Решение экзаменационных вариантов летнего тестирования 2004 года

Вариант 2004.9

Задача 1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+1}+\frac{3}{\sqrt{2x+1}}=4.$$

Решение.

Сделаем замену: $t=\sqrt{2x+1},\ \ t\ge 0$ и решим уравнение для t: $t+\frac{3}{t}=4,\ \ t^2-4t+3=0,$

$t_1=1,\ \ t_2=3.$ После обратной замены получим:

А) $\sqrt{2x+1}=1,\ 2x+1=1,\ \ x=0.$

Б) $\sqrt{2x+1}=3,\ 2x+1=9,\ \ x=4.$

Ответ: $x = 0$, $x = 4$.

Задача 2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\log_2(x^2-2)\ge 0.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде: $\log_{\frac{1}{2}}\log_2(x^2-2)\ge\log_{\frac{1}{2}}1.$ Основание внешнего логарифма меньше 1, поэтому при переходе к аргументам знак неравенства меняется. Кроме того, логарифмируемое выражение должно быть положительным. Таким образом, требуется решить систему неравенств: $\begin{cases}\log_2(x^2-2)>0\\ \log_2(x^2-2)\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2(x^2-2)>\log_2 1\\ \log_2(x^2-2)\le\log_2 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2>0\\ x^2-2>1\\ x^2-2\le 2\end{cases}.$

Очевидно, что первое неравенство следует из второго, поэтому достаточно решить систему из второго и третьего неравенств: $\begin{cases}x^2>3\\ x^2\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\ x<-\sqrt{3}\end{array}\right.\\ -2\le x\le 2\end{cases}\Rightarrow -2\le x<-\sqrt{3},$

$\sqrt{3}<x\le 2.$

Ответ: $x\in[-2;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};2].$

Задача 3. Решить уравнение

$$(\sin 2x + \sin 4x)\ \mathrm{tg}\ x = 0.$$

Решение.

Используем для функции $\sin 4x$ формулу синуса двойного угла:

$(\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x)tgx=0,\ \ \sin 2x(1+2\cos 2x)tgx=0,\ \ \frac{2\sin x\cos x(1+2\cos 2x)}{\cos x}=0.$

Дробь можно сократить на cos x, так как cos $x \neq 0$ для корней уравнения (если cos $x = 0$, tg x не существует). Тогда уравнение принимает вид: $2\sin x\,(1 + 2\cos 2x) = 0$.
А) $\sin x = 0$, $x = \pi n$.

Б) $1 + 2\cos 2x = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{p}{3} + pn.$

Ответ: $x = pn$, $x = \pm\frac{p}{3} + pn.$

Задача 4. При каких значениях параметра k уравнение

$$4 \cdot 2^{3x} - k \cdot 2^{2x+2} - k \cdot 2^{x} + k^{2} = 0$$

имеет два решения?

Решение.
Сделаем замену: $t = 2^{x}$, $t > 0$. Тогда требуется, чтобы уравнение $4t^3 - 4kt^2 - kt + k^2 = 0$ имело два *положительных* корня. Разложим на множители левую часть уравнения:
$4t^2(t-k) - k(t-k) = 0$, $(4t^2 - k)(t-k) = 0$.
Рассмотрим три случая:

А) $k < 0$. Тогда уравнение $4t^2 - k = 0$ решений не имеет $(t^2 = \frac{k}{4} < 0)$, а корень уравнения $t - k = 0$ отрицателен, то есть не входит в ОДЗ. Следовательно, в этом случае исходное уравнение не имеет решений.
Б) $k = 0$ – при этом уравнение для t имеет единственное решение $t = 0$, не входящее в ОДЗ, то есть первоначальное уравнение опять не имеет решений.

В) $k > 0$, $t_1 = k$, $t_2 = \frac{\sqrt{k}}{2}$, $t_3 = -\frac{\sqrt{k}}{2} < 0$ – не входит в ОДЗ. Итак, при этом исходное уравнение имеет два решения, что соответствует условию задачи.
Ответ: $k > 0$.

