень $x = \frac{6}{5}$ не принадлежит промежутку $[3; +\infty)$, то есть не является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = -8$, $x = 0$.

Задача 3. Решить неравенство $(3x^2 + x - 4)\sqrt{7x - 2x^2 - 3} \ge 0$.

Решение.
Предлагаем рассмотреть отдельно два случая: равенства и строгого неравенства.
А) Решим уравнение $(3x^2 + x - 4)\sqrt{7x - 2x^2 - 3} = 0$. Область допустимых значений неизвестного задается условием $7x - 2x^2 - 3 \ge 0$, откуда $\frac{1}{2} \le x \le 3$. Найдем корни каждого множителя в левой части уравнения:
$3x^2 + x - 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{3}$ - посторонний корень (не входит в ОДЗ).

$7x-2x^2-3=0$, $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=3.$

Б) Неравенство $(3x^2+x-4)\sqrt{7x-2x^2-3}>0$ сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} 3x^2+x-4>0 \\ 7x-2x^2-3>0 \end{cases}$$

(учитываем, что подкоренное выражение должно быть положительным, а произведение принимает положительные значения, если оба множителя имеют один знак). Решением этой системы является интервал $(1;\ 3)$.

Объединяя решения уравнения и неравенства, получаем окончательный ответ:

Ответ: $x=\dfrac{1}{2}$, $x\in[1;\ 3]$.

Замечание. Если не решать отдельно уравнение, а ограничиться решением системы неравенств $\begin{cases} 3x^2+x-4\geq 0 \\ 7x-2x^2-3\geq 0 \end{cases}$, *то «потеряется» решение* $x=\dfrac{1}{2}$. *Поэтому в случае нестрогого неравенства, в котором присутствует произведение множителей с ограничениями на ОДЗ, советуем случай равенства рассматривать отдельно.*

Задача 4. Найти наименьшее значение параметра a, при котором множество решений неравенства

$$3(\sqrt{26-3x}-ax)\geq 12-10a$$

образует отрезок длины $\dfrac{7}{3}$.

Решение.

Преобразуем неравенство к виду $3\sqrt{26-3x}\geq 3ax-10a+12$. Если построить в одной координатной системе графики его левой и правой частей, то увидим, что график левой части не зависит от параметра, а правая часть представляет собой семейство прямых. Для выполнения условия задачи требуется, чтобы график квадратного корня располагался выше такой прямой для значений аргумента, образующих отрезок длины $\dfrac{7}{3}$. Это возможно в двух случаях:

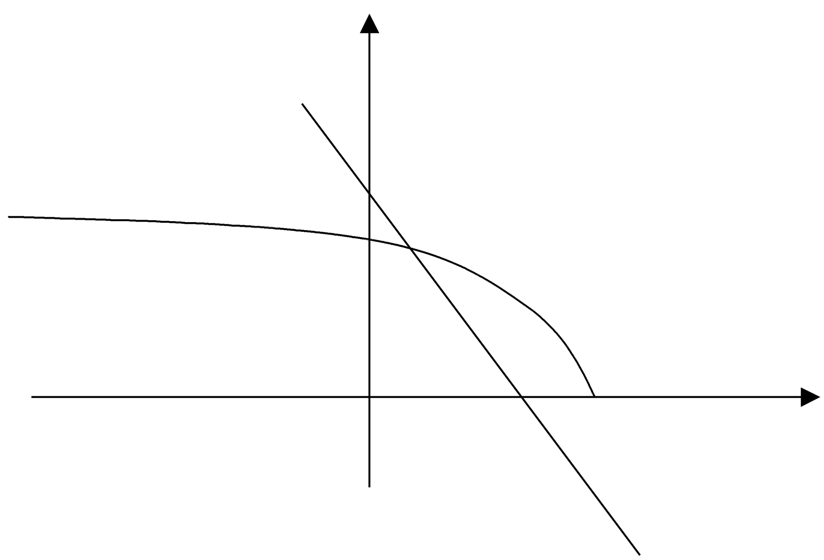

Рис. 1

А) Графики имеют только одну точку пересечения, абсцисса которой равна $\frac{26}{3}-\frac{7}{3}=\frac{19}{3}$ (рис. 1). При этом угловой коэффициент прямой должен быть отрицательным, и точка прямой с абсциссой $\frac{26}{3}$ должна лежать ниже оси Ox. Найдем соответствующее этому случаю значение a:

$3\sqrt{26-19}=19a-10a+12,\ \ a=\frac{\sqrt{7}-4}{3}\approx -0{,}45.$ Однако при этом значении a ордината точки, лежащей на прямой $y = 3ax - 10a + 12$, при $x = \frac{26}{3}$ равна $\frac{16\sqrt{7}-28}{3}>0$, то есть найденное значение a не является решением задачи.

