

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к одной из двух систем неравенств:

$$\text{А) } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \text{ если } a > 1; \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\text{Б) } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \text{ если } 0 < a < 1. \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Пример 1. $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1)$.

Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть:

$\log_3(x-1) + \log_3(x+5) = \log_3((x-1)(x+5)) = \log_3(x^2 + 4x - 5)$ и решим систему

$$\text{неравенств: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+5 > 0 \\ 5x+1 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 < 5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3.$$

Обращаем ваше внимание на то, что положительным должно быть **каждое** логарифмируемое выражение, а не только их произведение.

Ответ: (1; 3).

Пример 2. $\log_3 \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < 0$.

Поскольку $0 = \log_3 1$, решаем неравенство $\log_3 \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < \log_3 1$. Оно равносильно

$$\text{системе: } \begin{cases} \log_5 \frac{3x+5}{x+6} > 0 \\ \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5 \frac{3x+5}{x+6} > \log_5 1 \\ \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < \log_5 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+5}{x+6} > 0 \\ \frac{3x+5}{x+6} > 1 \\ \frac{3x+5}{x+6} < 5 \end{cases}$$

Заметим, что первое

неравенство можно не решать, так как оно заведомо будет верным для всех решений

$$\text{второго неравенства. Тогда } \begin{cases} \frac{3x+5}{x+6} - 1 > 0 \\ \frac{3x+5}{x+6} - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+6} > 0 \\ \frac{-2x-25}{x+6} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -6 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{25}{2} \\ x > -6 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{25}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{25}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Если основание логарифма переменное и может принимать значения как меньшие, так и

большие 1, нужно рассмотреть эти ситуации отдельно, так как в первом случае знак неравенства не меняется при переходе к аргументам, а во втором – меняется на обратный.

Пример 3. $\log_x(x+4) - \log_{x^2}(x^2 - 10x + 21) \geq 0$.

Запишем неравенство в виде:

$$\log_x(x+4) \geq \frac{1}{2} \log_x(x^2 - 10x + 21), \quad 2 \log_x(x+4) \geq \log_x(x^2 - 10x + 21),$$

$$\log_x(x+4)^2 \geq \log_x(x^2 - 10x + 21)$$

(учитываем, что $x > 0$, поэтому $\sqrt{x^2} = x$).

$$\text{А) } \begin{cases} x > 1 \\ x+4 > 0 \\ x^2 - 10x + 21 > 0 \\ (x+4)^2 \geq x^2 - 10x + 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -4 \\ x < 3, \quad x > 7 \\ 18x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3, \quad x > 7.$$

$$\text{Б) } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x+4 > 0 \\ x^2 - 10x + 21 > 0 \\ (x+4)^2 \leq x^2 - 10x + 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > -4 \\ x < 3, \quad x > 7 \\ x \leq \frac{5}{18} \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{5}{18}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{5}{18}\right] \cup (1; 3) \cup (7; +\infty)$.

Замена переменной в логарифмических неравенствах.

Пример 4. $4 \log_3 x - 18 \log_x 3 \leq -1$.

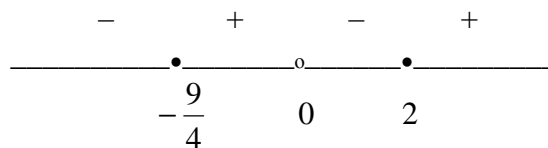
Пусть $t = \log_3 x$, тогда $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{t}$, и для t получаем неравенство:

$$4t - \frac{18}{t} \leq -1, \quad \frac{4t^2 + t - 18}{t} \leq 0. \text{ Не забудьте, что в дробно-рациональном неравенстве важен}$$

знак не только числителя, но и знаменателя дроби, и решать его лучше всего методом интервалов (самая распространенная ошибка на этом этапе решения – «отбрасывание»

знаменателя). Корни числителя: $-\frac{9}{4}$ и 2, корень знаменателя – 0, и знак дроби

распределяется на интервалах так:



Следовательно, $t \leq -\frac{9}{4}$ или $0 < t \leq 2$ (корень знаменателя, разумеется, в ответ не входит).

$$\text{А) } \log_3 x \leq -\frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 3^{-\frac{9}{4}} \end{cases}$$

$$\text{Б) } 0 < \log_3 x \leq 2 \Rightarrow \log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 9 \Rightarrow 1 < x \leq 9.$$

Ответ: $\left(0; 3^{-\frac{9}{4}}\right] \cup (1; 9]$.

Пример 5. $\sqrt{10 \log_2 x + 14} > \log_2 x + 3$.

