Занятие 12

УПРОЩЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для выполнения заданий этой группы требуется хорошо знать свойства логарифмов и уметь их применять. Кстати, эта работа очень полезна для подготовки к решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств.
Вспомним основные свойства логарифмов:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$
- $\log_a \left(b^p\right) = p \cdot \log_a |b|$
- $\log_{(a^p)} b = \frac{1}{p} \log_{|a|} b$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(Предполагается, что параметры принимают допустимые значения).
Рассмотрим задания, связанные с упрощением показательных и логарифмических выражений, предлагавшиеся на выпускных экзаменах в школах и в вариантах ЕГЭ, централизованного тестирования и вступительных экзаменов в МАТИ в 2003-2004 годах.

Пример 1. Вычислить $5^{\log_3 90} \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10}$.

$$5^{\log_3 90} \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90} \left(5^{-1}\right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90 - \log_3 10} = 5^{\log_3 9} = 5^2 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 2. Упростить выражение $\sqrt{343^{\frac{2}{3\log_{27} 7}}}$.
Упростим показатель степени подкоренного выражения:

$$\frac{2}{3\log_{27} 7} = \frac{2}{3\log_{3^3} 27} = \frac{2}{3 \cdot \frac{1}{3}\log_3 7} = 2 \cdot \frac{1}{\log_3 7} = 2\log_7 3. \text{ Тогда } \sqrt{343^{\frac{2}{3\log_{27} 7}}} = \sqrt{\left(7^3\right)^{2\log_7 3}} =$$

$$= \sqrt{\left(7^{\log_7 3}\right)^6} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Пример 3. Упростить выражение $\log_{\frac{1}{25}} \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{(9 + 2\sqrt{14})(\sqrt{7} - \sqrt{2})}$.

Вначале упростим логарифмируемое выражение. Если вы уже занимались упрощением алгебраических выражений, то вид первого множителя в знаменателе вызовет

предположение, что перед нами полный квадрат. Действительно,
$9+2\sqrt{14}=7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$. Тогда

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\frac{1}{7-2}=\frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\log_{\frac{1}{25}}\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\log_{5^{-2}}(5^{-1})=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\log_5 5=\frac{1}{2}$.

Ответ: ½ .

Пример 4. Найти значение выражения $\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18}$.

Разделим на знаменатель каждое слагаемое числителя по отдельности:

$$\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18}=\frac{1}{\log_3 18}+\frac{1}{\log_6 18}=\log_{18}3+\log_{18}6=\log_{18}(3\cdot 6)=\log_{18}18=1.$$

Ответ: 1.

Пример 5. Вычислить $\frac{\log_4 28}{\log_{112}4}-\frac{\log_4 7}{\log_{448}4}$.

Перейдем во всех логарифмах к основанию 4:

$\frac{\log_4 28}{\log_{112}4}-\frac{\log_4 7}{\log_{448}4}=\log_4 28\cdot\log_4 112-\log_4 7\cdot\log_4 448$. Теперь разложим на множители логарифмируемые выражения, выделяя в каждом из них множитель вида 4^n:
$28 = 4\cdot 7$, $112 = 16\cdot 7 = 4^2\cdot 7$, $448 = 64\cdot 7 = 4^3\cdot 7$. Продолжим преобразование выражения, используя свойства логарифмов:

$$\log_4(4\cdot 7)\cdot\log_4(4^2\cdot 7)-\log_4 7\cdot\log_4(4^3\cdot 7)=(\log_4 4+\log_4 7)(\log_4 4^2+\log_4 7)-$$
$$-\log_4 7(\log_4 4^3+\log_4 7)=(1+\log_4 7)(2+\log_4 7)-\log_4 7(3+\log_4 7)=$$
$$=2+2\log_4 7+\log_4 7+\log_4^2 7-3\log_4 7-\log_4^2 7=2.$$

Ответ: 2.

Пример 6. Вычислить $\left(2-\log_3\frac{9}{7}\right)\left(1+\log_7\frac{9}{7}\right)$.

Представим числа 2 и 1 в виде: $2=\log_3 3^2=\log_3 9$, $1=\log_7 7$. Тогда

$$\left(\log_3 9-\log_3\frac{9}{7}\right)\left(\log_7 7-\log_7\frac{9}{7}\right)=\log_3\left(9:\frac{9}{7}\right)\log_7\left(7\cdot\frac{9}{7}\right)=\log_3 7\cdot\log_7 9=2\log_3 7\cdot\log_7 3=2.$$

Ответ: 2.

