Варианты вступительных экзаменов по математике 2006 г. с решениями

Вариант 2006.12

Задача 1. Найти сумму корней уравнения

$$\frac{2x-3}{x-3}=\frac{x-5}{x+1}.$$

1) -9 2) -7 3) -3 4) 1 5) 3

Решение.
ОДЗ: $x \neq -1$, $x \neq 3$. Используя основное свойство пропорции, получаем:

$$(2x-3)(x+1)=(x-3)(x-5),$$

$$2x^2-x-3=x^2-8x+15,$$

$$x^2+7x-18=0, \quad x_1=-9,\ x_2=2.$$

Оба корня входят в ОДЗ, и их сумма равна -7 (ответ №2).
Ответ: №2.

Задача 2. Найти наибольшее отрицательное решение уравнения

$$2\cos^2 x-5\cos x+2=0.$$

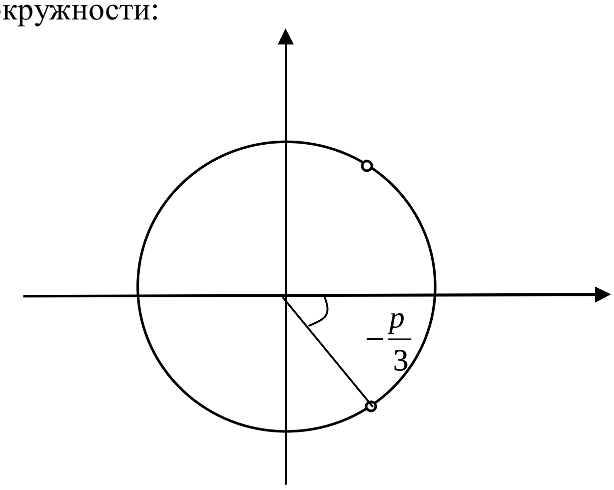
1) $-\frac{11}{3}p$ 2) $-\frac{7}{3}p$ 3) $-\frac{5}{3}p$ 4) $-\frac{p}{3}$ 5) $-\frac{p}{6}$

Решение.
Найдем вначале общее решение уравнения. Для этого сделаем замену:
$t=\cos x\,(-1 \leq t \leq 1)$. Тогда

$$2t^2-5t+2=0, \quad t_1=\frac{1}{2}, \quad t_2=2>1=- \text{ не входит в ОДЗ.}$$

Обратная замена: $\cos x=\frac{1}{2}, \quad x=\pm\frac{p}{3}+2pn.$

Для ответа на вопрос задачи проще всего изобразить полученное решение на тригонометрической окружности:



Видим, что наибольшим отрицательным корнем является $-\frac{p}{3}$ - верен ответ №4.

Ответ: №4.

Задача 3. Найти модуль разности корней уравнения

$$\log_{\sqrt{7}} x \log_{\frac{1}{2}} x + 2\log_{\sqrt{7}} x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 4 = 0.$$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 6

Решение.

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$\left(\log_{\sqrt{7}} x - 2\right)\left(\log_{\frac{1}{2}} x + 2\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{7}} x = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \\ x_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \end{array}\right., \quad |x_1 - x_2| = 3.$$

Следовательно, верен ответ №3.

Ответ: №3.

Задача 4. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6. Найти сумму первых пяти ее членов, если первый член равен 4.

1) $\dfrac{396}{81}$ 2) $\dfrac{484}{81}$ 3) 6 4) $\dfrac{533}{27}$ 5) $\dfrac{796}{27}$

Решение.

Пусть b_1 – первый член прогрессии, S – ее сумма. Тогда

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad 6 = \frac{4}{1-q}, \quad 6 - 6q = 4, \quad q = \frac{1}{3}.$$

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{4\left(\dfrac{1}{243} - 1\right)}{\dfrac{1}{3} - 1} = \frac{4 \cdot 242 \cdot 3}{243 \cdot 2} = \frac{484}{81}.$$

Ответ: №2.