Сделаем замену: $t = \log_2 x$ и решим для t иррациональное неравенство $\sqrt{10t + 14} > t + 3$:

$$\text{А) } \begin{cases} 10t + 14 \geq 0 \\ t + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq -1,4 \\ t < -3 \end{cases} - \text{решений нет.}$$

$$\text{Б) } \begin{cases} 10t + 14 \geq 0 \\ t + 3 \geq 0 \\ 10t + 14 > t^2 + 6t + 9 \end{cases} \Rightarrow -1 < t < 5.$$

Обратная замена: $-1 < \log_2 x < 5$, $\log_2 \frac{1}{2} < x < \log_2 32$, $\frac{1}{2} < x < 32$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 32\right)$

Метод интервалов в логарифмических неравенствах.

Пример 6. $\log_{x-3} 2 + \log_{23-6x} 2 \geq 0$.

$$\text{Определим ОДЗ: } \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 3 \neq 1 \\ 23 - 6x > 0 \\ 23 - 6x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < \frac{11}{3}, \frac{11}{3} < x < \frac{23}{6} \text{ и перейдем в обоих логарифмах}$$

$$\text{к основанию 2: } \frac{1}{\log_2(x-3)} + \frac{1}{\log_2(23-6x)} \geq 0, \frac{\log_2(23-6x) + \log_2(x-3)}{\log_2(x-3) \cdot \log_2(23-6x)} \geq 0,$$

$$\frac{\log_2(-6x^2 + 41x - 69)}{\log_2(x-3) \cdot \log_2(23-6x)} \geq 0. \text{ Найдем корни числителя и знаменателя:}$$

$$\text{А) } \log_2(-6x^2 + 41x - 69) = 0, -6x^2 + 41x - 69 = 1, 6x^2 - 41x + 70 = 0, x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Б) } \log_2(x-3) = 0, x-3 = 1, x = 4 - \text{ не входит в ОДЗ.}$$

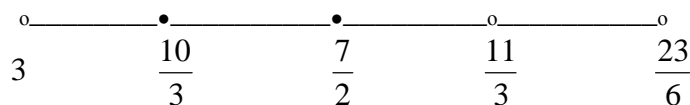
$$\log_2(23-6x) = 0, 23-6x = 1, x = \frac{11}{3} \text{ (само это значение тоже не входит в ОДЗ, но}$$

слева и справа от него определены все функции, присутствующие в неравенстве, и один из множителей знаменателя в этой точке меняет знак).

Итак, в рамках ОДЗ дробь меняет знак трижды: в точках $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{2}$ и $\frac{11}{3}$. Расставим знаки на

интервалах. При $x = \frac{15}{4}$ (точка, расположенная на самом правом интервале)

$x - 3 = 0,75 < 1$, $23 - 6x = 0,5 < 1$, $-6x^2 + 41x - 69 = 0,375 < 1$, поэтому все три логарифма, входящие в последнюю форму неравенства, отрицательны; соответственно, отрицательна и сама дробь.



Ответ: $\left[\frac{10}{3}; \frac{7}{2}\right] \cup \left(\frac{11}{3}; \frac{23}{6}\right)$

Пример 7. $\log_2 \log_{x+1}(3x+2) \leq 0$.

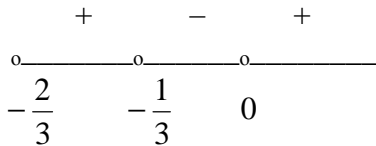
Превратим простейшее неравенство $\log_2 \log_{x+1}(3x+2) \leq \log_2 1$ в систему:

$$\begin{cases} \log_{x+1}(3x+2) > 0 \\ \log_{x+1}(3x+2) \leq 1 \end{cases} \text{ и перейдем к любому постоянному основанию (например, 2):}$$

$$\begin{cases} \frac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \frac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2 > 0, x+1 > 0 \\ \frac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \frac{\log_2(3x+2) - \log_2(x+1)}{\log_2(x+1)} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ \frac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0. \text{ Решим второе и} \\ \frac{\log_2 \frac{3x+2}{x+1}}{\log_2(x+1)} \leq 0 \end{cases}$$

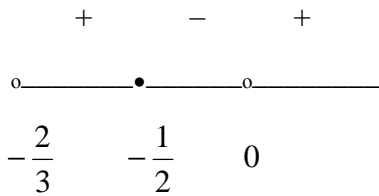
третье неравенства методом интервалов.

А) $\log_2(3x+2) = 0, 3x+2 = 1, x = -\frac{1}{3}; \log_2(x+1) = 0, x+1 = 1, x = 0.$



Решение второго неравенства: $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}, x > 0.$

Б) $\log_2 \frac{3x+2}{x+1} = 0, \frac{3x+2}{x+1} = 1, 3x+2 = x+1, x = -\frac{1}{2};$ корень знаменателя ($x = 0$) тот же, что в предыдущем неравенстве.



