Занятие 10

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
(часть 3)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

9. Иррациональные тригонометрические уравнения

При решении таких уравнений используются те же приемы, что и при решении алгебраических иррациональных уравнений. Особое внимание требуется обращать на дополнительные ограничения на допустимые значения неизвестного (самая распространенная ошибка в задачах этого типа – включение в ответ посторонних корней).

Пример 1. $\sqrt{\frac{16}{25}+\cos^2 2x} = \sin 2x - \frac{1}{5}$.

ОДЗ задается неравенством: $\sin 2x - \frac{1}{5} \geq 0$, $\sin 2x \geq \frac{1}{5}$. Возведем обе части в квадрат:

$\frac{16}{25}+\cos^2 2x = \sin^2 2x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{25}$, $\frac{16}{25}+1-\sin^2 2x = \sin^2 2x - \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{25}$.

Замена $t = \sin 2x$ $\left(\frac{1}{5} \leq t \leq 1\right)$ приводит к уравнению $\frac{16}{25}+1-t^2 = t^2 - \frac{2}{5}t + \frac{1}{25}$,

$5t^2 - t - 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{4}{5} < \frac{1}{5}$ – посторонний корень. Обратная замена: $\sin 2x = 1$,

$x = \frac{p}{4} + pn.$

Ответ: $\frac{p}{4} + pn.$

Пример 2. $\sqrt{1+\sin 6x} = 3 - 2(\sin 3x + \cos 3x)$.

Обратим внимание на то, что подкоренное выражение представляет собой полный квадрат: $1 + \sin 6x = (\sin 3x + \cos 3x)^2$, следовательно, $\sqrt{1+\sin 6x} = |\sin 3x + \cos 3x|$.

Сделаем замену: $t = \sin 3x + \cos 3x$, тогда $|t| = 3 - 2t$.

А) $\begin{cases} t \geq 0 \\ t = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = 1.$

Б) $\begin{cases} t < 0 \\ -t = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = 3$ - посторонний корень (не соответствует условию раскрытия модуля).

Итак, $\sin 3x + \cos 3x = 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\left(3x + \frac{p}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$x = -\frac{p}{12} + (-1)^n \frac{p}{12} + \frac{pn}{3}.$

Ответ: $-\frac{p}{12} + (-1)^n \frac{p}{12} + \frac{pn}{3}.$

Пример 3. $(\cos 2x + 7\cos x - 3)\sqrt{tgx + \frac{1}{99}} = 0.$

Ограничение на ОДЗ: $\text{tg}\, x + \frac{1}{99} \geq 0$, то есть $\text{tg}\, x \geq -\frac{1}{99}$. Учитывая это условие, приравняем каждый множитель к нулю.

А) $\cos 2x + 7\cos x - 3 = 0$, $2\cos^2 x - 1 + 7\cos x - 3 = 0$, $t = \cos x$, $2t^2 + 7t - 4 = 0$,

$t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -4 < -1 -$ посторонний корень. Следовательно, $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ tgx \geq -\frac{1}{99} \end{cases}$. Этим условиям

удовлетворяют углы вида $\frac{p}{3} + 2pn$ (вторая группа решений тригонометрического

уравнения: $-\frac{p}{3} + 2pn$ определяет углы, лежащие в четвертой четверти, тангенс которых

равен $-\sqrt{3} < -\frac{1}{99}$).

Б) $tgx + \frac{1}{99} = 0$, $tgx = -\frac{1}{99}$, $x = -arctg\,\frac{1}{99} + pn.$

Ответ: $\frac{p}{3} + 2pn$; $-arctg\,\frac{1}{99} + pn.$

10. Тригонометрические уравнения с модулями.

Вновь отметим, что для решения таких уравнений применяются те же приемы, что и для алгебраических уравнений с модулями.

Пример 4. $\sin 3x + |\sin x| = 0$.

А) $\sin x \geq 0$, $\sin 3x + \sin x = 0$, $2\sin 2x \cos x = 0$, $4\sin x \cos^2 x = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$.

2) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{p}{2} + 2pn.$

Б) $\sin x < 0$, $\sin 3x - \sin x = 0$, $2\sin x \cos 2x = 0$, $2\sin x\,(1 - 2\sin^2 x) = 0$.

