Занятие 2

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Разберем основные методы решения двух видов рациональных уравнений – дробно-рациональных и уравнений высших степеней.

Решение дробно-рациональных уравнений нередко сводится к решению обычных квадратных уравнений, но с учетом ограничений на допустимые значения неизвестного. В частности, из ОДЗ исключаются те значения x, при которых хотя бы один из знаменателей дробей, входящих в уравнение, обращается в 0.

Пример 1. $\frac{1}{x+4}+\frac{6}{x^2-16}-\frac{x^2+x}{x^3+64}=0.$

Зададим ОДЗ: $x+4\neq 0,\ x^2-16\neq 0,\ x^3+64\neq 0,$ откуда $x\neq \pm 4.$

Найдем наименьший общий знаменатель трех дробей (важно привести их не просто к общему знаменателю, а именно к ***наименьшему***, иначе в результате может получиться уравнение слишком высокой степени, решить которое мы не сумеем).

Разложим на множители второй и третий знаменатели:

$x^2-16=(x-4)(x+4),\ x^3+64=x^3+4^3=(x+4)(x^2-4x+16).$ Тогда наименьший общий знаменатель имеет вид: $(x-4)(x+4)(x^2-4x+16)$.

Теперь можно умножить обе части уравнения на найденный общий знаменатель.

Равенство при этом не нарушится, так как при условии, что $x\neq\pm 4$, то есть в рамках ОДЗ, общий знаменатель не равен 0.

После этого нужно решить уравнение

$(x-4)(x^2-4x+16)+6(x^2-4x+16)-(x^2+x)(x-4)=0.$ После упрощения получаем:

$x^2+12x+32=0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -8$ и $x_2 = -4$, но число – 4 не входит в ОДЗ.

С учетом этого оказывается, что уравнение имеет единственное решение: $x = 8$.

Ответ: $x = 8$.

Пример 2. $\frac{5}{x^2-14x+24}-\frac{4}{x^2-16x+48}=\frac{1}{x-4}.$

Применим ту же последовательность действий.

Для определения ОДЗ найдем корни всех знаменателей:

$x^2 - 14x + 24 = 0;\ x_1 = 2,\ x_2 = 12.$

$x^2 - 16x + 48 = 0;\ x_1 = 4,\ x_2 = 12.$

$x - 4 = 0;\ x = 4.$

Следовательно, ОДЗ имеет вид: $x \neq 2,\ x \neq 4,\ x \neq 12.$

$x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 12),\ x^2 - 16x + 48 = (x - 4)(x - 12)$, наименьший общий знаменатель равен $(x - 2)(x - 4)(x - 12)$. Умножим на него обе части равенства:

$5(x - 4) - 4(x - 2) = x^2 - 14x + 24;\ x^2 - 15x + 36 = 0;\ x_1 = 3,\ x_2 = 12$ – посторонний корень (не входит в ОДЗ).

Ответ: $x = 3$.

Таким образом, можно составить для себя своего рода инструкцию по решению уравнений такого типа:

1) определить ОДЗ (ни один знаменатель не может равняться нулю);
2) Найти наименьший общий знаменатель всех дробей;
3) умножить уравнение на этот знаменатель и решить полученное целое уравнение;
4) включить в ответ только те корни, которые входят в ОДЗ.

Конечно, не все дробно-рациональные уравнения можно решить таким образом. Если механическое приведение к общему знаменателю приводит к необходимости решения уравнения степени выше второй, можно попробовать сделать в исходном уравнении замену переменной так, чтобы для нового неизвестного получить уравнение меньшей степени.