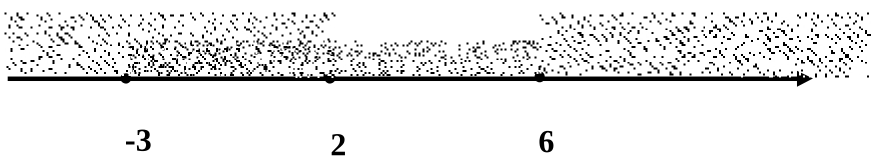
Задача 5. Найти количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 18 + 3x - x^2 \ge 0, \\ |x - 4| \ge 2. \end{cases}$$

1) 1 2) 3 3) 5 4) 7 5) 8

Решение.

$$\begin{cases} 18 + 3x - x^2 \ge 0 \\ |x - 4| \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(x+3)(x-6) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 4 \ge 2 \\ x - 4 \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 6 \\ x \le 2 \end{array}\right. \end{cases}.$$



Решение системы: $x \in [-3; 2]$, $x = 6$. Оно содержит 7 целых чисел (ответ №4).

Ответ: №4.

Задача 6. Решить уравнение

$$\sin x + (1 + \sin x)ctg^2 x + 1 = 0.$$

1) $-\frac{p}{2} + 2pn$ 2) $-\frac{p}{4} + pn$ 3) $-\frac{p}{2} + pn$ 4) $\frac{p}{4} + 2pn$ 5) $\frac{p}{4} + pn$

Решение.
Функция ctg *x* не существует, если sin *x* = 0. Следовательно, ОДЗ: $x \neq pn$.
Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(1 + \sin x)(ctg^2 x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1,\ x = -\frac{p}{2} + 2pn; \\ ctg^2 x = -1 - \textit{нет решений}. \end{array}\right.$$

Следовательно, верен ответ №1.
Ответ: №1.

Задача 7. При каких значениях параметра *a* площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} |4x - 3y| + |4x + 3y| \le 24a, \\ x \le 3y - 6a \end{cases}$$

равна 48?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

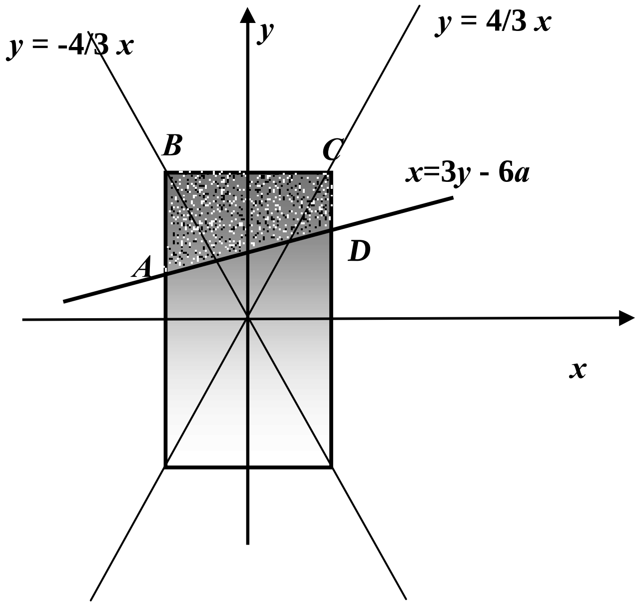
Решение.
Левая часть первого неравенства может принимать только неотрицательные значения, поэтому первое неравенство имеет решение только при положительном *a*.
Построим график уравнения $|4x - 3y| + |4x + 3y| = 24a$. Для этого отметим, что

$$|4x - 3y| + |4x + 3y| = \begin{cases} 8x \quad \textbf{\textit{при}} \quad y \le \frac{4}{3}x \ \textbf{\textit{и}}\ y \ge -\frac{4}{3}x, \\ 6y \quad \textbf{\textit{при}} \quad y \ge \frac{4}{3}x \ \textbf{\textit{и}}\ y \ge -\frac{4}{3}x, \\ -8x \quad \textbf{\textit{при}} \quad y \ge \frac{4}{3}x \ \textbf{\textit{и}}\ y \le -\frac{4}{3}x, \\ -6y \quad \textbf{\textit{при}} \quad y \le \frac{4}{3}x \ \textbf{\textit{и}}\ y \le -\frac{4}{3}x. \end{cases}$$

