Занятие 18

ПОКАЗАТЕЛЬНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении подобных неравенств применяются те же приемы, что и при решении уравнений аналогичного типа (замены, логарифмирование, потенцирование). Как всегда, внимательно следите за ограничениями на ОДЗ.

Пример 1. $\log_3(3^x - 3) + x < \log_3 10$.
Представим $x = \log_3 3^x$, сделаем замену $t = 3^x$ и решим для t систему неравенств с учетом ОДЗ: $\begin{cases} t-3>0 \\ t(t-3)<10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>3 \\ t^3-3t-10<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>3 \\ -2<t<5 \end{cases} \Rightarrow 3<t<5.$

Обратная замена: $3 < 3^x < 5,\ 3^1 < 3^x < 3^{\log_3 5},\ 1 < x < \log_3 5.$

Ответ: $(1; \log_3 5)$.

Пример 2. $x^{2\lg x - 3} < 1000x^2$.
Если прологарифмировать обе части неравенства по любому основанию, большему 1, знак неравенства не изменится (учитываем, что в области допустимых значений обе части положительны). Логарифмируем по основанию 10:

$$(2\lg x - 3)\lg x < 3 + 2\lg x,\ \ t = \lg x,\ \ 2t^2 - 5t - 3 < 0,\ -\frac{1}{2} < t < 3,\ -\frac{1}{2} < \lg x < 3,\ 10^{-\frac{1}{2}} < x < 1000.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}; 1000\right)$

Пример 3. $(x+8)^{\log_{x-4} 4} \le 16$.

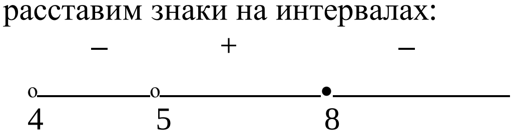
Вновь перед нами в левой части выражение вида $f(x)^{g(x)}$. Наиболее удобный прием для упрощения – логарифмирование. Прологарифмируем обе части по основанию 4 и составим систему неравенств с учетом ОДЗ:

$$\begin{cases} x+8>0 \\ x-4>0 \\ x-4 \ne 1 \\ \log_{x-4} 4 \cdot \log_4(x+8) \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \ne 5 \\ \dfrac{\log_4(x+8)}{\log_4(x-4)} - 2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \ne 5 \\ \dfrac{\log_4 \dfrac{x+8}{(x-4)^2}}{\log_4(x-4)} \le 0 \end{cases}.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов.

А) $\log_4 \dfrac{x+8}{(x-4)^2} = 0,\ \dfrac{x+8}{(x-4)^2} = 1,\ x^2 - 9x + 8 = 0,\ x_1 = 8,\ x_2 = 1 -$ не входит в ОДЗ.

Б) $\log_4(x-4) = 0,\ x-4 = 1,\ x = 5 -$ точка лежит внутри ОДЗ, знак дроби в ней меняется.
При достаточно больших значениях x аргумент логарифма, стоящего в числителе, меньше 1, то есть числитель дроби отрицателен, а знаменатель положителен. С учетом этого расставим знаки на интервалах:



Таким образом, $4 < x < 5$ или $x \ge 8$.
Ответ: $(4; 5) \cup [8; +\infty)$.

Пример 4. $(x-2)^{\log_3(x-5)} \geq x^2 - 10x + 25.$

Задаем ОДЗ и логарифмируем обе части по основанию 3:

$\begin{cases} x-2>0 \\ x-5>0 \\ x-5 \neq 1 \\ \log_3(x-5)\cdot\log_3(x-2) \geq \log_3(x^2-10x+25) \end{cases}$. Заметим, что $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. Тогда

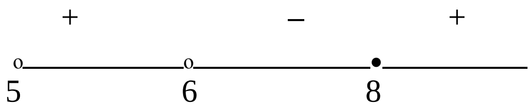
$$\begin{cases} x>5 \\ x \neq 6 \\ \log_3(x-5)\cdot\log_3(x-2) \geq 2\log_3(x-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x \neq 6 \\ \log_3(x-5)(\log_3(x-2)-2) \geq 0 \end{cases}.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

А) $\log_3(x-5)=0,\ \ x-5=1,\ \ x=6-$ сама эта точка в ОДЗ не входит, но знак первого множителя в ней меняется.

Б) $\log_3(x-2)-2=0,\ \ \log_3(x-2)=2,\ \ x-2=9,\ \ x=11.$

Расставим знаки на интервалах (при $x > 11$ левая часть положительна):



Ответ: $(5; 6)\cup[8; +\infty)$.

Пример 5. $2^{\log_3 x} \leq 56 - 6\cdot x^{\log_3 2}.$

Воспользуемся одним из свойств логарифмов (см. занятие 13): $x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}$. Неравенство сразу резко упрощается: $2^{\log_3 x} \leq 56 - 6\cdot 2^{\log_3 x}$, $7\cdot 2^{\log_3 x} \leq 56$, $2^{\log_3 x} \leq 8$, $\log_3 x \leq 3$, и, с учетом ОДЗ, $0 < x \leq 27$.

Ответ: $(0; 27]$.

