Занятие 14

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Для решения показательного уравнения его нужно свести к простейшему уравнению вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, откуда следует, что $f(x) = g(x)$. Иногда такое преобразование можно провести непосредственно, в других случаях требуется предварительно сделать замену переменной.

Пример 1. $0{,}125 \cdot \sqrt[3]{4^{3x-2}} = \dfrac{256}{0{,}5^x}$.

Представим обе части равенства в виде степеней с основанием 2:

$2^{-3} \cdot \left(2^{6x-4}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^8 : 2^{-x}$, $2^{-3+2x-\frac{4}{3}} = 2^{8+x}$, $-\dfrac{13}{3} + 2x = 8 + x$, $x = 12\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $12\dfrac{1}{3}$.

Пример 2. $4^{x+2} + 2 \cdot 4^x - 5^{x+2} = 5 \cdot 5^x$.
Поменяем порядок слагаемых: $4^{x+2} + 2 \cdot 4^x = 5^{x+2} + 5 \cdot 5^x$, $4^x\,(16 + 2) = 5^x\,(25+5)$,

$18 \cdot 4^x = 30 \cdot 5^x$, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x = \dfrac{30}{18} = \dfrac{5}{3} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{4}{5}}\frac{5}{3}}$, $x = \log_{\frac{4}{5}} \dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\log_{\frac{4}{5}} \dfrac{5}{3}$.

Пример 3. $2^{x+4} \cdot 3^x = 576$.
Преобразуем левую часть: $16 \cdot (2^x \cdot 3^x) = 576$ и разделим обе части на 16: $6^x = 36$, $x = 2$.
Ответ: 2.

Пример 4. $4^{x+\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{x+2} - 40 = 0$.
Запишем уравнение в виде: $2 \cdot 2^{2x} + 16 \cdot 2^x - 40 = 0$ и сделаем замену: $t = 2^x$ ($t > 0$). Тогда $2t^2 + 16t - 40 = 0$, $t^2 + 8t - 20 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -10 < 0$ – посторонний корень. Обратная замена: $2^x = 2$, $x = 1$.
Ответ: 1.

Пример 5. $2^{2x} - 8 \cdot 5^{2x} + 2 \cdot 10^x = 0$.
Если записать левую часть так: $4^x - 8 \cdot 25^x + 2 \cdot 10^x = 0$, то можно заметить, что основания степеней (числа 4, 10, 25) образуют геометрическую прогрессию. В этом случае можно разделить обе части равенства, например, на 25^x (поскольку ни при каком x это выражение не равно нулю) и получить уравнение $\left(\dfrac{4}{25}\right)^x + 2 \cdot \left(\dfrac{10}{25}\right)^x - 8 = 0$, или

$5 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^x - 8 = 0$. Замена $t = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$ $(t > 0)$ приводит к уравнению $t^2 + 2t - 8 = 0$,

$t_1 = 2$, $t_2 = -4 < 0$ – посторонний корень. Следовательно, $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 2$, $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Ответ: $\log_{\frac{2}{5}} 2$.

Пример 6. $12x \cdot 4^x - 5x \cdot 2^{x+1} - 9 \cdot 4^{x+1} + 30 \cdot 2^x = 0$.

Разложим левую часть на множители: $2^x(2x(6 \cdot 2^x - 5) - 6(6 \cdot 2^x - 5)) = 0$,

$2^x(2x - 36)(6 \cdot 2^x - 5) = 0$. Первый множитель никогда не равен нулю, поэтому ответом будут корни уравнений:

А) $2x - 6 = 0$, $x = 3$.

Б) $6 \cdot 2^x - 5 = 0$, $2^x = \frac{5}{6}$, $x = \log_2 \frac{5}{6}$.

Ответ: 3; $\log_2 \frac{5}{6}$.

Пример 7. $\left|3^x + \frac{17}{9}\right| + \left|3^x - \frac{1}{9}\right| = 2$.

Заметим, что первое подмодульное выражение положительно при любом x, то есть его модуль равен подмодульному выражению. Рассмотрим две возможности для знака второго подмодульного выражения:

А) $3^x - \frac{1}{9} \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Тогда $3^x + \frac{17}{9} + 3^x - \frac{1}{9} = 2$, $2 \cdot 3^x = \frac{2}{9}$, $3^x = \frac{1}{9}$, $x = -2$.

Б) $3^x - \frac{1}{9} < 0 \Rightarrow x < -2$. При этом $3^x + \frac{17}{9} - 3^x + \frac{1}{9} = 2$, $2 = 2$ – тождество, следовательно, любое значение $x < -2$ является решением уравнения.

Ответ: $x \leq -2$.

Пример 8. $|x - 5|^{4x^2 - 23x + 15} = 1$.

При решении этого уравнения важно не забыть, что равенство будет верным не только в случае, когда показатель степени равен 0, но и тогда, когда основание степени в левой части равно 1, так как при возведении 1 в любую степень мы получим 1. Кроме того, ОДЗ определяется условием: $x - 5 \neq 0$, то есть $x \neq 5$.

А) $\begin{cases} 4x^2 - 23x + 15 = 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \ x_2 = \frac{3}{4} \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$.

Б) $|x - 5| = 1$, $x - 5 = \pm 1$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.

