Занятие 17

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к одной из двух систем неравенств:

А) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$, если $a > 1$;

Б) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$, если $0 < a < 1$.

Пример 1. $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1)$.

Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть:

$\log_3(x-1) + \log_3(x+5) = \log_3((x-1)(x+5)) = \log_3(x^2+4x-5)$ и решим систему

неравенств: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+5>0 \\ 5x+1>0 \\ x^2+4x-5<5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-6<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -2<x<3 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3.$

Обращаем ваше внимание на то, что положительным должно быть **каждое** логарифмируемое выражение, а не только их произведение.

Ответ: (1; 3).

Пример 2. $\log_3 \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6} < 0.$

Поскольку $0 = \log_3 1,$ решаем неравенство $\log_3 \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6} < \log_3 1.$ Оно равносильно

системе: $\begin{cases} \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6} > 0 \\ \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6<1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6} > \log_5 1 \\ \log_5 \dfrac{3x+5}{x+6} < \log_5 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+5}{x+6} > 0 \\ \dfrac{3x+5}{x+6} > 1 \\ \dfrac{3x+5}{x+6} < 5 \end{cases}$. Заметим, что первое

неравенство можно не решать, так как оно заведомо будет верным для всех решений

второго неравенства. Тогда $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{x+6} - 1 > 0 \\ \dfrac{3x+5}{x+6} - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+6} > 0 \\ \dfrac{-2x-25}{x+6} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{25}{2} \\ x>-6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{25}{2} \\ x>\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{25}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Если основание логарифма переменно и может принимать значения как меньшие, так и большие 1, нужно рассмотреть эти ситуации отдельно, так как в первом случае знак неравенства не меняется при переходе к аргументам, а во втором – меняется на обратный.

Пример 3. $\log_x(x+4)-\log_{x^2}(x^2-10x+21)\ge 0$.

Запишем неравенство в виде:

$\log_x(x+4)\ge\frac{1}{2}\log_x(x^2-10x+21)$, $2\log_x(x+4)\ge\log_x(x^2-10x+21)$,

$\log_x(x+4)^2\ge\log_x(x^2-10x+21)$

(учитываем, что $x > 0$, поэтому $\sqrt{x^2}=x$).

$$\text{А)}\ \begin{cases} x>1 \\ x+4>0 \\ x^2-10x+21>0 \\ (x+4)^2\ge x^2-10x+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-4 \\ x<3,\ \ x>7 \\ 18x\ge 5 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3,\ \ x>7.$$

$$\text{Б)}\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x+4>0 \\ x^2-10x+21>0 \\ (x+4)^2\le x^2-10x+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x>-4 \\ x<3,\ \ x>7 \\ x\le\frac{5}{18} \end{cases} \Rightarrow 0<x\le\frac{5}{18}.$$

Ответ: $\left(0;\frac{5}{18}\right]\cup(1;3)\cup(7;+\infty)$.

Замена переменной в логарифмических неравенствах.

Пример 4. $4\log_3 x-18\log_x 3\le -1$.

Пусть $t=\log_3 x$, тогда $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}=\frac{1}{t}$, и для t получаем неравенство:

$4t-\frac{18}{t}\le -1$, $\frac{4t^2+t-18}{t}\le 0$. Не забудьте, что в дробно-рациональном неравенстве важен знак не только числителя, но и знаменателя дроби, и решать его лучше всего методом интервалов (самая распространенная ошибка на этом этапе решения – «отбрасывание» знаменателя). Корни числителя: $-\frac{9}{4}$ и 2, корень знаменателя – 0, и знак дроби распределяется на интервалах так:

$$\begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & & + \\ \hline & & -\frac{9}{4} & & 0 & & 2 & \end{array}$$

Следовательно, $t\le -\frac{9}{4}$ или $0 < t\le 2$ (корень знаменателя, разумеется, в ответ не входит).

А) $\log_3 x\le -\frac{9}{4}\Rightarrow\begin{cases} x>0 \\ x\le 3^{-\frac{9}{4}} \end{cases}$.

Б) $0<\log_3 x\le 2\Rightarrow\log_3 1<\log_3 x\le\log_3 9\Rightarrow 1<x\le 9$.

Ответ: $\left(0;3^{-\frac{9}{4}}\right]\cup(1;9]$.

Пример 5. $\sqrt{10\log_2 x+14}>\log_2 x+3.$

Сделаем замену: $t=\log_2 x$ и решим для t иррациональное неравенство $\sqrt{10t+14}>t+3$:

А) $\begin{cases}10t+14\ge 0\\ t+3<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge -1{,}4\\ t<-3\end{cases}$ – решений нет.

Б) $\begin{cases}10t+14\ge 0\\ t+3\ge 0\\ 10t+14>t^2+6t+9\end{cases}\Rightarrow -1<t<5.$

Обратная замена: $-1<\log_2 x<5,\ \log_2\frac{1}{2}<x<\log_2 32,\ \frac{1}{2}<x<32.$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};32\right)$.

