Занятие 16

ПОКАЗАТЕЛЬНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

При решении показательно-логарифмических систем применяются как обычные методы решения систем (подстановка, замена переменных), так и приемы решения соответствующих уравнений. Если в системе присутствуют логарифмы, не забудьте об ограничениях на допустимые значения неизвестных. Если получившиеся неравенства трудны для решения (например, неравенства с двумя переменными), можно ограничиться подстановкой в них найденных решений.

Пример 1. $\begin{cases} x+y=4 \\ \log_2 x+\log_2 y=\log_2 3 \end{cases}$.

ОДЗ: $x>0,\ y>0$.

Из первого уравнения можно сделать подстановку:

$$\begin{cases} y=4-x \\ \log_2 x+\log_2(4-x)=\log_2 3 \Rightarrow x(4-x)=3 \Rightarrow x^2-4x+3=0,\ \ x_1=1,\ \ x_2=3. \end{cases}$$

Находим соответствующие значения y: $y_1=4-1=3$, $y_2=4-3=1$. Все найденные решения входят в ОДЗ.

Ответ: (1; 3), (3; 1).

Пример 2. $\begin{cases} 3(\log_x y+\log_y x)=10 \\ xy=81 \end{cases}$.

ОДЗ: $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq 1$.

Пусть $t=\log_x y$, тогда $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}$, и из первого уравнения получаем: $3t+\dfrac{3}{t}=10$,

$3t^2-10t+3=0$, $t_1=3$, $t_2=\dfrac{1}{3}$.

А) $\log_x y=3$, следовательно, $y=x^3$. Подставим во второе уравнение: $x^4=81$, с учетом ОДЗ $x=3$, $y=3^3=27$.

Б) $\log_x y=\dfrac{1}{3}$, $x=y^3$, $y^4=81$, $y=3$, $x=27$.

Ответ: (3; 27), (27; 3).

Пример 3. $\begin{cases} 3^{x+2y}+3^x=4\cdot 3^y \\ 3^{2x+y}+3\cdot 3^y=6\cdot 3^x \end{cases}$.

Сделаем замену: $u=3^x$, $v=3^y$ $(u>0,\ v>0)$ и получим систему $\begin{cases} uv^2+u=4v \\ u^2v+3v=6u \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} uv^2=4v-u \\ u^2v=6u-3v \end{cases} \Rightarrow \frac{uv^2}{u^2v}=\frac{4v-u}{6u-3v} \Rightarrow \frac{u}{v}=\frac{4v-u}{6u-3v} \Rightarrow 6u^2-3uv=4v^2-uv \Rightarrow 3u^2-uv-2v^2=0.$$

Получено однородное уравнение. Разделим обе части на v^2: $3\left(\dfrac{u}{v}\right)^2-\dfrac{u}{v}-2=0$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)_1 = 1,\ \left(\dfrac{u}{v}\right)_2 = -\dfrac{2}{3} < 0 -$ постороннее решение, так это отношение может быть только положительным.

Итак, $\dfrac{u}{v} = 1,\ \ v = u.$ Подставим этот результат в первое уравнение системы для u и v: $u^3 + u = 4u,\ \ u^3 - 3u = 0,\ \ u(u^2 - 3) = 0.$ Единственный положительный корень этого уравнения – $u = \sqrt{3}$. Тогда $v = u = \sqrt{3},$ и после обратной замены получаем: $\begin{cases} 3^x = \sqrt{3} \\ 3^y = \sqrt{3} \end{cases},$

следовательно, $x = y = \dfrac{1}{2}.$

Ответ: (½ ; ½).

Пример 4. $\begin{cases} \log_9(3x + 4y) + \log_3 x = \log_3 16 \\ \log_9 x + \log_3 y = \log_3 2 \end{cases}.$

ОДЗ: $x > 0,\ \ y > 0.$

Перейдем во всех логарифмах к основанию 3: $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_3(3x + 4y) + \log_3 x = \log_3 16 \\ \dfrac{1}{2}\log_3 x + \log_3 y = \log_3 2 \end{cases},$

$\begin{cases} \log_3(3x + 4y) + 2\log_3 x = 2\log_3 16 \\ \log_3 x + 2\log_3 y = 2\log_3 2 \end{cases},\quad \begin{cases} x^2(3x + 4y) = 256 \\ xy^2 = 4 \end{cases}.$ Разделим левую и правую части первого уравнения на соответствующие части второго: $\dfrac{3x^2 + 4xy}{y^2} = 64,$

$3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 4\dfrac{x}{y} - 64 = 0,\ \ \dfrac{x}{y} = 4$ (второе решение отрицательно и является посторонним, так как x и y одного знака, следовательно, их отношение положительно).

Получена подстановка: $x = 4y$. Тогда из второго уравнения последней системы $4y^3 = 1$, $y = 1,\ \ x = 4.$

Ответ: (4; 1).

Пример 5. $\begin{cases} x^{\log_2 y} = 3 \\ xy = 6 \end{cases}.$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$. При выполнении этих условий прологарифмируем обе части каждого уравнения по основанию 2: $\begin{cases} \log_2 y \cdot \log_2 x = \log_2 3 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 6 \end{cases}.$ Представим $\log_2 6 = \log_2(2 \cdot 3) = = 1 + \log_2 3$ и сделаем замену: $u = \log_2 x,\ \ v = \log_2 y.$ Для новых неизвестных решим систему: $\begin{cases} uv = \log_2 3 \\ u + v = 1 + \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 + \log_2 3 - u \\ u^2 - (1 + \log_2 3)u + \log_2 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = \log_2 3 \end{cases}, \begin{cases} u_2 = \log_2 3 \\ v_2 = 1 \end{cases}.$

(Заметим, что корни квадратного уравнения для *u* легко можно найти по теореме Виета).

Обратная замена:

А) $\begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 y = \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$

Б) $\begin{cases} \log_2 x = \log_2 3 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ответ: (2; 3), (3; 2).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_4 x + \log_4 y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 (x + 3y) = \log_2 7 + 2 \\ \log_2 y + \log_2 (y + 5x) = \log_2 7 + 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_4 (x + y) - \log_4 (x - y) = 1 \\ 5x^2 - 2y^2 = 107 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 27^x + 8 \cdot 27^y = 5859 \\ 9^x - 2 \cdot 3^{x+y} + 4 \cdot 9^y = 279 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^{2y-1} = 27 \\ x^{3y+2} = 6561 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y + \log_5 x = -3 \\ x^y = 25 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9^{-y} \cdot \log_2 x = -3 \\ \log_2 x + 3^{-2y} = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5 \log_x y - 4 \log_y x = 1 \\ 7x^2 - 6y^2 = 25 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \log_{\sqrt[3]{3}} (y - x) = 6 \\ 5^x \cdot 2^y = 2560 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_2 (x + 4) + \log_2 (y + 4) = \log_2 63 \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (xy + 2) = \log_2 17 + 3 \end{cases}$

Ответы

1) (2; 4), (4; 2)   2) (2; 4)   3) (5; 3)   4) (1; 2), $\left(\log_3 18; \log_3 \dfrac{3}{2}\right)$ 5) (3; 2)

6) (1; 25), (2; 5)   7) $\left(\dfrac{1}{8}; 0\right)$ 8) (5; 5)   9) (1; 10)   10) (3; 5), (5; 3)