Б) Графики пересекаются в двух точках, разность абсцисс которых равна $\frac{7}{3}$ (рис. 2).

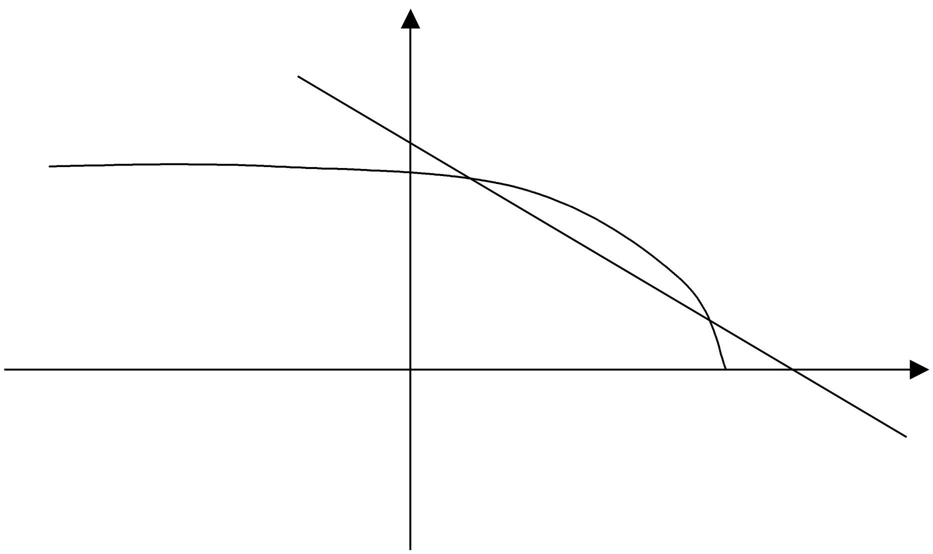

Рис. 2

Найдем корни уравнения $3(\sqrt{26-3x}-ax)=12-10a$. Замена $t=\sqrt{26-3x},\ 3x=26-t^2$ приводит к уравнению для t: $at^2 + 3t -12 - 16a = 0$. Его дискриминант $D = 9 - 4a(- 12 - 16a) = (8a + 3)^2$.

Тогда $t_1=-\frac{4a+3}{a},\ \ t_2=4.$ Следовательно, $x_2=\frac{26-16}{3}=\frac{10}{3}$, а x_1 – либо $\frac{17}{3}$, либо 1.

Отсюда :

1) $\frac{26-\left(-\frac{4a+3}{a}\right)^2}{3}=\frac{17}{3},\ \left(-\frac{4a+3}{a}\right)^2=9,\ -\frac{4a+3}{a}=3,\ \ a=-\frac{3}{7}.$

2) $\frac{26-\left(-\frac{4a+3}{a}\right)^2}{3}=1,\ \left(-\frac{4a+3}{a}\right)^2=23,\ \ a=-\frac{3}{4+\sqrt{23}}\approx -0{,}341.$

Итак, найдено два значения a, при которых выполняется поставленное в задаче условие. Ответом будет наименьшее из них, то есть $a = -\frac{3}{7}$.

Ответ: $a = -\frac{3}{7}$.

Задача 5. Решить уравнение

$$\sin^3 x\,(2\sin x + 3) + \cos^3 x(2\cos x + 3) + \frac{9}{2}\sin 2x(\sin x + \cos x) = 1.$$

