Занятие 15

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
ПОКАЗАТЕЛЬНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В логарифмических уравнениях, в отличие от показательных, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить в ответ посторонние корни. Их появление связано с дополнительными ограничениями на знак логарифмируемых выражений и оснований логарифмов. Логарифмическое уравнение можно привести к одному или нескольким простейшим следующих видов:

- $\log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$. При этом $f(x)$ принимает только положительные значения, поэтому посторонние корни не появляются (если не было ограничений ранее);
- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Такое уравнение можно свести к системе: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Пример 1. $\log_4\left(\dfrac{x+7}{5}\right) - \log_{\frac{1}{4}}(5-x) - 1 = 0.$

Определим ОДЗ: $\begin{cases} x+7>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < 5$ и перейдем во втором логарифме к основанию 4: $\log_4\left(\dfrac{x+7}{5}\right) + \log_4(5-x) = 1,\ \dfrac{(x+7)(5-x)}{5} = 4,\ x^2 + 2x - 15 = 0,$
$x_1 = -5$, $x_2 = 3$ (оба входят в ОДЗ).
Ответ: - 5; 3.

Пример 2. $\log_x(x^2 - 3x + 1) - \log_{\sqrt{x}}\sqrt{3x-4} = 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 3x - 4 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Представим $\log_{\sqrt{x}}\sqrt{3x-4} = \log_{x^{\frac{1}{2}}}(3x-4)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\log_x(3x-4).$ Тогда уравнение можно записать так: $\log_x(x^2 - 3x + 1) = \log_x(3x-4),\ x^2 - 3x + 1 = 3x - 4,\ x^2 - 6x + 5 = 0,$
$x_1 = 1$ – не входит в ОДЗ, $x_2 = 5$ – входит в ОДЗ.
Ответ: 5.

Пример 3. $\log_{4x+1} 10 + \log_{x-\frac{17}{9}} 10 = 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ x - \dfrac{17}{9} > 0 \\ x - \dfrac{17}{9} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{17}{9},\ \ x \neq \dfrac{26}{9}.$

Перейдем в обоих логарифмах к основанию 10:

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$$\frac{1}{\lg(4x+1)}+\frac{1}{\lg\left(x-\frac{17}{9}\right)}=0,\quad \frac{\lg(4x+1)+\lg\left(x-\frac{17}{9}\right)}{\lg(4x+1)\cdot\lg\left(x-\frac{17}{9}\right)}=0,\quad \frac{\lg\left(4x^2-\frac{59}{9}x-\frac{17}{9}\right)}{\lg(4x+1)\cdot\lg\left(x-\frac{17}{9}\right)}=0,$$

$\lg\left(4x^2-\frac{59}{9}x-\frac{17}{9}\right)=0,\ 4x^2-\frac{59}{9}x-\frac{17}{9}=1,\ 36x^2-59x-26=0,\ x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{36}-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 2.

Пример 4. $\frac{\log_2(x^2-6x+9)-6}{\sqrt{12-4x-x^2}}=0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ 12-4x-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2>0 \\ -6<x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ -6<x<2 \end{cases}.$

Обратите внимание на то, что логарифмируемое выражение представляет собой полный квадрат, поэтому оно положительно при всех x, кроме $x = 3$. Условие на подкоренное выражение задается в виде строгого неравенства, так как знаменатель не должен равняться нулю.

При выполнении этих условий уравнение можно записать так:

$\log_2(x-3)^2=6,\ \log_2|x-3|=3,\ |x-3|=8,\ x-3=\pm8,\ x_1=-5,\ x_2=11-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: - 5.

Пример 5. $\log_9\log_3 x+\log_3\log_{27} x=\frac{1}{2}.$

ОДЗ: $x > 1$ (при этом $\log_3 x > 0$ и $\log_{27} x > 0$, то есть положительными являются аргументы внешних логарифмов).

Перейдем во всех логарифмах к основанию 3:

$\frac{1}{2}\log_3\log_3 x+\log_3\left(\frac{1}{3}\log_3 x\right)=\frac{1}{2},\ \log_3\log_3 x+2\log_3\log_3 x-2=1,\ \log_3\log_3 x=1,$

$\log_3 x=3,\ x=27.$

Ответ: 27.

В логарифмических уравнениях часто полезно применять замену переменной.