Метод интервалов в логарифмических неравенствах.

Пример 6. $\log_{x-3}2+\log_{23-6x}2\ge 0.$

Определим ОДЗ: $\begin{cases}x-3>0\\ x-3\ne 1\\ 23-6x>0\\ 23-6x\ne 1\end{cases}\Rightarrow 3<x<\frac{11}{3},\ \frac{11}{3}<x<\frac{23}{6}$ и перейдем в обоих логарифмах к основанию 2: $\frac{1}{\log_2(x-3)}+\frac{1}{\log_2(23-6x)}\ge 0,\ \frac{\log_2(23-6x)+\log_2(x-3)}{\log_2(x-3)\cdot\log_2(23-6x)}\ge 0,$

$\frac{\log_2(-6x^2+41x-69)}{\log_2(x-3)\cdot\log_2(23-6x)}\ge 0.$ Найдем корни числителя и знаменателя:

А) $\log_2(-6x^2+41x-69)=0,\ -6x^2+41x-69=1,\ 6x^2-41x+70=0,\ x_1=\frac{10}{3},\ x_2=\frac{7}{2}.$

Б) $\log_2(x-3)=0,\ x-3=1,\ x=4-$ не входит в ОДЗ.

$\log_2(23-6x)=0,\ 23-6x=1,\ x=\frac{11}{3}$ (само это значение тоже не входит в ОДЗ, но слева и справа от него определены все функции, присутствующие в неравенстве, и один из множителей знаменателя в этой точке меняет знак).

Итак, в рамках ОДЗ дробь меняет знак трижды: в точках $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{2}$ и $\frac{11}{3}$. Расставим знаки на интервалах. При $x=\frac{15}{4}$ (точка, расположенная на самом правом интервале) $x-3=0{,}75<1$, $23-6x=0{,}5<1$, $-6x^2+41x-69=0{,}375<1$, поэтому все три логарифма, входящие в последнюю форму неравенства, отрицательны; соответственно, отрицательна и сама дробь.

$$\overset{\circ}{3}\ \xrightarrow{\ +\ }\ \overset{\bullet}{\tfrac{10}{3}}\ \xrightarrow{\ -\ }\ \overset{\bullet}{\tfrac{7}{2}}\ \xrightarrow{\ +\ }\ \overset{\circ}{\tfrac{11}{3}}\ \xrightarrow{\ -\ }\ \overset{\circ}{\tfrac{23}{6}}$$

Ответ: $\left[\frac{10}{3};\frac{7}{2}\right]\cup\left(\frac{11}{3};\frac{23}{6}\right)$.

Пример 7. $\log_2\log_{x+1}(3x+2)\le 0.$

Превратим простейшее неравенство $\log_2 \log_{x+1}(3x+2) \le \log_2 1$ в систему:

$\begin{cases} \log_{x+1}(3x+2) > 0 \\ \log_{x+1}(3x+2) \le 1 \end{cases}$ и перейдем к любому постоянному основанию (например, 2):

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2>0,\ \ x+1>0 \\ \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \dfrac{\log_2(3x+2)-\log_2(x+1)}{\log_2(x+1)} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \dfrac{\log_2\dfrac{3x+2}{x+1}}{\log_2(x+1)} \le 0 \end{cases}$$

Решим второе и третье неравенства методом интервалов.

А) $\log_2(3x+2)=0,\ 3x+2=1,\ \ x=-\dfrac{1}{3};\ \log_2(x+1)=0,\ \ x+1=1,\ \ x=0.$

$$\underset{-\frac{2}{3}}{\circ}\overset{+}{\text{———}}\underset{-\frac{1}{3}}{\circ}\overset{-}{\text{———}}\underset{0}{\circ}\overset{+}{\text{———}}$$

Решение второго неравенства: $-\dfrac{2}{3}<x<-\dfrac{1}{3},\ \ x>0.$

Б) $\log_2\dfrac{3x+2}{x+1}=0,\ \dfrac{3x+2}{x+1}=1,\ 3x+2=x+1,\ \ x=-\dfrac{1}{2};$ корень знаменателя (x = 0) тот же, что в предыдущем неравенстве.

$$\underset{-\frac{2}{3}}{\circ}\overset{+}{\text{———}}\underset{-\frac{1}{2}}{\bullet}\overset{-}{\text{———}}\underset{0}{\circ}\overset{+}{\text{———}}$$

Решение: $-\dfrac{1}{2}\le x<0.$

Окончательным решением будет пересечение полученных промежутков: $-\dfrac{1}{2}\le x<-\dfrac{1}{3}.$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right).$

