Варианты вступительных экзаменов по математике 2005 г. с решениями

Вариант 2005.23

Задача 1. Решить уравнение

$$10x^3 + x^2 - 80 - \frac{8}{x} = 0.$$

Решение.
Область допустимых значений неизвестного задается условием $x \neq 0$.
Умножим обе части равенства на x:

$$10x^4 + x^3 - 80x - 8 = 0$$

и разложим левую часть полученного уравнения на множители:
$x^3(10x+1) - 8(10x+1) = 0,\ (x^3 - 8)(10x+1) = 0.$

$А)\ x^3 - 8 = 0,\ x^3 = 8,\ x = 2.$

$Б)\ 10x + 1 = 0,\ x = -0{,}1.$

Ответ: x = 2, x = -0,1.

Задача 2. Найти сумму корней уравнения

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \cdot tgx = 0$$

на отрезке $\left[-\frac{3}{2}p, 0\right]$.

Решение.
Найдем ОДЗ: для существования тангенса необходимо, чтобы $\cos x \neq 0$, откуда
$x \neq \frac{p}{2} + p\,n.$
Используя формулу синуса двойного угла и выражение тангенса через синус и косинус, приведем уравнение к виду
$\sin x - \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0,\ \sin x - \sin^2 x = 0,\ \sin x(1 - \sin x) = 0.$

А) $\sin x = 0,\ x = p\,n.$ При этом $\cos x = \pm 1,$ то есть все найденные корни входят в ОДЗ.

Б) $1 - \sin x = 0,\ \sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0 -$ соответствующие значения x не входят в ОДЗ.

Ответ: $x = \pi n$.

Задача 3. Решить неравенство

$$\left(1 + ctg^2\frac{p}{6}\right)^x - 2\left(\frac{1}{\sin\frac{p}{6}}\right)^x - 8 \leq 0.$$

Решение.
Вычислим значения оснований степеней:

$$ctg\frac{p}{6}=\sqrt{3},\ 1+ctg^2\frac{p}{6}=1+3=4;\ \frac{1}{\sin\frac{p}{6}}=1:\frac{1}{2}=2.$$

Следовательно, неравенство можно записать в виде:

$$4^x-2\cdot 2^x-8\le 0.$$

Сделаем замену: $t = 2^x$, $t > 0$. Решим систему неравенств для t:

$$\begin{cases} t>0 \\ t^2-2t-8\le 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t>0 \\ -2\le t\le 4 \end{cases}\Rightarrow 0<t\le 4.$$

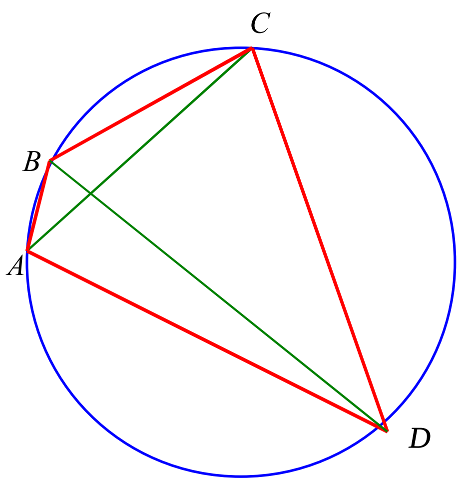
После обратной замены получим:

$$0<2^x\le 4,\ 2^x\le 2^2,\ x\le 2.$$

Ответ: (-∞; 2].

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* проведены диагонали *AC* и *BD*. Найти отношение $\angle BDC:\angle DBC$, если $\angle BAC=5°$, $\angle ACB=15°$, $AD=CD$ и $\angle DAC=80°$.

Решение.



Из условия задачи следует, что треугольник *ADC* – равнобедренный, поэтому $\angle DCA=\angle DAC=80°$. Следовательно,
$\angle BAD=80+5=85°$, $\angle BCD=80+15=95°$, $\angle BAD+\angle BCD=85+95=180°$.
Тогда сумма углов *ABC* и *ADC* равна 360 – 180 = 180^o. Значит, вокруг четырехугольника *ABCD* можно описать окружность. Углы *BDC* и *BAC* вписаны в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу *BC*, следовательно, они равны, то есть $\angle BDC=\angle BAC=5°$. Аналогично $\angle DBC=\angle DAC=80°$, так как оба эти угла опираются на дугу *DC*. Отсюда $\angle BDC:\angle DBC=5:80=1:16$.

Ответ: $\angle BDC:\angle DBC=1:16$.

Вариант 2005.44

Задача 1. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}-6\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}=-1.$$

Решение.

Сделаем замену: $t=\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ $(t>0)$ и решим уравнение для t:

$$t-\frac{6}{t}=-1,\ t^2+t-6=0,\ t_1=2,\ t_2=-3<0-\text{ посторонний корень.}$$

Обратная замена приводит к уравнению

$$\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}\ =2,\ \frac{3-x}{x+2}=4,\ 3-x=4x+8,\ x=-1.$$

Ответ: x = -1.

Задача 2. Решить уравнение

$$(1-\sin 2x)(\cos x+\sin x)=2(\sin x-\cos x).$$

Решение.