Вариант 2004.41

Задача 1. Решить уравнение

$$|x-1| + |x-3| = 2|x-2|.$$

Решение.
Знаки подмодульных выражений на интервалах числовой прямой распределяются так:

```
  – – –      + – –      + – +     + + +
__________o___________o_________o________
          1           2         3
```

Решим уравнение на каждом промежутке:
А) $x < 1$, $-x + 1 - x + 3 = -2x + 4$, $4 = 4$ – уравнение превратилось в тождество, верное для любого $x < 1$.
Б) $1 \leq x < 2$, $x - 1 - x + 3 = -2x + 4$, $x = 1$ – число, принадлежащее рассматриваемому промежутку.
В) $2 \leq x < 3$, $x - 1 - x + 3 = 2x - 4$, $x = 3$ – не входит в рассматриваемый промежуток.

Г) $x \geq 3$, $x - 1 + x - 3 = 2x - 4$, $-4 = -4$ – тождество, то есть все $x \geq 3$ являются решениями уравнения.
Ответ: $x \leq 1$, $x \geq 3$.

Задача 2. Решить уравнение

$$\log_x(x^2 - 3x + 1) - \log_{\sqrt{x}} \sqrt{3x - 4} = 0.$$

Решение.

ОДЗ задается системой неравенств $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases}$. Можно не искать ее решение явным образом, а вместо этого в конце работы проверить найденные корни на соответствие всем поставленным условиям.
Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнение к виду:
$\log_x(x^2 - 3x + 1) = \log_x(3x - 4)$, $x^2 - 3x + 1 = 3x - 4$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1 -$ не входит в ОДЗ.
Ответ: $x = 5$.

Задача 3. Решить уравнение

$$(\cos 2x + 3\cos x - 1)\sqrt{\sin x + \frac{1}{100}} = 0.$$

Решение.
ОДЗ: $\sin x \geq -\frac{1}{100}$.
А) $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$, $2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$, $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$. Замена: $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$, $t_1 = -½$, $t_2 = 2 > 1$ – посторонний корень.

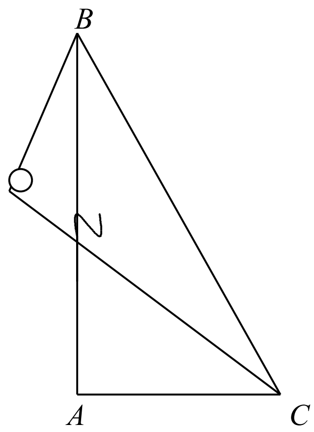
Обратная замена: $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\begin{cases} x = \pm\frac{2p}{3} + 2pn \\ \sin x \geq -\frac{1}{100} \end{cases}$. Второму условию соответствуют только корни вида $x = \frac{2p}{3} + 2pn$ (для остальных значений x, являющимися решениями получившегося простейшего уравнения, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{100}$).

Б) $\sin x + \frac{1}{100} = 0$, $\sin x = -\frac{1}{100}$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{100} + pn.$

Ответ: $x = \frac{2p}{3} + 2pn$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{100} + pn.$

Задача 4. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 10 см, а радиус описанной окружности $\sqrt{13}$ см. Найти расстояние от вершины меньшего угла до медианы, проведенной к большему катету.

Решение.



Найдем длины катетов. Пусть $AB = x$, $AC = y$. Как известно, радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, следовательно, $BC = 2\sqrt{13}$. Тогда для x и y можно составить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ 100 - 20x + 2x^2 = 52 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \end{array} \right.$$

. Поскольку в качестве x выбран больший катет, будем считать, что $AB = 6$, $AC = 4$.

Проведем медиану CN и опустим на ее продолжение перпендикуляр BO, длину которого нужно найти. Прямоугольные треугольники BON и CNA подобны, так как их углы при вершине N равны как вертикальные. Следовательно, $\frac{BO}{AC} = \frac{BN}{NC}$, $\frac{BO}{3} = \frac{3}{NC}$.

Найдем медиану NC как гипотенузу прямоугольного треугольника CNA:

$NC = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\frac{BO}{3} = \frac{3}{5}$, $BO = \frac{9}{5} = 1{,}8$.

Ответ: 1, 8 см.