Решение.
Представим левую часть уравнения в виде:
$2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1 + 3(\sin^3 x + \cos^3 x) + \frac{9}{2}\sin 2x(\sin x + \cos x) = 0$ и разложим ее на множители:
А) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1 = 2(\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) - 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x = 2 - 1 - \sin^2 2x = 1 - \sin^2 2x = \cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$;
Б) $3(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) = 3(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)$;
В) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1 + 3(\sin^3 x + \cos^3 x) + \frac{9}{2}\sin 2x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x +$
$+ 3 - 3\sin x\cos x + 9\sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 3 + 3\sin 2x)$.
Таким образом, исходное уравнение преобразовано к форме:
$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 3 + 3\sin 2x) = 0$.
А) $\sin x + \cos x = 0$. Разделим обе части равенства на $\cos x$ (поскольку для решений этого уравнения $\cos x \neq 0$). Получим: $\mathrm{tg}x + 1 = 0$, $\mathrm{tg}x = -1$, $x = -\frac{p}{4} + pn,\ n \in Z$.
Б) $\cos x - \sin x + 3 + 3\sin 2x = 0$. Сделаем замену: $t = \sin x - \cos x$, тогда $t^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$, откуда $\sin 2x = 1 - t^2$. Решим уравнение $-t + 6 - 3t^2 = 0$, $3t^2 + t - 6 = 0$,
$t = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{6}$. Обратная замена приводит к уравнениям:

1) $\sin x - \cos x = \frac{-1+\sqrt{73}}{6}$.

Разделим обе его части на $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{\sqrt{73}-1}{6\sqrt{2}} \approx 0{,}89 < 1$,

$\sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{73}-1}{6\sqrt{2}},\quad x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{73}-1}{6\sqrt{2}} + \frac{p}{4} + pn,\ n \in Z.$

2) $\sin x - \cos x = \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$, $\sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = \frac{-1-\sqrt{73}}{6\sqrt{2}} \approx -1{,}12 < -1$ – решений нет.
Объединяя найденные решения, получаем окончательный ответ:

Ответ: $x = -\frac{p}{4} + pn,\ n \in Z,\quad x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{73}-1}{6\sqrt{2}} + \frac{p}{4} + pn,\ n \in Z.$

Задача 6. В угол треугольника вписаны две касающиеся окружности радиусов r и R, где $r : R = 4 : 9$. Основание этого треугольника равно a и касается только большей окружности. Касательная к меньшей окружности проходит между центрами этих окружностей и перпендикулярна одной из боковых сторон треугольника. В каком отношении площадь треугольника делится этой касательной, если $R : a = 3:20$?

Решение.
Проведем радиусы окружностей O_1P и O_2Q в точки их касания со стороной BC и введем обозначения: $r = 4b$, $R = 9b$, $a = 60b$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1O_2PQ, в которой $O_1P = 4b$, $O_2Q = 9b$, $O_1O_2 = r + R = 13b$. Опустим перпендикуляр O_1K на сторону O_2Q . Тогда из прямоугольного треугольника O_1KO_2 найдем $O_1K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = \sqrt{169b^2 - 25b^2} = 12b.$ Следовательно, $PQ = O_1K = 12b$.

Из подобия треугольников O_1BP и O_2BQ получим, что $\frac{BP}{BQ} = \frac{O_1P}{O_2Q} = \frac{r}{R} = \frac{4}{9}$, то есть

$\frac{BP}{BP + 12b} = \frac{4}{9}$, откуда $BP = \frac{48}{5}b.$

Выразим площадь треугольника ABC через b. $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot R.$ Поскольку отрезки смежных сторон треугольника от общей вершины до точек касания равны ($AR = AT$, $BR = BQ$, $CQ = CT$), полупериметр треугольника ABC равен $AT + CT + BQ = AC + BQ = 60b + 12b + \frac{48}{5}b = \frac{408b}{5}$. Тогда $S_{ABC} = \frac{408}{5}b \cdot 9b = \frac{3672}{5}b^2$.

В прямоугольном треугольнике MBN $BN = BQ + QN = \frac{48}{5}b + r = \frac{48}{5}b + 4b = \frac{68}{5}b$.

(Отметим, что отрезок PN равен радиусу меньшей окружности, так как, если провести ее радиус в точку касания с прямой MN, то получим квадрат с вершинами в точках O_1, P, N и точке касания, сторона которого равна r). Найдем тангенс угла MBN. Из треугольника O_1BP $tgO_1BP = \frac{O_1P}{BP} = \frac{4b}{\frac{48}{5}b} = \frac{5}{12}$, но точка O_1 расположена на биссектрисе угла MBN,

поэтому $tgMBN = tg(2 \cdot O_1BP) = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$. Поэтому

$$S_{MBN} = \frac{1}{2}BN \cdot MN = \frac{1}{2}BN \cdot BNtgMBN = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{68}{5}b\right)^2 \cdot \frac{120}{119} = \frac{3264}{35}b^2.$$

Значит, $S_{AMNC} = S_{ABC} - S_{MBN} = \left(\frac{3672}{5} - \frac{3264}{35}\right)b^2 = \frac{4488}{7}b^2$.