Пример 3. $\frac{4x+20}{x^2+5x+14}+\frac{x^2+5x+14}{x+5}=5.$

Если записать уравнение в виде $4\cdot\frac{x+5}{x^2+5x+14}+\frac{x^2+5x+14}{x+5}=5$**,** то легко видеть, что его левая часть содержит две взаимно обратные дроби. Введем новое неизвестное: $t=\frac{x^2+5x+14}{x+5}$, тогда $\frac{x+5}{x^2+5x+14}=\frac{1}{t}$, и уравнение для t выглядит так: $\frac{4}{t}+t=5,$ или $t^2-5t+4=0$. Отсюда $t_1=1$, $t_2=4$.

А) $\frac{x^2+5x+14}{x+5}=1,\ \ x^2+4x+9=0,\ \ D<0$ - нет решений.

Б) $\frac{x^2+5x+14}{x+5}=4,\ \ x^2+x-6=0,\ \ x_1=2,\ \ x_2=-3.$

Ответ: $x = 2$, $x = -3$.

Обратите внимание на то, что попытка решить это уравнение приведением к общему знаменателю привела бы нас к уравнению четвертой степени, общая формула корней которого вам не известна. С помощью замены уравнение превратилось в квадратное, техника решения которого проста.

Пример 4. $\frac{5}{x(x+2)}-\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{11}{12}.$

Раскроем скобки в знаменателях левой части уравнения: $\frac{5}{x^2+2x}-\frac{3}{x^2+2x+1}=\frac{11}{12}.$

Видим, что x дважды входит в выражение x^2+2x и больше в уравнении не присутствует.

Сделаем замену: $t=x^2+2x$ и решим уравнение $\frac{5}{t}-\frac{3}{t+1}=\frac{11}{12}$. ОДЗ: $t\neq 0,\ \ t\neq -1.$

Упрощая, получим: $11t^2-13t-60=0$, $t_1=3$, $t_2=-\frac{20}{11}$ (оба значения входят в ОДЗ).

А) $x^2+2x=3$, $x^2+2x-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$.

Б) $x^2+2x=-\frac{20}{11},\ \ 11x^2+22x+20=0,\ \ D<0-$ решений нет.

Ответ: $x=1$, $x=-3$.

Пример 5. $\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-7\cdot\frac{x+3}{x}+6\left(\frac{x-3}{x}\right)^2=0.$

ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq 3$.

Обратим внимание на то, что дробь, стоящая во втором слагаемом, равна произведению дробей, возводимых в квадрат в первом и третьем слагаемых, и введем две новые неизвестные: $u=\frac{x+3}{x-3}$ и $v=\frac{x-3}{x}$. Они должны удовлетворять уравнению

$u^2 - 7uv + 6v^2 = 0$. Это однородное уравнение второй степени. Поскольку $v \neq 0$ (так как $x \neq 3$), можно разделить обе части равенства на v^2: $\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 7\frac{u}{v} + 6 = 0$. Пусть $t = \frac{u}{v}$, тогда $t^2 - 7t + 6 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 6$.

А) $\frac{u}{v} = 1,\ \frac{x+3}{x-3} : \frac{x-3}{x} = 1,\ x^2 + 3x = x^2 - 6x + 9,\ 9x = 9,\ x = 1.$

Б) $\frac{u}{v} = 6,\ \frac{x+3}{x-3} : \frac{x-3}{x} = 1,\ x^2 + 3x = 6x^2 - 36x + 54,\ 5x^2 - 39x + 54 = 0,\ x_1 = 6,\ x_2 = 1{,}8.$

Ответ: $x = 1$, $x = 1{,}8$, $x = 6$.

Замена переменной – очень удобный способ решения уравнений (и не только рациональных). Конечно, подходящую замену нужно «увидеть», а для этого необходимо накапливать опыт – только он поможет вам быстро найти наиболее удачный вид нового неизвестного.