Пример 6. $\log_2(2^x-3)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-6) \leq -2.$

Упростим второй множитель левой части:

$\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-6) = -\log_2\left(2(2^x-3)\right) = -(1+\log_2(2^x-3)).$ Этот результат позволяет сделать замену: $t = \log_2(2^x - 3)$ и решать неравенство: $-t(t+1) \leq -2$, $t(t+1) \geq 2$, $t^2 + t - 2 \geq 0$, $t \leq -2$ или $t \geq 1$. Сделаем обратную замену.

А) $\log_2(2^x-3) \leq -2 \Rightarrow \begin{cases} 2^x-3>0 \\ 2^x-3 \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 3 < 2^x \leq \frac{13}{4} \Rightarrow \log_2 3 < x \leq \log_2\frac{13}{4}.$

Б) $\log_2(2^x-3) \geq 1 \Rightarrow 2^x-3 \geq 2,\ \ 2^x \geq 5,\ \ x \geq \log_2 5.$

Ответ: $\left(\log_2 3; \log_2\frac{13}{4}\right] \cup \left[\log_2 5; +\infty\right).$

Пример 7. $\log_2(2^x-5) - \log_{2^x-5} 16 \geq -3.$

Замена: $t = \log_2(2^x-5)$, $\log_{2^x-5} 16 = 4\log_{2^x-5} 2 = \dfrac{4}{\log_2(2^x-5)} = \dfrac{4}{t}$. Решим неравенство для t: $t - \dfrac{4}{t} + 3 \geq 0$, $\dfrac{t^2+3t-4}{t} \geq 0$, $t \leq -4$ или $0 < t \leq 1$. Обратная замена:

А) $\log_2(2^x-5)\le -4 \Rightarrow \begin{cases} 2^x-5>0 \\ 2^x-5\le \dfrac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow 5<2^x\le \dfrac{81}{16}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow \log_2 5<x\le 4\log_2\dfrac{3}{2}.$

Б) $0<\log_2(2^x-5)\le 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^x-5>1 \\ 2^x-5\le 2 \end{cases} \Rightarrow 6<2^x\le 7 \Rightarrow \log_2 6<x\le \log_2 7.$

Ответ: $\left(\log_2 5; 4\log_2\dfrac{3}{2}\right] \cup (\log_2 6; \log_2 7].$

Пример 8. $x\cdot 4^{\log_x 8}\ge 32.$

Учтем ОДЗ: $x>0$, $x\ne 1$ и прологарифмируем обе части по основанию 2:

$\log_2\left(x\cdot 4^{\log_x 8}\right)\ge \log_2 32,\ \log_2 x+\log_2\left(\left(2^2\right)^{3\log_x 2}\right)\ge 5,\ \log_2 x+6\log_x 2-5\ge 0,\ \log_2 x+\dfrac{6}{\log_2 x}-5\ge 0.$

Замена: $t=\log_2 x,\ \dfrac{t^2-5t+6}{t}\ge 0,\ 0<t\le 2$ или $t\ge 3.$

А) $0<\log_2 x\le 2 \Rightarrow 1<x\le 4.$

Б) $\log_2 x\ge 3 \Rightarrow x\ge 8.$

Ответ: (1: 4]U[8; +∞).

Пример 9. $\left|\log_2\dfrac{x}{6}\right|^{x^2-18x+56}>1.$

ОДЗ: $x>0$, $x\ne 6$ (подмодульное выражение не должно равняться нулю). Прологарифмируем обе части по основанию 2: $(x^2-18x+56)\cdot\log_2\left|\log_2\dfrac{x}{6}\right|>0$ и решим полученное неравенство методом интервалов.

А) $x^2-18x+56=0$, $x_1=4$, $x_2=14$.

Б) $\log_2\left|\log_2\dfrac{x}{6}\right|=0,\ \left|\log_2\dfrac{x}{6}\right|=1,\ \log_2\dfrac{x}{6}=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{6}=2 \\ \dfrac{x}{6}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=3 \end{array}\right..$

Расставим знаки на интервалах, учитывая, что при $x>14$ левая часть неравенства положительна, а при $x=6$ ни один из множителей не меняет знак:

+ – + + – +

0 3 4 6 12 14

Ответ: (0; 3)U(4; 6)U(6; 12)U(14; +∞).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\log_4(16^x-3\cdot 4^x+54)<3$
2. $(x+1)^{\log_{x-5}9}\ge 81$
3. $(x+1)^{\log_3(x-1)}\ge x^2-2x+1$
4. $x^{2\lg x+1}<10x^2$
5. $x^{2\log_4 x-2}\ge 16x$
6. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)\le -2$
7. $\log_3(3^x-1)-\log_{3^x-1}729\ge 1$
8. $x\cdot 3^{\log_x 7}\le 21$
9. $|\lg x|^{\lg^2 x-\lg x-2}<1$
10. $\log_{\frac{2}{3}^{|x-2|}}2^{1-x^2}\ge 0$

Ответы

1) $(-\infty; \log_4 5)$ 2) (6; 8] 3) (1; 2]U[8; +∞) 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};10\right)$

5) $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup[16;+\infty)$ 6) $\left(0;\log_2\frac{5}{4}\right]\cup[\log_2 3;+\infty)$ 7) $\left[\log_3\frac{10}{9};\log_3 2\right)\cup[\log_3 28;+\infty)$

8) (0; 1)U[3; 7] 9) (10; 100) 10) $\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup[1;2)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)$