Занятие 3

РАЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Если система двух уравнений с двумя неизвестными содержит линейное уравнение, то ее решают **подстановкой**, выражая одно неизвестное через другое:

Пример 1. $\begin{cases} 3x+4y=-19 \\ x^2-9xy+y^2+19=0 \end{cases}$.

Из первого уравнения $y=\frac{-3x-19}{4}$. Подставим это выражение во второе уравнение:

$x^2+\frac{27x^2+171x}{4}+\frac{9x^2+114x+361}{16}+19=0, \quad 133x^2+798x+665=0, \; x^2+6x+5=0,$

x_1 = - 1, x_2 = - 5. Подставим найденные значения x в выражение для y: y_1 = - 4, y_2 = - 1.
Ответ: (-1; - 4), (- 5; - 1).

Если же оба уравнения системы нелинейные, то попытка выразить из какого-либо из них одно неизвестное через другое, даже если она удается, обычно приводит к крайне громоздкому уравнению, часто не решаемому с помощью стандартных технических приемов. Поэтому такие системы нужно преобразовывать к более простому виду.
Один из способов, применяемых для этого, - **замена переменных**.

Пример 2. $\begin{cases} \frac{3x-3y}{x+y}-8\frac{x+y}{3x-3y}=-2 \\ x^2+xy-29y^2=4 \end{cases}$.

Сделаем в первом уравнении замену: $t=\frac{3x-3y}{x+y}$ и решим уравнение для t: $t-\frac{8}{t}=-2$,
$t^2+2t-8=0$, t_1 = - 4, t_2 = 2. После обратной замены получим:

А) $\frac{3x-3y}{x+y}=-4, \; 3x-3y=-4x-4y, \; y=-7x.$ Подставляем во второе уравнение:

x^2 - $7x^2 - 253x^2$ = 4, $x^2=-\frac{4}{259}<0$ - решений нет.

Б) $\frac{3x-3y}{x+y}=2, \; 3x-3y=2x+2y, \; x=5y.$ Тогда из второго уравнения $25y^2+5y^2-29y^2=4$,
$y^2=4$, y_1 = 2, y_2 = - 2. Соответственно x_1 = 10, x_2 = - 10.
Ответ: (10; 2), (- 10; - 2).

Пример 3. $\begin{cases} xy+\frac{x}{y}=4 \\ xy+3\frac{y}{x}=6 \end{cases}$.

В системе присутствуют две комбинации неизвестных: произведение и отношение.
Поэтому удобно ввести два новых неизвестных: $u=xy$ и $v=\frac{x}{y}$. Для них требуется решить систему $\begin{cases} u+v=4 \\ u+\frac{3}{v}=6 \end{cases}$. Эта система, в отличие от исходной, содержит линейное уравнение, что позволяет сделать подстановку:

$u = 4 - v$, $4 - v + \frac{3}{v} = 6$, $v^2 + 2v - 3 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = -3$. Соответственно $u_1 = 3$, $u_2 = 7$. Сделаем обратную замену:

А) $\begin{cases} xy = 3 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$.

Б) $\begin{cases} xy = 7 \\ \frac{x}{y} = -3 \end{cases}$. Можно сразу заметить, что эта система не имеет решений. Действительно, если x и y – числа одного знака, то и произведение, и отношение их положительно, а если это числа разных знаков, то обе соответствующие комбинации отрицательны.

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Еще раз обращаем ваше внимание на то, что в конечном счете система решается подстановкой, но для получения этой подстановки применяются дополнительные операции. Следующая такая операция – **алгебраическое сложение**, то есть замена одного или обоих уравнений системы равенствами, полученными в результате умножения обеих частей исходных уравнений на какое-либо число и сложения их правых и левых частей.

Пример 4. $\begin{cases} 3x + 3y + 2xy = -3 \\ x + y - xy = -11 \end{cases}$.

Умножим второе уравнение на 2 и сложим его с первым: $5x + 5y = -25$, $x + y = -5$, $y = -x - 5$. Подставим это выражение во второе уравнение исходной системы: $x - x - 5 + x^2 + 5x + 11 = 0$, $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Соответственно $y_1 = -3$, $y_2 = -2$.

Ответ: (-2; -3), (_ 3; - 2).

Пример 5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy - 5(x - y) = -17 \end{cases}$.

Воспользуемся алгебраическим сложением, чтобы получить уравнение, в которое входит разность $x - y$ и квадрат этой разности. Для этого вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2: $x^2 - 2xy + y^2 + 10(x - y) = 39$, $(x - y)^2 + 10(x - y) - 39 = 0$. Замена $t = x - y$ приводит к уравнению $t^2 + 10t - 39 = 0$, откуда $t_1 = 3$, $t_2 = -13$.

А) $x - y = 3$, то есть $x = y + 3$. Тогда из второго уравнения $y(y + 3) - 15 = -17$, $y^2 + 3y + 2 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = -2$. При этом $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Б) $x - y = -13$, $x = y - 13$, $y(y - 13) + 65 = -17$, $y^2 - 13y + 82 = 0$, $D < 0$ – решений нет.

Ответ: (2; - 1), (1; - 2).

Для решения следующих систем применим **разложение на множители**.

Пример 6. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 5 \\ 3y^2 + xy = 1 \end{cases}$.