Пример 8. $\log_{x-1}16\cdot\log_2(x+11)\le 8.$

ОДЗ: $x-1>0,\ \ x-1\ne 1,\ \ x+1>0 \Rightarrow 1<x<2,\ \ x>2.$

Преобразуем первый логарифм: $\log_{x-1}16 = 4\log_{x-1}2 = \dfrac{4}{\log_2(x-1)}$. Тогда

$$\frac{4\log_2(x+11)}{\log_2(x-1)}\le 8,\ \ \frac{\log_2(x+11)}{\log_2(x-1)}\le 2,\ \ \frac{\log_2(x+11)-2\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)}\le 0,\ \ \frac{\log_2\dfrac{x+11}{(x-1)^2}}{\log_2(x-1)}\le 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:

А) $\log_2\dfrac{x+11}{(x-1)^2}=0,\ \ \dfrac{x+11}{(x-1)^2}=1,\ \ x+11=x^2-2x+1,\ \ x^2-3x-10=0,\ \ x_1=5,\ \ x_2=-2-$ не входит в ОДЗ.

Б) $\log_2(x-1)=0,\ \ x-1=1,\ \ x=2-$ точка, лежащая внутри ОДЗ.

Расставим знаки (при $x = 10$, то есть на самом правом из полученных промежутков, числитель дроби отрицателен, а знаменатель положителен, то есть вся дробь отрицательна).

$$\begin{array}{ccccccc} & - & & + & & - & \\ \circ & \text{———} & \circ & \text{———} & \bullet & \text{———} & \\ 1 & & 2 & & 5 & & \end{array}$$

Ответ: $(1;2)\cup[5;+\infty)$.

Пример 9. $\log_{x+7}9-\log_{|x+1|}3\le 0.$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+7>0 \\ x+7\ne 1 \\ |x+1|>0 \\ |x+1|\ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-7 \\ x\ne -6 \\ x\ne -1 \\ x\ne -2,\ \ x\ne 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-7;-6)\cup(-6;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Перейдем к основанию 3:

$$\frac{2}{\log_3(x+7)}-\frac{1}{\log_3|x+1|}\le 0,\ \ \frac{2\log_3|x+1|-\log_3(x+7)}{\log_3(x+7)\cdot\log_3|x+1|}\le 0,\ \ \frac{\log_3\dfrac{(x+1)^2}{x+7}}{\log_3(x+7)\cdot\log_3|x+1|}\le 0$$

(учитываем, что $|x+1|^2=(x+1)^2$).

Применим метод интервалов:

А) $\log_3\dfrac{(x+1)^2}{x+7}=0,\ \ \dfrac{(x+1)^2}{x+7}=1,\ \ x^2+x-6=0,\ \ x_1=-3,\ \ x_2=2.$

Б) $\begin{array}{l}\log_3(x+7)=0,\ \ x+7=1,\ \ x=-6; \\ \log_3|x+1|=0,\ \ |x+1|=1,\ \ x+1=\pm1,\ \ x=-2,\ \ x=0.\end{array}$

Отметим, что из всех изолированных точек, не входящих в ОДЗ, только x = - 1 не является корнем числителя или знаменателя; соответственно в этой точке знак дроби не меняется.

Расставим знаки, учитывая, что на самом правом интервале все логарифмы, входящие в левую часть неравенства, положительны:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & - & & + & & - & & + & & + & & - & & + & \\ \circ & \text{——} & \circ & \text{——} & \bullet & \text{——} & \circ & \text{——} & \circ & \text{——} & \circ & \text{——} & \bullet & \text{——} & \\ -7 & & -6 & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 2 & & \end{array}$$

Ответ: (- 7; - 6)U[- 3; - 2)U(0; 2].

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\log_3\log_5(x^2+5x+5)<0$
2. $\log_x(x+2)+\log_x(7x-4)\ge\log_x 85$
3. $\log_{x-3}2+\log_{5x-14}2\ge 0$
4. $\log_{x-4}25\cdot\log_5(x+2)\le 4$
5. $\log_{x-2}2\le\log_{x+10}4$
6. $\log_{3-x}(x^2+x)\ge 1$
7. $\log_x\dfrac{2}{18-5x}\le -2$
8. $\log_3\log_{x-2}(3x-7)\le 0$

9. $\log_{x-1}\log_5(2x-2)\geq 0$

10. $\log_{x+14}16-\log_{|x+2|}4\geq 0$

11. $\log_2\log_{|x+2|}2\geq -1$

12. $\sqrt{\log_3 x}+\sqrt{\log_3 x^2-7}<3$

Ответы

1) (-5; -4)U(-1; 0) 2) $\left(\frac{4}{7};1\right)\cup[3;+\infty)$ 3) $\left(3;\frac{16}{5}\right]\cup(4;+\infty)$ 4) (4; 5)U[7; +∞)

5) (2; 3)U[6; +∞) 6) (- ∞; - 3]U[1; 2) 7) (1; 2] 8) $\left[\frac{5}{2};\frac{8}{3}\right)$ 9) $\left(\frac{3}{2};2\right)\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$

10) [-13; - 5]U(- 3; - 2)U(- 2; - 1)U[2; +∞) 11) [- 6; - 3)U(- 1; 2] 12) $[27\sqrt{3};81)$