Пример 7. Найти $\log_{175}56$, если $\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$.

Обратим внимание на то, что в каждом логарифме (либо в основании, либо в аргументе) присутствует множитель 7. Поэтому перейдем к основанию 7 во всех логарифмах:

А) $\log_{175}56=\frac{\log_7 56}{\log_7 175}=\frac{\log_7(7\cdot 2^3)}{\log_7(7\cdot 5^2)}=\frac{1+3\log_7 2}{1+2\log_7 5}$. Следовательно, для вычисления этого логарифма нужно знать значения $\log_7 2$ и $\log_7 5$.

Б) $\log_{14}7=\frac{1}{\log_7 14}=\frac{1}{1+\log_7 2}=a\Rightarrow\log_7 2=\frac{1-a}{a}$.

В) $\log_{14} 5 = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 14} = \dfrac{\log_7 5}{\frac{1}{a}} = a\log_7 5 = b \Rightarrow \log_7 5 = \dfrac{b}{a}$.

Подставим найденные значения в преобразованное исходное выражение:

$$\frac{1+3\log_7 2}{1+2\log_7 5} = \frac{1+\frac{3(1-a)}{a}}{1+\frac{2b}{a}} = \frac{3-2a}{a+2b}.$$

Ответ: $\dfrac{3-2a}{a+2b}$.

Пример 8. Известно, что $\log_{bc} \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$ лежит между 8 и 13, а $\log_{bc} b$ принимает целые значения. Найти количество этих значений.

Перейдем в обоих логарифмах к основанию b: $\log_{bc} \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}} = \dfrac{1}{3}\log_{bc} b - \dfrac{1}{2}\log_{bc} c =$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\log_b bc} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\log_b c}{\log_b bc} = \dfrac{1}{3(1+\log_b c)} - \dfrac{\log_b c}{2(1+\log_b c)} = \dfrac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)}$. Решая методом интервалов неравенство $8 \le \dfrac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)} \le 13$, получаем: $-\dfrac{76}{81} \le \log_b c \le -\dfrac{46}{51}$.

Прибавим 1 ко всем частям неравенства: $\dfrac{5}{81} \le 1+\log_b c \le \dfrac{5}{51}$. Поскольку

$\log_{bc} b = \dfrac{1}{\log_b bc} = \dfrac{1}{1+\log_b c}$, его значения задаются неравенством:

$\dfrac{51}{5} \le \log_{bc} b \le \dfrac{81}{5}$, или $10\dfrac{1}{5} \le \log_{bc} b \le 16\dfrac{1}{5}$. Следовательно, $\log_{bc} b$ может принимать 6 целых значений – от 11 до 16.

Ответ: 6.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить:

1. $11^{\log_6 72}\left(\dfrac{1}{11}\right)^{\log_6 2}$ 2. $\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \dfrac{\log_3 8}{\log_{216} 3}$ 3. $\dfrac{\log_7 35\cdot\log_5 35}{\log_7 35+\log_5 35+2}$

4. $\log_4 6\cdot\log_6 8\cdot\log_8 11\cdot\log_{11} 256$ 5. $(\log_{15} 3+\log_{15} 5+5^{\log_5 7})^{\log_2 5}$

6. $2^{\sqrt{\log_2 20}} - 20^{\sqrt{\log_{20} 2}}$ 7. $\dfrac{23^{\log_7 5}\cdot 7^{\log_5 23}\cdot 5^{\log_{23} 7}}{23^{\log_5 7}\cdot 7^{\log_{23} 5}\cdot 5^{\log_7 23}}$ 8. $\log_{\sqrt{2}}(8\sin\dfrac{p}{12}) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\dfrac{p}{12})$

9. Найти значение выражения $\log_{24} 252$, если $\log_{21} 14 = a$, $\log_6 7 = b$.

10. Найти значение выражения $\log_{a\sqrt{b}}(a^3\sqrt[5]{b})$, если $\log_{\frac{a}{b^2}}\left(b\sqrt{ab}\right) = 3$.

Ответы

1) 121 2) 2 3) 1 4) 4 5) 125 6) 0 7) 1 8) 2 9) $\dfrac{2a+b+ab+2}{3a-2b+2ab+1}$ 10) $\dfrac{92}{35}$