Разложим на множители левые части обоих уравнений: $\begin{cases} x(x + 3y) = 5 \\ y(3y + x) = 1 \end{cases}$ и приравняем отношения левых и правых частей: $\frac{x(x + 3y)}{y(3y + x)} = 5$, $\frac{x}{y} = 5$, $x = 5y$. Получена подстановка, которую удобно применить ко второму уравнению исходной системы: $3y^2 + 5y^2 = 1$, $y^2 = \frac{1}{8}$, $y_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_{1,2} = \pm\frac{5}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{5}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Пример 7. $\begin{cases}(x+1)(2y-1)=0\\ 4xy-x^2-2y^2=1\end{cases}$.

Первое уравнение будет верным равенством в двух случаях:

А) $x + 1 = 0$, $x = - 1$. Тогда из второго уравнения получаем: $- 4y - 1 - 2y^2 = 1$, $y^2 + 2y + 1 = 0$, $y = - 1$.

Б) $2y - 1 = 0$, $y=\frac{1}{2}$, $2x-x^2-\frac{1}{2}=1$, $2x^2-4x+3=0$, $D<0$ - решений нет.

Ответ: (- 1; - 1).

Получить подстановку, то есть найти удобную для дальнейшей работы связь между x и y, можно, если система содержит так называемое **однородное уравнение,** то есть уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$. Делением на y^2 его можно привести к уравнению $at^2 + bt + c = 0$, где $t=\frac{x}{y}$.

Пример 8. $\begin{cases}10x^2-51xy+5y^2=0\\ x^2-y^2=24\end{cases}$.

Убедимся, что $y = 0$ не является решением (это легко проверить подстановкой в оба уравнения). Первое уравнение системы – однородное. Разделим обе его части на y^2 и сделаем замену $t=\frac{x}{y}$: $10t^2 - 51t + 5 = 0$, $t_1 = 5$, $t_2 = 0{,}1$.

А) $\frac{x}{y}=5$, $x=5y$. Подставим во второе уравнение: $25y^2 - y^2 = 24$, $y^2 = 1$, $y=\pm1$, $x=\pm5$.

Б) $\frac{x}{y}=0{,}1$, $y=10x$, $x^2-100x^2=24$, $x^2=-\frac{8}{33}<0$ - решений нет.

Ответ: (5; 1), (- 5; - 1).

Пример 9. $\begin{cases}2x^2+3xy-2y^2=12\\ 2x^2+7xy-4y^2=18\end{cases}$.

Оба уравнения не являются однородными, но их левые части однородны (то есть сумма степеней x и y в каждом слагаемом одинакова). Поэтому из этих двух уравнений можно получить одно однородное. Для этого умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него второе, умноженное на 2 (цель – получить 0 в правой части нового равенства):

$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$. Пусть $t=\frac{x}{y}$: $2t^2 - 51t + 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 0{,}5$.

А) $\frac{x}{y}=2$, $x=2y$. Подставим в первое уравнение: $8y^2 + 6y^2 - 2y^2 = 12$, $y^2 = 1$,

$y=\pm1$, $x=\pm2$.

Б) $\frac{x}{y}=0{,}5$, $y=2x$, $2x^2+6x^2-8x^2=12$, $0=12$ - решений нет.

Ответ: (1; 2), (- 1; - 2).

Пример 10. $\begin{cases}x^4-y^4=240\\ x^3y-xy^3=96\end{cases}$.

Разложим на множители левые части обоих уравнений и разделим каждую часть первого уравнения на соответствующую часть второго: $\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{xy(x^2-y^2)}=\frac{240}{96}$,

$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}$, $\quad 2x^2-5xy+2y^2=0$ - однородное уравнение. Используем решение предыдущего примера:

А) $x = 2y$, $16y^4 - y^4 = 240$, $y^4 = 16$, $y = \pm 2$, $x = \pm 4$.

Б) $y = 2x$, $x^4 - 16x^4 = 240$, $x^4 = -16 < 0$ – решений нет.

Ответ: (2; 4), (- 2; - 4).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ y^2+7x=-12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-4y-xy=-17 \\ x-y-4xy=-68 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy-2(x+y)=26 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{10x+4y}{3x+4y}+3\frac{3x+4y}{10x+4y}=4 \\ x^2+4xy-92y^2=9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-1 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x+2)(y+2)=6 \\ (x+y)(xy-1)=-15 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ xy=-1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} xy^2+x=3y \\ x^2y+2y=4x \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=24 \\ 2x^2-5xy+2y^2=36 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^4+y^4-18x^2-18y^2=-82 \\ x^7+5y^5-4x^3+4y^2+6x=2096 \end{cases}$

Ответы

1) (-4; - 4), (- 3; - 3) 2) (- 5; 3), (- 3; 5) 3) (- 3; - 4), (- 4; - 3)
4) (12; 1,5), (- 12; - 1,5) 5) (½; ⅓), (- ⅓; - ½) 6) (4; - 1), (- 1; 4)
7) (1; - 1), (- 1; 1) 8) $(\sqrt{2};\sqrt{2}),(-\sqrt{2};-\sqrt{2}),(0;0)$ 9) (2; - 2), (- 2; 2) 10) (3; -1)