Преобразуем первый множитель в левой части уравнения:

$1-\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)^2$

и запишем уравнение в виде:

$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\cos x+\sin x)-2(\sin x-\cos x)=0,\ (\sin x-\cos x)(\sin^2 x-\cos^2 x-2)=0,$

$(\sin x-\cos x)(-\cos 2x-2)=0.$

А) $\sin x-\cos x=0,\ tgx-1=0,\ tgx=1,\ x=\frac{p}{4}+p\,n$ (учитываем, что для корней уравнения $\cos x\neq 0$).

Б) $-\cos 2x-2=0,\ \cos 2x=-2<-1-$ решений нет.

Ответ: $x=\frac{p}{4}+p\,n.$

Задача 3. Решить уравнение

$$3\sqrt{\sqrt{\log_5 x}\log_4 x}=2\sqrt{\log_5 x}+\log_4 x.$$

Решение.

А) Проверкой убеждаемся, что x = 1 – корень уравнения (при этом все логарифмы равны нулю, и уравнение превращается в верное равенство).

Б) Если $x\neq 1$, то $\log_4 x\neq 0$. Учитываем, что для корней уравнения $\log_5 x>0,\ \log_4 x>0,$ и разделим обе части равенства на $\log_4 x$:

$$3\frac{\sqrt{\sqrt{\log_5 x}\log_4 x}}{\log_4 x}=2\frac{\sqrt{\log_5 x}}{\log_4 x}+1,\ 3\sqrt{\frac{\sqrt{\log_5 x}}{\log_4 x}}=2\frac{\sqrt{\log_5 x}}{\log_4 x}+1.$$

Сделаем замену: $t=\sqrt{\dfrac{\sqrt{\log_5 x}}{\log_4 x}}, t>0$ и решим уравнение для t:

$$3t=2t^2+1,\ \ 2t^2-3t+1=0,\ \ t_1=1,\ \ t_2=\frac{1}{2}.$$

После обратной замены получаем:

А) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\log_5 x}}{\log_4 x}}=1,\ \log_5 x=\log_4^2 x,\ \dfrac{\log_4 x}{\log_4 5}-\log_4^2 x=0,\ \log_4 x\left(\dfrac{1}{\log_4 5}-\log_4 x\right)=0,$

$\log_4 x(\log_5 4-\log_4 x)=0.$

Случай $\log_4 x = 0$, т.е. $x = 1$, уже рассмотрен, поэтому осталось решить уравнение $\log_4 x=\log_5 4\Rightarrow x=4^{\log_5 4}$. Отметим, что $\log_5 4 > 0$, поэтому корень уравнения входит в ОДЗ.

Б) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\log_5 x}}{\log_4 x}}=\dfrac{1}{2}$. Преобразования, аналогичные проведенным в пункте А, приводят к уравнению $\log_4 x=16\log_5 4\Rightarrow x=4^{16\log_5 4}$.

Ответ: $x=1,\ \ x=4^{\log_5 4},\ \ x=4^{16\log_5 4}$.

Задача 4. При каких значениях параметра k уравнение

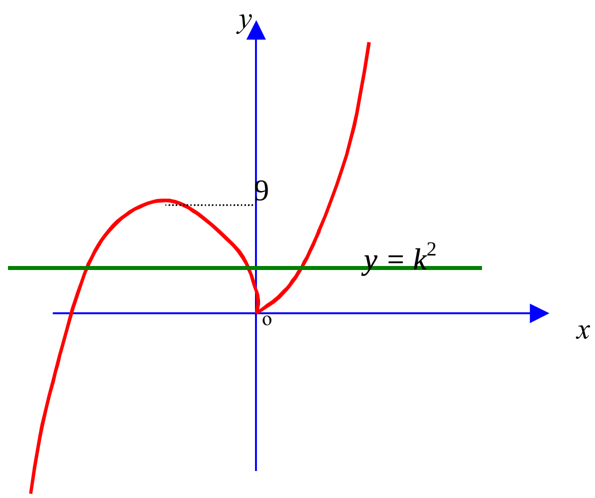
$$\frac{|x|}{x}(x^2+6x)=k^2$$

имеет 3 решения?

Решение.

Построим график функции, стоящей в левой части уравнения. Область ее определения: $x\neq 0$. Учитывая, что $\dfrac{|x|}{x}=1$ при $x > 0$ и $\dfrac{|x|}{x}=-1$ при $x < 0$, получим:

$$y=\frac{|x|}{x}(x^2+6x)=\begin{cases} x^2+6x, & x>0,\\ -x^2-6x, & x<0.\end{cases}$$



Графики функций $y = k^2$, стоящих в правой части уравнения, представляют собой прямые в верхней полуплоскости, параллельные оси абсцисс. Для того чтобы уравнение имело 3 решения, такая прямая должна иметь 3 общие точки с графиком функции $y=\frac{|x|}{x}(x^2+6x)$ (см. рисунок). Это возможно, если прямая лежит выше оси Ox, но ниже вершины параболы, то есть при $0<k^2<9 \Rightarrow -3<k<0,\ 0<k<3.$

Ответ: $-3<k<0,\ 0<k<3.$