Следовательно, графиком уравнения является прямоугольник, уравнения сторон которого: $\pm 8x = 24a$ и $\pm 6y = 24a$, то есть $x = \pm 3a$ и $y = \pm 4a$. Решением неравенства будут внутренние точки этого прямоугольника (в этом можно убедиться, подставив в неравенство $x = y = 0$).
Прямая $x = 3y - 6a$ пересекает стороны этого прямоугольника в точках $A(-3a;\ a)$ и $D(3a;\ 3a)$ – этот результат получен из решения систем

$$\begin{cases} x = -3a \\ x = 3y - 6a \end{cases} \quad \textbf{\textit{и}} \quad \begin{cases} x = 3a \\ x = 3y - 6a \end{cases}.$$

При этом решение второго неравенства – полуплоскость, расположенная выше прямой. Следовательно, фигура, заданная системой неравенств, – это прямоугольная трапеция *ABCD*.



Ее основания: $AB = 4a - a = 3a$ и $CD = 4a - 3a = a$, высота $BC = 3a + 3a = 6a$.
Следовательно, площадь трапеции равна ½ $(3a + a)\cdot 6a = 12a^2 = 48$, $a^2 = 4$, $a = 2$ (ответ №2).
Ответ: №2.

Вариант 2006.18

Задача 1. Найти наибольший корень уравнения

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0.$$

1) -1 2) 4 3) 0 4) $\sqrt{3}$ 5) 1

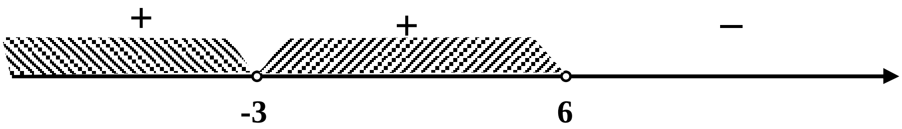
Решение.
Перед нами биквадратное уравнение, которое решается с помощью замены
$t = x^2\ (t \geq 0)$: $t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -1 < 0 -$ не входит в ОДЗ.
Обратная замена: $x^2 = 3$, $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$. Таким образом, наибольший корень уравнения равен $\sqrt{3}$, то есть верен ответ №4.
Ответ: №4.

Задача 2. Найти наибольшее целочисленное решение неравенства

$$(x+3)^2(6-x) \geq 0.$$

1) 6 2) 5 3) -4 4) 0 5) 8

Решение.
Нестрогие неравенства подобного рода лучше представить в виде совокупности уравнения и строгого неравенства:
1) $(x+3)^2(6-x) = 0$, $x = -3$, $x = 6$.
2) $(x+3)^2(6-x) > 0$.
Решим это неравенство методом интервалов, учитывая то, что x = -3 – корень четной кратности:



Итак, решение неравенства: $\boldsymbol{x} \in (-\infty; -3) \cup (-3; 6)$.

Объединяя оба случая, получаем окончательное решение: $\boldsymbol{x} \in (-\infty; 6]$. Следовательно, наибольшее целочисленное решение – число 6 (ответ №1).

Ответ: №1.