Решение: $-\frac{1}{2} \leq x < 0.$

Окончательным решением будет пересечение полученных промежутков: $-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3}.$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$

Пример 8. $\log_{x-1} 16 \cdot \log_2(x+11) \leq 8.$

ОДЗ: $x-1 > 0, x-1 \neq 1, x+11 > 0 \Rightarrow 1 < x < 2, x > 2.$

Преобразуем первый логарифм: $\log_{x-1} 16 = 4 \log_{x-1} 2 = \frac{4}{\log_2(x-1)}.$ Тогда

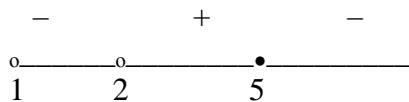
$$\frac{4 \log_2(x+11)}{\log_2(x-1)} \leq 8, \frac{\log_2(x+11)}{\log_2(x-1)} \leq 2, \frac{\log_2(x+11) - 2 \log_2(x-1)}{\log_2(x-1)} \leq 0, \frac{\log_2 \frac{x+11}{(x-1)^2}}{\log_2(x-1)} \leq 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:

А) $\log_2 \frac{x+11}{(x-1)^2} = 0, \frac{x+11}{(x-1)^2} = 1, x+11 = x^2 - 2x + 1, x^2 - 3x - 10 = 0, x_1 = 5, x_2 = -2$ — не входит в ОДЗ.

Б) $\log_2(x-1) = 0$, $x-1 = 1$, $x = 2$ – точка, лежащая внутри ОДЗ.

Расставим знаки (при $x = 10$, то есть на самом правом из полученных промежутков, числитель дроби отрицателен, а знаменатель положителен, то есть вся дробь отрицательна).



Ответ: $(1;2) \cup [5;+\infty)$.

Пример 9. $\log_{x+7} 9 - \log_{|x+1|} 3 \leq 0$.

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+7 > 0 \\ x+7 \neq 1 \\ |x+1| > 0 \\ |x+1| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -7 \\ x \neq -6 \\ x \neq -1 \\ x \neq -2, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-7; -6) \cup (-6; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Перейдем к основанию 3:

$$\frac{2}{\log_3(x+7)} - \frac{1}{\log_3|x+1|} \leq 0, \quad \frac{2 \log_3|x+1| - \log_3(x+7)}{\log_3(x+7) \cdot \log_3|x+1|} \leq 0, \quad \frac{\log_3 \frac{(x+1)^2}{x+7}}{\log_3(x+7) \cdot \log_3|x+1|} \leq 0$$

(учитываем, что $|x+1|^2 = (x+1)^2$).

Применим метод интервалов:

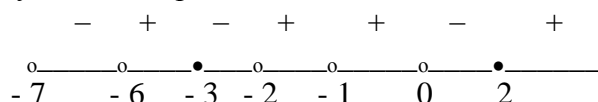
А) $\log_3 \frac{(x+1)^2}{x+7} = 0$, $\frac{(x+1)^2}{x+7} = 1$, $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Б) $\log_3(x+7) = 0$, $x+7 = 1$, $x = -6$;

$\log_3|x+1| = 0$, $|x+1| = 1$, $x+1 = \pm 1$, $x = -2$, $x = 0$.

Отметим, что из всех изолированных точек, не входящих в ОДЗ, только $x = -1$ не является корнем числителя или знаменателя; соответственно в этой точке знак дроби не меняется.

Расставим знаки, учитывая, что на самом правом интервале все логарифмы, входящие в левую часть неравенства, положительны:



Ответ: $(-7; -6) \cup [-3; -2) \cup (0; 2]$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\log_3 \log_5(x^2 + 5x + 5) < 0$
2. $\log_x(x+2) + \log_x(7x-4) \geq \log_x 85$
3. $\log_{x-3} 2 + \log_{5x-14} 2 \geq 0$
4. $\log_{x-4} 25 \cdot \log_5(x+2) \leq 4$
5. $\log_{x-2} 2 \leq \log_{x+10} 4$
6. $\log_{3-x}(x^2 + x) \geq 1$
7. $\log_x \frac{2}{18-5x} \leq -2$
8. $\log_3 \log_{x-2}(3x-7) \leq 0$

9. $\log_{x-1} \log_5(2x-2) \geq 0$

10. $\log_{x+14} 16 - \log_{|x+2|} 4 \geq 0$

11. $\log_2 \log_{|x+2|} 2 \geq -1$

12. $\sqrt{\log_3 x} + \sqrt{\log_3 x^2 - 7} < 3$

Ответы

1) $(-5; -4) \cup (-1; 0)$ 2) $\left(\frac{4}{7}; 1\right) \cup [3; +\infty)$ 3) $\left(3; \frac{16}{5}\right] \cup (4; +\infty)$ 4) $(4; 5) \cup [7; +\infty)$

5) $(2; 3) \cup [6; +\infty)$ 6) $(-\infty; -3] \cup [1; 2)$ 7) $(1; 2]$ 8) $\left[\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right)$ 9) $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$

10) $[-13; -5] \cup (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup [2; +\infty)$ 11) $[-6; -3) \cup (-1; 2]$ 12) $[27\sqrt{3}; 81)$