Ответ: 4; 6; $\frac{3}{4}$.

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \ a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, \ a^{f(x)} < a^{g(x)}, \ a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \ (a > 0).$$

Важно помнить при этом, что при $a > 1$ можно перейти к неравенству, связывающему показатели степеней, знак которого совпадает со знаком исходного неравенства; при $0 < a < 1$ показатели будут связаны неравенством противоположного знака.

Пример 8. $1024^x < \left(\frac{1}{16}\right)^{x^2 + 2x + \frac{9}{2}}$.

Представим обе части неравенства как степени с основанием 2:

$2^{10x} < \left(2^{-4}\right)^{x^2 + 2x + \frac{9}{2}}$, $2^{10x} < 2^{-4x^2 - 8x - 18}$, $10x < -4x^2 - 8x - 18$, $4x^2 + 18x + 8x < 0$, $-3 < x < -\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-3;-\dfrac{3}{2}.\right)$

Пример 9. $3^x - 12 < -\dfrac{70}{3^x + 7}$.

После замены $t = 3^x$ решим систему неравенств: $\begin{cases} t > 0 \\ t - 12 < -\dfrac{70}{t+7} \end{cases}$. Поскольку знаменатель дроби в правой части второго неравенства при $t > 0$ положителен, можно умножить на него обе части неравенства, превратив его в квадратное: $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 5t - 14 < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t < 7$.

Сделаем обратную замену: $0 < 3^x < 7$, $x < \log_3 7$ (левая часть неравенства верна при любом x).

Ответ: $(-\infty; \log_3 7)$.

Пример 10. $3^{x^2-6x+8} > 5^{x-2}$.

Перейдем к основанию 3: $3^{x^2-6x+8} > \left(3^{\log_3 5}\right)^{x-2}$, $x^2 - 6x + 8 > \log_3 5 \cdot (x-2)$,

$(x-2)(x-4) > \log_3 5 \cdot (x-2)$, $(x-2)(x-4-\log_3 5) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 4 + \log_3 5 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty;2) \cup (4 + \log_3 5; +\infty)$.

Пример 11. $16 \cdot 5^x - 20^x + 4^x > 16$.

Перенесем все слагаемые в левую часть и разложим ее на множители:
$(16 - 4^x)(5^x - 1) > 0$. Найдем корни левой части неравенства:
А) $16 - 4^x = 0$, $x = 2$;
Б) $5^x - 1 = 0$, $x = 0$.
Решим неравенство методом интервалов: – + –

Итак, $0 < x < 2$.
Ответ: (0; 2).

Пример 12. $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} < 0$.

Запишем неравенство в виде: $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 25^x < 0$ и разделим обе его части на 25^x (при делении на положительное число знак неравенства не изменится):

$3 \cdot \left(\dfrac{9}{25}\right)^x - 8 \cdot \left(\dfrac{15}{25}\right)^x + 5 < 0$, $3 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + 5 < 0$, $t = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$, $\begin{cases} t > 0 \\ 3t^2 - 8t + 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 1 < t < \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow 1 < t < \dfrac{5}{3}$. Сделаем обратную замену: $1 < \left(\dfrac{3}{5}\right)^x < \dfrac{5}{3}$, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^0 < \left(\dfrac{3}{5}\right)^x < \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}$.

Поскольку основание степени меньше 1, при переходе к показателям знак неравенства меняется: $-1 < x < 0$.
Ответ: (- 1; 0).

Пример 13. $\sqrt{2 \cdot 4^x - 4} > 4^x - 6$.

Замена $t = 4^x$ превращает неравенство в иррациональное: $\begin{cases} t > 0 \\ \sqrt{2t-4} > t - 6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ 2t - 4 \ge 0 \\ t - 6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ 2t - 4 \ge 0 \\ t - 6 \ge 0 \\ 2t - 4 > t^2 - 12t + 36 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le t < 6 \\ 6 \le t < 10 \end{array} \right. \Rightarrow 2 \le t < 10 \Rightarrow 2 \le 4^x < 10 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x < \log_4 10.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \log_4 10 \right)$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$

2. $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$

3. $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$

4. $3^{x^2-2x-15} = 4^{x+3}$

5. $5 \cdot 6^x + 15 \cdot 3^x - 2^{x+1} - 6 = 0$

6. $|x-6|^{2x^2-13x+6} = 1$

Решить неравенства:

7. $\dfrac{2 \cdot 5^x - 250}{x^2 - 4x + 4} < 0$

8. $\left(4^{\sqrt{x-6}} - 1\right)\left(3 \cdot 2^x - 96\right) > 0$

9. $\left| |3 \cdot 3^x - 4| - 1 \right| \ge 2$

10. $x^2 \cdot 2^x + 25 < x^2 + 25 \cdot 2^x$

Ответы

1) $\pm\sqrt{3}$ 2) 3 3) ± 1 4) $-3;\ \log_3 4 + 5$ 5) $\log_3\left(\frac{2}{5}\right)$ 6) 5; 7; ½

7) $(-\infty;2) \cup (2;3)$ 8) $[6; +\infty)$ 9) $(-\infty;-1] \cup \left[\log_3 \frac{7}{3}; +\infty\right)$ 10) $(-\infty;-5) \cup (0;5)$