Отдельный вид уравнений, которые можно с помощью замены свести к квадратному, - так называемые **возвратные уравнения**, а именно уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0,$$

где числа a, b, d и f не равны нулю и выполняется равенство: $\frac{a}{f} = \left(\frac{b}{d}\right)^2$. Способ решения таких уравнений рассмотрим на примере:

Пример 6. $6x^4 - 13x^3 - 57x^2 - 39x + 54 = 0.$

Убедимся, что перед нами возвратное уравнение: $\frac{-13}{-39} = \frac{1}{3},\ \frac{6}{54} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Так как $x = 0$ не является решением уравнения, разделим обе его части на x^2:

$6x^2 - 13x - 57 - \frac{39}{x} + \frac{54}{x^2} = 0$ и перегруппируем слагаемые так:

$6\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{3}{x}\right) - 57 = 0$. Пусть $t = x + \frac{3}{x}$. Тогда $t^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = x^2 + \frac{9}{x^2} + 6$,

следовательно, $x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 - 6$, и для t получаем уравнение: $6(t^2 - 6) - 13t - 57 = 0$, или

$6t^2 - 13t - 93 = 0$, откуда $t_1 = -3$, $t_2 = \frac{31}{6}$.

А) $x + \frac{3}{x} = -3,\ x^2 - 3x + 3 = 0,\ D < 0$ - решений нет.

Б) $x + \frac{3}{x} = \frac{31}{6},\ 6x^2 - 31x + 18 = 0,\ x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{9}{2}$.

Ответ: $x = \frac{2}{3},\ x = \frac{9}{2}$.

Еще одна возможность решить уравнение высшей степени – попытка представить его в виде произведения нескольких множителей, равного нулю (разложение на множители). Один из способов такого разложения – группировка.

Пример 7. $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0.$

Преобразуем левую часть уравнения: $x^3 + 4x^2 - x - 4 = x^2(x + 4) - (x + 4) = (x^2 - 1)(x + 4)$.
Тем самым уравнение приведено к виду $(x^2 - 1)(x + 4) = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$.
Ответ: $x = 1$, $x = -1$, $x = -4$.

Если группировка не получается, можно попытаться найти хотя бы один корень подбором, а затем разделить левую часть уравнения на разность $x - x_0$, где x_0 – найденный корень. Напомним, что в уравнении с целыми коэффициентами все целочисленные корни являются делителями свободного члена.

Пример 8. $x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = 0$.

Выпишем все делители числа 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Очевидно, что уравнение не может иметь положительных корней, так как при подстановке вместо x любого положительного числа левая часть примет положительное значение. Поэтому начнем поиск корней с числа – 1 и убедимся, что оно при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство. Итак, $x_1 = -1$ – корень, найденный подбором. Разделим «уголком» левую часть уравнения на $x – 1$: $(x^3 + 8x^2 + 19x + 12):(x – 1) = (x^2 + 7x + 12)$. Следовательно, уравнение можно записать в виде: $(x – 1)(x^2 + 7x + 12) = 0$, откуда $x_2 = - 3$, $x_3 = - 4$.

Ответ: $x = - 1$, $x = - 3$, $x = - 4$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{10}{x^3+3x+9}-\dfrac{27}{x^3-27}=0$

2. $\dfrac{3}{x^2+14x-32}-\dfrac{2}{x^2+20x+64}=\dfrac{1}{x+4}$

3. $\dfrac{x^{11}-3x^9-2x^2-24x+5}{x^{11}-3x^9-x^2-30x+10}=0$

4. $\dfrac{x^2-4x+15}{x^2-5x+15}-\dfrac{2x}{x^2-2x+15}=1$

5. $x^2-3x+5-\dfrac{3}{x^2-3x+3}=0$

6. $\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-2}+\dfrac{x^2+2x-2}{x^2+2x+3}=-\dfrac{23}{6}$

7. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0$

8. $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$

9. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{27}{x^2+x+1}$

10. $2x^4 – 11x^3 + 26x^2 - 33x + 18 = 0$

Ответы

1) – 16 2) 3 3) 5; 1 4) 5; 3 5) 2; 1 6) – 3; 1
7) – 4; - 3; - 2 8) – 4; - 2; - 1 9) – 6; 4 10) 2; 1,5