1) $\sin x = 0$ – не соответствует условию раскрытия модуля.

2) $\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\frac{p}{4} + pn.$

Ответ: pn; $\frac{p}{2} + 2pn$; $(-1)^{n+1}\frac{p}{4} + pn.$

Пример 5. $|\sin 12x| + |\sin 18x| = 0$.

Сумма модулей может равняться нулю только в том случае, если при одном и том же значении x оба подмодульных выражения равны нулю. Следовательно, нужно найти общие корни двух уравнений: $\begin{cases} \sin 12x = 0 \\ \sin 18x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{pn}{12} \\ x = \frac{pk}{18} \end{cases}$ $(n, k \in Z)$. Принципиально важно то, что в решениях указаны разные целочисленные параметры. Для общих корней должно выполняться равенство $\frac{pn}{12} = \frac{pk}{18}$, откуда $n = \frac{2k}{3}$. Поскольку n – целое число, дробь $\frac{2k}{3}$ должна быть сократимой, а это возможно только если k кратно трем, то есть $k = 3m$, $m \in Z$. Тогда решение уравнения можно записать так:

$x = \frac{p \cdot 3m}{18} = \frac{pm}{6}$.

Ответ: $\frac{pm}{6}$.

11. Тригонометрические уравнения с конечным числом корней.

Эти уравнения очень необычны, и конечное число решений связано с тем, что аргумент тригонометрической функции принимает значения из некоторого конечного промежутка.

Пример 6. $\sin\frac{5}{25x^2+1} = 0.$

Найдем множество значений функции $f(x) = \frac{5}{25x^2+1}$. Очевидно, что $f(x) > 0.$

Исследуем ее на экстремум. $f'(x) = -\frac{250x}{(25x^2+1)} = 0$ при $x = 0$ – найдена критическая точка. Слева от нее $f'(x) > 0,$ справа $f'(x) < 0,$ то есть это точка максимума. Так как он является единственным экстремумом, то при $x = 0$ функция принимает свое наибольшее значение: $f(0) = 5$. Следовательно, $0 < \frac{5}{25x^2+1} \le 5.$

Решим простейшее тригонометрическое уравнение: $\frac{5}{25x^2+1} = pn.$ Из предыдущего исследования получаем, что равенство возможно только при условии $0 < pn \le 5,$ откуда $\begin{cases} 0 < n \le \frac{5}{p} \\ n \in Z \end{cases} \Rightarrow n = 1.$ Действительно, это единственное целочисленное решение такого неравенства. Тогда $\frac{5}{25x^2+1} = p$, $x^2 = \frac{5-p}{25p}$, $x = \pm\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-p}{p}}$.

Ответ: $\pm\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-p}{p}}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Вновь перед нами комбинированные задачи, в которых применяются известные из алгебры методы решения систем и способы решения тригонометрических уравнений. Важно помнить, что при решении системы ответ каждого простейшего уравнения должен записываться с новым целочисленным параметром, который может принимать любое возможное значение независимо от ранее введенных параметров.

Пример 7. $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}.$

Применим метод алгебраического сложения: перейдем к системе, уравнениями которой будут сумма и разность исходных уравнений.

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\cos x\sin y=\dfrac{1}{2} \\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x+y)=\dfrac{1}{2} \\ \sin(x-y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=(-1)^n\dfrac{p}{6}+pn \\ x-y=pk \end{cases} \quad (n,k\in Z).$$

Вновь сложим и вычтем полученные уравнения:

$$\begin{cases} 2x=(-1)^n\dfrac{p}{6}+p(n+k) \\ 2y=(-1)^n\dfrac{p}{6}+p(n-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(-1)^n\dfrac{p}{12}+\dfrac{p}{2}(n+k) \\ y=(-1)^n\dfrac{p}{12}+\dfrac{p}{2}(n-k) \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=(-1)^n\dfrac{p}{12}+\dfrac{p}{2}(n+k) \\ y=(-1)^n\dfrac{p}{12}+\dfrac{p}{2}(n-k) \end{cases}.$

Пример 8. $\begin{cases} \dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{3}{\sin^2 2y}=2 \\ x+y=\dfrac{p}{2} \end{cases}$**.**

