Занятие 12

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Для выполнения заданий, связанных с обратными тригонометрическими функциями, нужно, во-первых, четко помнить определения этих понятий:

Ø $\alpha = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Ø $\alpha = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a \\ 0 \le \alpha \le \pi \end{cases}$

Ø $\alpha = arctg a \Leftrightarrow \begin{cases} tg\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Ø $\alpha = arcctg a \Leftrightarrow \begin{cases} ctg\alpha = a \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$

Удобно при решении таких задач сделать замену (например, $\alpha = \arcsin x$) и работать с более привычным объектом – углом α, лежащем в первой или четвертой четверти тригонометрического круга, синус которого равен x. При этом выясняется, что задача намного проще, чем казалось вначале.

Пример 1. Вычислить cos(4arctg 5).
Пусть α = arctg 5, тогда tg α = 5. Требуется найти cos 4α. Вычислим вначале cos 2α, используя универсальную подстановку: $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-25}{1+25} = -\frac{12}{13}$. Тогда

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}.$$

Ответ: $\frac{119}{169}$.

Пример 2. Выразить через все обратные функции $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Пусть $\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$. Угол α лежит в четвертой четверти, следовательно, $\cos\alpha > 0$.

Найдем все тригонометрические функции угла α: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$tg\alpha = -\frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $ctg\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. В четвертой четверти находятся арктангенсы отрицательных чисел, поэтому можно утверждать, что $\alpha = arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Но $a \neq \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, так как арккосинусы положительных чисел принадлежат первой четверти. В силу четности косинуса $\cos(-a) = \cos a$, при этом $-a \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$, то есть $-a = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, тогда $a = -\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Арккотангенсы отрицательных чисел расположены во второй четверти. Например, $arcctg\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = a + p$, следовательно, $a = arcctg\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - p$. Таким образом, угол α выражен через все обратные функции.

Ответ: $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} = arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = arcctg\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - p$.

Пример 3. Найти arcsin(sin12).

Требуется найти угол, синус которого равен синусу угла в 12 радиан и который принадлежит промежутку $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$. Заметим, что $3\frac{1}{2}p < 12 < 4p$, поэтому $-\frac{p}{2} < 12 - 4p < 0$.

Поскольку $\sin 12 = \sin(4p + (12 - 4p)) = \sin(12 - 4p)$, угол $12 - 4\pi$ является искомым углом: его синус равен sin12, и он находится в области возможных значений арксинуса.

Ответ: $\arcsin(\sin 12) = 12 - 4\pi$.

Пример 4. Вычислить $\sin\left(\arccos\frac{12}{13} - arctg 7\right)$.

Введем два угла: $a = \arccos\frac{12}{13}$ и $b = arctg 7$. Оба они лежат в первой четверти, значит, все их тригонометрические функции положительны. Мы знаем, что $\cos a = \frac{12}{13}$, $tg b = 7$.

Требуется найти синус суммы этих углов, а для этого нужно знать их синусы и косинусы.

А) $\sin a = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

Б) $\cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 b}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$; $\sin b = tg b \cdot \cos b = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

Тогда $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{79}{65\sqrt{2}}$.

Ответ: $-\frac{79}{65\sqrt{2}}$.

Пример 5. Решить уравнение $6\arcsin(x^2 - 5x + 3{,}5) + p = 0$.

Запишем уравнение в виде: $\arcsin(x^2 - 5x + 3{,}5) = -\frac{p}{6}$, откуда

$x^2 - 5x + 3{,}5 = \sin\left(-\frac{p}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Пример 6. Решить уравнение $2\arcsin\frac{3x}{5} = \arcsin x.$

Зададим ОДЗ: $|\arcsin\frac{3x}{5}| \le \frac{p}{4}$, поскольку $|\arcsin x| \le \frac{p}{2}$. Отсюда следует, что $\left|\frac{3x}{5}\right| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $a = \arcsin\frac{3x}{5}$, тогда $2a = \arcsin x$. Запишем уравнение в виде системы

$$\begin{cases} \sin a = \dfrac{3x}{5} \\ \sin 2a = x \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin 2a} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5\sin a - 3\sin 2a = 0, \ \sin a(5 - 6\cos a) = 0.$$

А) $\sin a = 0,\ \frac{3x}{5} = 0,\ \ x = 0.$

Б) $5 - 6\cos a = 0,\ \cos a = \frac{5}{6},\ \sin a = \pm\sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{6},\ \frac{3x}{5} = \pm\frac{\sqrt{11}}{6},\ \ x = \pm\frac{5\sqrt{11}}{18}$

(ограничение на ОДЗ выполняется).

Ответ: $0;\ \pm\frac{5\sqrt{11}}{18}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить $\cos\left(\frac{1}{4} arctg\,\frac{24}{7}\right)$.
2. Выразить $arcctg(-3)$ через все обратные функции.
3. Найти $\arcsin\left(\sin\frac{13p}{12}\right)$.
4. Найти arccos(sin9).
5. Вычислить $\sin\left(3\arcsin\frac{1}{3}\right)$.
6. Вычислить $\cos(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\left(-\frac{8}{17}\right))$.
7. Вычислить $tg\left(\frac{p}{4} - arctg\,4\right)$.
8. Решить уравнение $4\arcsin x + \arccos x = \pi$.
9. Решить уравнение $5\,\mathrm{arctg}\,x + 3\,\mathrm{arcctg}\,x = 2\pi$.
10. Решить уравнение $4\,\mathrm{arctg}\,(x^2 - 2x - 2) = \pi$.

Ответы

1) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ 2) $arcctg(-3) = p - \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = p + arctg\left(-\frac{1}{3}\right)$

3) $-\frac{p}{12}$ 4) $9 - 2{,}5\,\pi$ 5) $\frac{23}{27}$ 6) $-\frac{77}{85}$ 7) $-\frac{3}{5}$ 8) ½ 9) 1 10) – 1; 3