Найдем отношение площадей треугольника MBN и четырехугольника $AMNC$:

$$S_{MBN} : S_{AMNC} = \frac{3264}{35}b^2 : \frac{4488}{7}b^2 = \frac{3264}{5 \cdot 4488} = \frac{8}{55}.$$

Ответ: 8: 55.

Вариант 2003.25

Задача 1. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102; \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$$

Решение.

Умножим обе части второго уравнения на 2 и сложим левые и правые части уравнений: $(x^2 + 2xy + y^2) + (x + y) = 240$. Сделаем замену: $t = x + y$ и решим уравнение для t: $t^2 + t - 240 = 0$; $t_1 = -16$, $t_2 = 15$.

А) $x + y = -16$, тогда из второго уравнения $xy = 69 - (x + y) = 69 + 16 = 85$. Решим систему: $\begin{cases} x + y = -16 \\ xy = 85 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -x - 16 \\ x^2 + 16x + 85 = 0 \end{cases}$. Дискриминант второго уравнения отрицателен, поэтому система не имеет решений.

Б) $x + y = 15$, $xy = 69 - 15 = 54$. Тогда $\begin{cases} y = 15 - x \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 6 \end{cases}$.

Ответ: (6; 9), (9; 6).

Задача 2. Решить уравнение

$$3\sin x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Решение.

Воспользуемся одной из формул для косинуса двойного угла: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и сделаем замену: $t = \sin x$ ($-1 \le t \le 1$). Тогда требуется решить уравнение: $3t + 1 - 2t^2 + 1 = 0$, $2t^2 - 3t - 2 = 0$, $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2 > 1$ – посторонний корень. Обратная замена приводит к уравнению $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^{n+1}\frac{p}{6} + pn$, $n \in Z$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{p}{6} + pn$, $n \in Z$.

Задача 3. Решить неравенство

$$\log_2 (2^{x+1} - 3) + x > \log_2 (4^x + 4).$$

Решение.

Область допустимых значений неизвестного задается неравенством $2^{x+1} - 3 > 0$.

По определению логарифма $x = \log_2 2^x$, поэтому неравенство можно записать в форме: $\log_2 (2^{x+1} - 3) + \log_2 2^x > \log_2 (4^x + 4)$. Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть: $\log_2 ((2^{x+1} - 3)2^x) > \log_2 (4^x + 4)$. Логарифмическая функция с основанием, большим 1, является возрастающей, поэтому логарифмируемые выражения связаны неравенством того же знака, что и их логарифмы: $(2^{x+1} - 3)2^x > 4^x + 4$. Сделаем замену: $t = 2^x$ ($t > 0$) и решим неравенство $(2t - 3)t > t^2 + 4$, $t^2 - 3t - 4 > 0$, $t < -1$ или $t > 4$. С учетом ОДЗ и условия на знак t окончательно получим, что $t > 4$. После обратной замены требуется решить простейшее показательное неравенство $2^x > 4$, $2^x > 2^2$, $x > 2$ (учитываем, что показательная функция с основанием 2 – возрастающая).

Ответ: $x \in (2; \infty)$.

Задача 4. При каких значениях параметров a и b все решения неравенства

$$x^4 + x^3 - x^2 + ax + b \le 0$$

образуют отрезок [-2; 1] ?

Решение.

Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы числа -2 и 1 были корнями уравнения $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b = 0$. Подставив эти значения в уравнение, получим систему уравнений для определения a и b: $\begin{cases} 1 + 1 - 1 + a + b = 0 \\ 16 - 8 - 4 - 2a + b = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Убедимся, что уравнение $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ не имеет других корней. Разложим его левую часть на множители: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) = 0$. Видим, что последний множитель не обращается в 0, поэтому других корней уравнение не имеет.

Вернемся к решению неравенства. Запишем его в виде: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) \le 0$. Метод интервалов дает решение [-2; 1], то есть условие задачи выполнено.

Ответ: $a = 1$, $b = -2$.