Используем подстановку из второго уравнения: $\begin{cases} y=\dfrac{p}{2}-x \\ \dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{3}{\sin^2(p-2x)}=2 \end{cases}$. Применим формулу приведения: $\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{3}{\sin^2 2x}=2,\ \dfrac{1}{\sin^2 2x}=2,\ \sin^2 2x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{1}{2},$ $\cos 4x=0,\ x=\dfrac{p}{8}+\dfrac{pn}{4},\ \ y=\dfrac{p}{2}-x=\dfrac{3p}{8}-\dfrac{pn}{4}.$

Ответ: $\begin{cases} x=\dfrac{p}{8}+\dfrac{pn}{4} \\ y=\dfrac{3p}{8}-\dfrac{pn}{4} \end{cases}.$

Пример 9. $\begin{cases} \cos^2 4x+\cos^2 2y=1 \\ \cos^2 4x+\cos^2 4y=1 \end{cases}.$

Вычтем первое уравнение из второго и применим формулу $\cos^2 2y=\dfrac{1+\cos 4y}{2}$:

$\cos^2 4y-\dfrac{1+\cos 4y}{2}=0,\ t=\cos 4y:\ t^2-\dfrac{1+t}{2}=0,\ 2t^2-t-1=0,\ t_1=1,\ t_2=-\dfrac{1}{2}.$

А) $\cos 4y = 1$, тогда из второго уравнения $\cos^2 4x = 0$, то есть $\cos 4x = 0$. Получена система двух простейших уравнений: $\begin{cases} \cos 4x=0 \\ \cos 4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{p}{8}+\dfrac{pn}{4} \\ y=\dfrac{pk}{2} \end{cases} \quad (n,k\in Z).$

Б) $\cos 4y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \cos^2 4x=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \dfrac{1+\cos 8x}{2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \cos 8x=\dfrac{1}{2}.$ Решая полученную систему простейших уравнений, находим вторую группу корней:

$$\begin{cases} \cos 8x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 4y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{p}{24} + \dfrac{pn}{4} \\ y = \pm\dfrac{p}{6} + \dfrac{pk}{2} \end{cases}.$$

Еще раз напомним, что решение каждого уравнения системы содержит свой целочисленный параметр (решением будет каждая пара чисел, заданная полученными формулами, в которых мы можем задавать n и k любые целые значения, не обязательно одинаковые).

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{p}{8} + \dfrac{pn}{4} \\ y = \dfrac{pk}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pm\dfrac{p}{24} + \dfrac{pn}{4} \\ y = \pm\dfrac{p}{6} + \dfrac{pk}{2} \end{cases}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x} + \sin x - \cos x = 0$
2. $\sqrt{tg^2 x + 1} = 6 - \dfrac{2}{\cos x}$
3. $(\cos 2x + 3\cos x - 1)\sqrt{\sin x + \dfrac{1}{100}} = 0$
4. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$
5. $|\sin 10x| + |\sin 4x| = 0$
6. $\sin\sqrt{px - x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
7. $\sin\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$
8. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$
9. $\begin{cases} x + y = -\dfrac{p}{6} \\ \sin 2x + \sin 2y = 5 - 4\cos^2(x - y) \end{cases}$
10. $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

Ответы

1) $(-1)^n \dfrac{p}{4} + \dfrac{p}{4} + pn$ 2) $\pm\dfrac{p}{3} + 2pn$ 3) $\dfrac{p}{3} + 2pn;\ (-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{100} + pn$

4) $-\dfrac{p}{4} + pn;\ pn$ 5) $\dfrac{pn}{2}$ 6) $\dfrac{p}{4}(2 \pm \sqrt{3})$ 7) $\dfrac{6 \pm \sqrt{36 - p^2}}{p}$

8) $\begin{cases} x = \pm\dfrac{p}{12} + \dfrac{p}{4} + \dfrac{p}{2}(n+k) \\ y = \pm\dfrac{p}{12} + \dfrac{p}{4} + \dfrac{p}{2}(n-k) \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = \dfrac{5p}{12} + pn \\ y = -\dfrac{7p}{12} - pn \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = \pm\dfrac{3p}{4} + 2pn \\ y = (-1)^k \dfrac{p}{6} + pk \end{cases}$