Задача 3. Решить уравнение

$$\lg\left(\frac{5}{2}\boldsymbol{x}+3\right) = 2\lg \boldsymbol{x} - \lg 2.$$

Решение.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} \frac{5}{2}\boldsymbol{x}+3>0 \\ \boldsymbol{x}>0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}>0.$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$\lg\left(\frac{5}{2}\boldsymbol{x}+3\right) + \lg 2 = \lg \boldsymbol{x}^2, \quad \lg(5\boldsymbol{x}+6) = \lg \boldsymbol{x}^2,$

$\boldsymbol{x}^2 - 5\boldsymbol{x} - 6 = 0, \quad \boldsymbol{x}_1 = 6, \quad \boldsymbol{x}_2 = -1 < 0 \notin ОДЗ.$

Следовательно, единственный корень уравнения: $x = 6$, то есть верен ответ №1.

Ответ: №1.

Задача 4. Вычислить значение выражения

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+2\right).$$

1) 5 2) 6 3) 7 4) -2 5) 1

Решение.

$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+2\right) = \sqrt{(7-4\sqrt{3})\left(\sqrt{3}+2\right)^2} = \sqrt{(7-4\sqrt{3})\left(3+4\sqrt{3}+4\right)} =$

$= \sqrt{(7-4\sqrt{3})\left(7+4\sqrt{3}\right)} = \sqrt{7^2-(4\sqrt{3})^2} = \sqrt{49-48} = \sqrt{1} = 1.$

Таким образом, верен ответ №5.

Ответ: №5.

Задача 5. Найти сумму корней уравнения на заданном промежутке

$$\boldsymbol{ctg}5\boldsymbol{x} = \boldsymbol{ctgx}, \quad \boldsymbol{x} \in \left[\frac{p}{2}; p\right].$$

1) $\frac{p}{2}$ 2) $\frac{5}{4}p$ 3) p 4) $\frac{3}{4}p$ 5) $\frac{p}{4}$

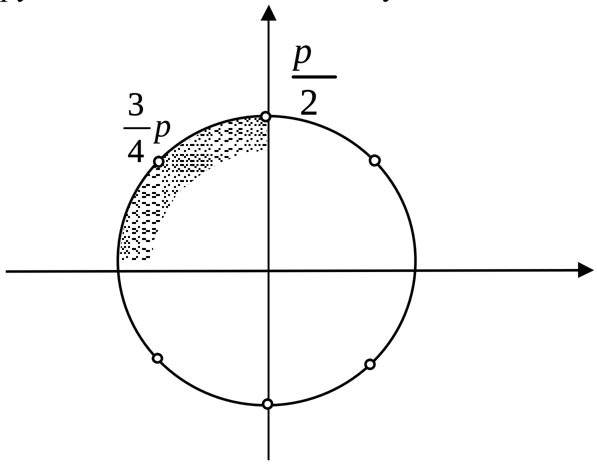
Решение.

Представим уравнение в виде:

$$\frac{\cos 5\boldsymbol{x}}{\sin 5\boldsymbol{x}}=\frac{\cos \boldsymbol{x}}{\sin \boldsymbol{x}} \Rightarrow \begin{cases} \cos 5\boldsymbol{x}\sin \boldsymbol{x}-\sin 5\boldsymbol{x}\cos \boldsymbol{x}=0 \\ \sin \boldsymbol{x}\neq 0 \\ \sin 5\boldsymbol{x}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 4\boldsymbol{x}=0 \\ \sin \boldsymbol{x}\neq 0 \\ \sin 5\boldsymbol{x}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\boldsymbol{x}\cos 2\boldsymbol{x}=0 \\ \sin \boldsymbol{x}\neq 0 \\ \sin 5\boldsymbol{x}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\sin \boldsymbol{x}\cos \boldsymbol{x}\cos 2\boldsymbol{x}=0 \\ \sin \boldsymbol{x}\neq 0 \\ \sin 5\boldsymbol{x}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos \boldsymbol{x}=0 \\ \cos 2\boldsymbol{x}=0 \end{array} \right.$$

Корни этих простейших уравнений: $\boldsymbol{x}=\frac{p}{2}+p\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{x}=\frac{p}{4}+\frac{p\boldsymbol{n}}{2}$. Изобразим на тригонометрической окружности точки, соответствующие найденным значениям *x*:



Видим, что на заданный промежуток попали два корня: $\frac{p}{2}$ и $\frac{3}{4}p$. Их сумма равна $\frac{5}{4}p$ (ответ №2).