Пример 6. $2\log_2 x+2\log_x 2=5.$

ОДЗ: $x>0,\ x\neq1.$

Пусть $t=\log_2 x,$ тогда $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}=\frac{1}{t};\ 2t+\frac{2}{t}=5,\ 2t^2-5t+2=0,\ t_1=2,$

$t_2=\frac{1}{2}.$ Сделаем обратную замену:

А) $\log_2 x=2,\ x=2^2=4;$

Б) $\log_2 x=\frac{1}{2},\ x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$

Ответ: 4; $\sqrt{2}$.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

Пример 7. $\log_4(x-4)\cdot\log_4(x+4)=\log_4(x^2-16)-1.$

ОДЗ: $\begin{cases} x-4>0 \\ x+4>0 \\ x^2-16>0 \end{cases} \Rightarrow x>4.$

Представим $\log_4(x^2-16)=\log_4((x-4)(x+4))=\log_4(x-4)+\log_4(x+4)$ и введем новые переменные: $u=\log_4(x-4)$, $v=\log_4(x+4)$, для которых имеем уравнение: $uv=u+v-1$, $(uv-u)-(v-1)=0$, $(u-1)(v-1)=0.$ Приравняем к нулю каждый множитель:

А) $u-1=0$, $\log_4(x-4)=1$, $x-4=4$, $x=8$.

Б) $v-1=0$, $\log_4(x+4)=1$, $x+4=4$, $x=0-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 8.

Нередко в уравнение входят одновременно логарифмические и показательные функции. Рассмотрим такие комбинированные задания.

Пример 8. $\log_5(5^x-3)+x=\log_5 10.$

ОДЗ: $5^x-3>0$.

Представим $x=x\cdot 1=x\cdot\log_5 5=\log_5 5^x$. Тогда уравнение примет вид:

$\log_5(5^x-3)+\log_5 5^x=\log_5 10$, $(5^x-3)5^x=10$. Сделаем замену: $t=5^x$ $(t>3)$ и решим уравнение для t: $(t-3)t=10$, $t^2-3t-10=0$, $t_1=5$, $t_2=-2<3-$посторонний корень.

Обратная замена: $5^x=5$, $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 9. $x^{4\lg x-1}=100x.$

ОДЗ: $x>0$. При выполнении этого условия обе части равенства положительны, поэтому их можно логарифмировать. Прологарифмируем левую и правую части по основанию 10: $\lg\left(x^{4\lg x-1}\right)=\lg(100x)$, $(4\lg x-1)\lg x=2+\lg x$. Замена $t=\lg x$ приводит к уравнению $(4t-1)t=2+t$, $2t^2-t-1=0$, $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

А) $\lg x=1$, $x=10$;

Б) $\lg x=-\dfrac{1}{2}$, $x=10^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: 10; $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 10. $(x+11)^{\log_{x-1}9}=81.$

ОДЗ: $\begin{cases} x+11>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x>1,\ x\neq 2.$

Прологарифмируем обе части по основанию 9: $\log_9\left((x+11)^{\log_{x-1}9}\right)=\log_9 81$,

$\log_{x-1}9\cdot\log_9(x+11)=2$, $\dfrac{\log_9(x+11)}{\log_9(x-1)}=2$, $\log_9(x+11)=2\log_9(x-1)$, $x+11=(x-1)^2$,

$x^2-3x-10=0$, $x_1=5$, $x_2=-2$ – не входит в ОДЗ.

Ответ: 5.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\log_5 \log_7 \frac{4x-1}{x+7} = 0$
2. $\log_{x+3} 3 + \log_{x+3} 4 - 1 = 0$
3. $\log_3 84 - 2\log_3 \sqrt{x+3} = \log_3 x + 1$
4. $\log_{2x+1} 4 + \log_{x-\frac{2}{3}} 4 = 0$
5. $\log_{16}(x^2 - 10x + 25) + \log_4(x+4) = \log_4(26-x)$
6. $5\log_4 x + \log_{16} x - 4\log_{64} x = 4$
7. $3\log_5 x - 33\log_x 5 = -2$
8. $\log_x(3x^2 - 4x - 16) = 2$
9. $x\lg 5^{x-1} - \lg 25 = 0$
10. $\log_3(9^x - 5\cdot 3^x + 21) = 3$
11. $x^{3\lg x+3} = 10000x^2$
12. $(3x+1)^{\log_5(x-1)} = x^2 - 2x + 1$

Ответы

1) $-\frac{50}{3}$ 2) 9 3) 4 4) 1 5) 2; 3; $\frac{\sqrt{193}-3}{2}$ 6) $4^{\frac{24}{25}}$ 7) 125; $5^{-\frac{11}{3}}$

8) 4 9) 2; - 1 10) $\log_3 6$ 11) 10; $10^{-\frac{4}{3}}$ 12) 2; 8

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com