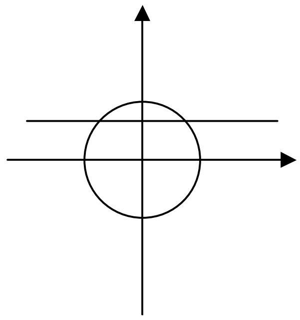
Занятие 11

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решением тригонометрического неравенства обычно является набор промежутков, границы которых можно задать общей формулой с использованием целочисленного параметра. Для определения границ очень удобно применять тригонометрическую окружность.

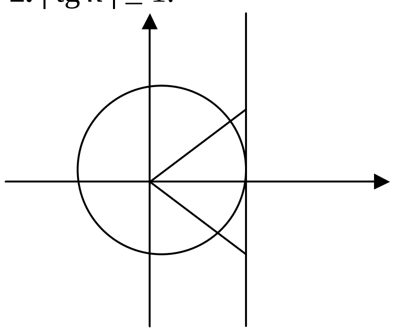
Пример 1. $\sin\left(3x-\frac{p}{5}\right)\le\frac{1}{2}$.

Решим сначала простейшее тригонометрическое неравенство $\sin t\le\frac{1}{2}$, где $t=3x-\frac{p}{5}$.



Прямая $y=\frac{1}{2}$ делит тригонометрическую окружность на две дуги. Решениям неравенства соответствуют точки на нижней дуге, ординаты которых не больше ½ . Поэтому в пределах от $\frac{p}{2}$ до $\frac{5p}{2}$ решение имеет вид: $\frac{5p}{6}\le t\le\frac{13p}{6}$. Границы следующего промежутка решений можно получить отсюда, изменив каждую границу на $2\pi n$:
$\frac{5p}{6}+2pn\le t\le\frac{13p}{6}+2pn$. Сделав обратную замену, получим двойное неравенство для x:
$\frac{5p}{6}+2pn\le 3x-\frac{p}{5}\le\frac{13p}{6}+2pn,\ \ \frac{5p}{6}+\frac{p}{5}+2pn\le 3x\le\frac{13p}{6}+\frac{p}{5}+2pn,$
$\frac{31p}{90}+\frac{2pn}{3}\le x\le\frac{71p}{90}+\frac{2pn}{3}$.
Ответ: $\frac{31p}{90}+\frac{2pn}{3}\le x\le\frac{71p}{90}+\frac{2pn}{3}$.

Пример 2. $|\operatorname{tg} x|\ge 1$.



Наименьший положительный период тангенса равен π, поэтому достаточно найти решение неравенства на интервале $\left(-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right)$, а затем прибавить к границам πn. Раскрыв модуль, превратим неравенство в совокупность двух неравенств: $\left[\begin{array}{l} tgx \ge 1 \\ tgx \le -1 \end{array}\right.$.

Дуги окружности, соответствующие их решениям, имеют вид: $\left(-\frac{p}{2};-\frac{p}{4}\right] \cup \left[\frac{p}{4};\frac{p}{2}\right)$.

Обращаем внимание на то, что точки $\pm\frac{p}{2}$ не входят в решение, поскольку при этих значениях аргумента тангенс не существует. Учитывая периодичность, находим окончательное решение: $-\frac{p}{2}+pn < x \le -\frac{p}{4}+pn;\ \frac{p}{4}+pn \le x < \frac{p}{2}+pn.$

Ответ: $-\frac{p}{2}+pn < x \le -\frac{p}{4}+pn;\ \frac{p}{4}+pn \le x < \frac{p}{2}+pn.$

В более сложных неравенствах для их сведения к простейшим применяются в основном те же приемы, что и при решении уравнений.

Пример 3. $\cos 2x-(2+\sqrt{2})\sin x-1-\sqrt{2} \le 0.$

Представим cos 2x = 1 – 2sin^2 x и сделаем замену: t = sin x. Тогда для t требуется решить систему неравенств $\left\{\begin{array}{c} -1 \le t \le 1 \\ 2t^2+(2+\sqrt{2})t+\sqrt{2} \ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 \le t \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ t \ge -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow t=-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 1.$

Обратная замена приводит к уравнению sin x = -1, откуда $x=-\frac{p}{2}+2pn,$ и неравенству

$\sin x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2},$ решение которого: $-\frac{p}{4}+2pn \le x \le \frac{5p}{4}+2pn.$

Ответ: $x=-\frac{p}{2}+2pn,\ -\frac{p}{4}+2pn \le x \le \frac{5p}{4}+2pn.$

Пример 4. 2sin^3 2x + 3sin 2x ≤ tg x + ctg x.

Используем то, что tg x + ctg x = $\frac{2}{\sin 2x}$ (см. занятие 9), и сделаем замену: t = sin 2x.