Ответ: №2.

Задача 6. Решить неравенство

$$|\boldsymbol{x}|^{2x^2-1}\leq|\boldsymbol{x}|.$$

1) {1} 2) {$\pm$1} 3) (-∞; -1) 4) (-2; 2) 5) {2}

Решение.

Отметим, что $x = 0$ не является решением неравенства, так как 0^{-1} не существует, а при $x \neq 0$ неравенство является простейшим показательным. Рассмотрим отдельно три случая:

1) $\begin{cases} 0<|\boldsymbol{x}|<1 \\ 2\boldsymbol{x}^2-1\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<\boldsymbol{x}<0,\ 0<\boldsymbol{x}<1 \\ \boldsymbol{x}^2-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<\boldsymbol{x}<0,\ 0<\boldsymbol{x}<1 \\ \boldsymbol{x}\leq -1,\ \boldsymbol{x}\geq 1 \end{cases} -$ решений нет.

2) $|\boldsymbol{x}|=1 \Rightarrow 1^{2-1}\leq 1-$ верно, то есть $x = \pm 1$ – решение неравенства.

3) $\begin{cases} |\boldsymbol{x}|>1 \\ 2\boldsymbol{x}^2-1\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}<-1,\ \boldsymbol{x}>1 \\ -1\leq \boldsymbol{x}\leq 1 \end{cases} -$ решений нет.

Следовательно, решением неравенства являются только два числа: 1 и -1, и верен ответ №2.

Ответ: №2.

Задача 7. При каких значениях k уравнение

$$3^{-\boldsymbol{x}^2+2|\boldsymbol{x}|-2}=\boldsymbol{k}$$

имеет 3 решения?

1) $\frac{1}{27}$ 2) $\frac{1}{18}$ 3) $\frac{1}{15}$ 4) $\frac{1}{9}$ 5) $\frac{1}{3}$

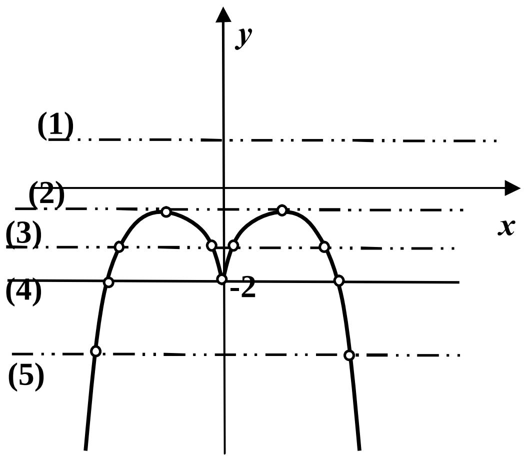
Решение.

Очевидно, что при $k \le 0$ уравнение не имеет решений, так как его левая часть может принимать только положительные значения. При $k > 0$ уравнение можно преобразовать к виду:

$$-x^2 + 2|x| - 2 = \log_3 k.$$

Построим график левой части полученного уравнения:

$$y = -x^2 + 2|x| - 2 = \begin{cases} -x^2 + 2x - 2, & x \ge 0 \\ -x^2 - 2x - 2, & x \le 0 \end{cases}.$$



На этом же графике построим прямые $y = \log_3 k$, параллельные оси Ox. Видим, что количество общих точек такой прямой и графика функции $y = -x^2 + 2|x| - 2$, то есть число корней уравнения, может равняться двум (прямые (2) и (5)), четырем (прямая (3)); графики могут вообще не иметь общих точек (прямая (1)), но три общие точки (соответственно три корня) имеются только в случае, когда прямая проходит через точку излома модульно графика, то есть точку (0; -2). Тогда

$$\log_3 k = -2, \quad k = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Значит, верен ответ №4.

Ответ: №4.