Неравенство для t имеет вид: $2t^3+3t \le \frac{2}{t},\ \frac{2t^4+3t^2-2}{t} \le 0,\ \frac{(t^2+2)(2t^2-1)}{t} \le 0.$

Методом интервалов находим решение: $t \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 < t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Проводим обратную замену и решаем полученные тригонометрические неравенства:

А) $\sin 2x \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{5p}{4}+2pn \le 2x \le \frac{7p}{4}+2pn,\ \frac{5p}{8}+pn \le x \le \frac{7p}{8}+pn.$

Б) $0 < \sin 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 2pn < 2x \le \frac{p}{4}+2pn \\ \frac{3p}{4}+2pn \le 2x < p+2pn \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} pn < x \le \frac{p}{8}+pn \\ \frac{3p}{8}+pn \le x < \frac{p}{2}+pn \end{array}\right..$

Ответом будет объединение полученных промежутков.

Ответ: $\left(pn; \frac{p}{8}+pn\right] \cup \left[\frac{3p}{8}+pn\right) \cup \left[\frac{5p}{8}+pn; \frac{7p}{8}+pn\right]$.

Пример 5. $\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x} \ge 7-6\sqrt{\frac{1}{\cos^2 2x}-1}$.

Преобразуем обе части неравенства:

А) $\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x} = \frac{2\sin^2 2x}{2\cos^2 2x} = tg^2 2x = |tg 2x|^2$;

Б) $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 2x}-1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}} = |tg 2x|$.

Сделаем замену: $t = |\operatorname{tg} 2x|$: $\begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 \ge 7-6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2+6t-7 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t \ge 1 \\ t \le -7 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow t \ge 1.$

Следовательно, $|\operatorname{tg} 2x| \ge 1$, откуда (см. пример 2)

$-\frac{p}{4}+\frac{pn}{2} < x \le -\frac{p}{8}+\frac{pn}{2}$; $\frac{p}{8}+\frac{pn}{2} \le x < \frac{p}{4}+\frac{pn}{2}$.

Ответ: $-\frac{p}{4}+\frac{pn}{2} < x \le -\frac{p}{8}+\frac{pn}{2}$; $\frac{p}{8}+\frac{pn}{2} \le x < \frac{p}{4}+\frac{pn}{2}$.

Пример 6. $|\sin x|+|\cos x| < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, можно возвести их в квадрат:

$\sin^2 x + 2|\sin x \cos x| + \cos^2 x < \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, или $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Еще раз возведем обе части в квадрат: $\sin^2 2x < \frac{3}{4}$, $\frac{1-\cos 4x}{2} < \frac{3}{4}$, $\cos 4x > -\frac{1}{2}$. Получено простейшее тригонометрическое неравенство, решение которого: $-\frac{2p}{3}+2pn < 4x < \frac{2p}{3}+2pn$,

$-\frac{p}{6}+\frac{pn}{2} < x < \frac{p}{6}+\frac{pn}{2}$.

Ответ: $-\frac{p}{6}+\frac{pn}{2} < x < \frac{p}{6}+\frac{pn}{2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\left|\cos 2x + \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$
2. $\cos 2x - (2+\sqrt{3})\cos x + 1 + \sqrt{3} \ge 0$
3. $|\sin x| + |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $9\sqrt{1-\cos 12x} > 4\cos^4 3x + 4\sin^4 3x + 2$
5. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x < 0$
6. $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x \ge 0$
7. $1 + \sin 2x > \sin x - \cos x$
8. $4\sin^2 x + 4\cos^2 x \le 2 - \cos 4x$
9. $\left|\sin 5x - \frac{1}{4}\right| \ge \frac{3}{4}$
10. $2\sin^3 2x + 7\sin 2x \le 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$

Ответы

1) $\left(\frac{p}{3}+pn;\frac{p}{2}+pn\right)\cup\left(\frac{p}{2}+pn;\frac{2p}{3}+pn\right)$ 2) $\left[\frac{p}{6}+2pn;\frac{11p}{6}+2pn\right], x=2pn$

3) $\left(-\frac{p}{12}+\frac{pn}{2};\frac{p}{12}+\frac{pn}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{p}{24}+\frac{pn}{6};\frac{p}{8}+\frac{pn}{6}\right)$ 5) $\left(-\frac{p}{2}+pn;pn\right)\cup\left(\frac{p}{4}+pn;\frac{p}{2}+pn\right)$

6) $\left(-\frac{p}{2}+pn;-\frac{p}{4}+pn\right]\cup\left[arctg3+pn;\frac{p}{2}+pn\right)$ 7) $\left(\frac{p}{2}+2pn;2pn\right)$ 8) $\left[\frac{p}{6}+\frac{pn}{2};\frac{p}{3}+\frac{pn}{2}\right]$

9) $x=\frac{p}{10}+\frac{2pn}{5}$, $\left[\frac{7p}{30}+\frac{2pn}{5};\frac{11p}{30}+\frac{2pn}{5}\right]$

10) $\left(2pn;\frac{p}{4}+2pn\right]\cup\left[\frac{3p}{4}+2pn;p+2pn\right)\cup\left[\frac{5p}{4}+2pn;\frac{7p}{4}+2pn\right]$