Занятие 4

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Основной метод решения рациональных (и многих других) неравенств – метод интервалов. Для его применения нужно преобразовать неравенство так, чтобы в правой его части стоял 0, а левая была произведением нескольких множителей или дробью, числитель и знаменатель которой разложены на множители. Затем находятся корни каждого множителя (то есть от решения неравенства вы переходите к решению уравнений), и среди них выделяются такие, в которых ни один из имеющихся множителей не меняет знак, или меняет знак четное количество множителей. В дальнейшем такие корни, если они найдутся, мы будем называть **кратными** (хотя это не совсем точно). Для окончательного решения неравенства остается нанести найденные корни на числовую прямую, найти знак левой части неравенства только на одном интервале, ограниченном полученными точками, и расставить знаки на остальных интервалах, меняя их при переходе через простой корень и не меняя при переходе через кратный.

Пример 1. $(x-6)^2 > (x-4)^2$.
Перенесем все слагаемые в левую часть и разложим ее на множители, используя формулу разности квадратов: $(x-6+x-4)(x-6-x+4) > 0$, $(2x-10)(-2) > 0$. Левая часть неравенства равна 0 при $x = 5$ и меняет знак в этой точке. При $x = 0$ $(-10)(-2) > 0$, поэтому знаки на координатной прямой распределяются следующим образом:

+ –
_______________o__________________
5

Следовательно, решением неравенства является интервал $(-\infty; 5)$.
Ответ: $(-\infty; 5)$.

Пример 2. $(x^2-6x+8)(x^2-11x+28) < 0$.
После разложения на множители получаем: $(x-2)(x-4)^2(x-7) < 0$. $x = 4$ – кратный корень, потому что $(x-4)^2 > 0$ и при $x < 4$, и при $x > 4$. Поэтому на интервалах, разделенных точкой 4, левая часть неравенства будет иметь одинаковые знаки, а точки 2 и 7 разделяют интервалы с разными знаками левой части. При $x = 0$ левая часть неравенства положительна, следовательно, знаки распределяются так:

+ – – +
_________________o___________o__________o________________
2 4 7

Ответ: $(2; 4) \cup (4; 7)$.

Пример 3. $8(2x+5)(x^2+x+20) < 16(2x+5)^2 + (x^2+x+20)^2$.
Перенесем все слагаемые в правую часть и прочтем неравенство «справа налево»: $16(2x+5)^2 + (x^2+x+20)^2 - 8(2x+5)(x^2+x+20) > 0$. Теперь заметим, что в левой части полученного неравенства стоит полный квадрат: $(4(2x+5) - (x^2+x+20))^2 > 0$. Значит, неравенство будет верным при любом значении x, кроме тех, при которых его левая часть равна нулю, то есть кроме корней уравнения $4(2x+5) - (x^2+x+20) = 0$. Решим это уравнение: $x^2 - 7x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Следовательно, решение неравенства можно записать в виде: $x \neq 0$, $x \neq 7$, или $x \in (-\infty;0) \cup (0;7) \cup (7;\infty)$.
Ответ: $(-\infty;0) \cup (0;7) \cup (7;\infty)$.

Перейдем к решению дробно-рациональных неравенств. Хочется сразу предостеречь вас от самой распространенной ошибки: умножения обеих частей неравенства на общий знаменатель. Если при разных значениях x знаменатель может менять знак, то избавляться

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

от него нельзя. Почему? Потому что при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не меняется, а на отрицательное – меняется на обратный. Поэтому, решая такое неравенство, вы должны учитывать знак не только числителя, но и знаменателя. Порядок работы можно описать так:
1) перенести все слагаемые в левую часть неравенства;
2) привести левую часть к наименьшему общему знаменателю;
3) найти корни числителя и знаменателя полученной дроби; проверить, есть ли среди них кратные;
4) решить неравенство методом интервалов с учетом кратных корней.

Пример 4. $\frac{4x^2-11x-21}{x^2-4x-5} \le 3$.
Выполним последовательно пункты приведенной «инструкции»:
1) $\frac{4x^2-11x-21}{x^2-4x-5} - 3 \le 0$.
2) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5} \le 0$.
3) $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; $x^2 - 4x - 5 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Теперь можно разложить числитель и знаменатель на множители: $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-5)} \le 0$. Видим, что в каждой найденной точке меняет знак ровно один из множителей, то есть меняет знак и вся дробь.
4) При $x = 0$ дробь принимает положительное значение. Расставим знаки на интервалах:

```
     +           -            +            -            +
__________•_________o___________•__________o______________
         - 3       - 1           2           5
```

В ответе укажем промежутки, на которых дробь отрицательна. Не забудем учесть, что корни знаменателя в ответ никогда не входят (знаменатель не может равняться нулю), а корни числителя войдут в ответ, если неравенство нестрогое.
Ответ: $[-3; -1) \cup [2; 5)$.

Пример 5. $\frac{2x^2+17x+36}{x^2+6x+5} \ge \frac{x+4}{x+1}$.
$\frac{2x^2+17x+36}{(x+1)(x+5)} - \frac{x+4}{x+1} \ge 0$, $\frac{2x^2+17x+36-(x+4)(x+5)}{(x+1)(x+5)} \ge 0$, $\frac{x^2+8x+16}{(x+1)(x+5)} \ge 0$,
$\frac{(x+4)^2}{(x+1)(x+5)} \ge 0$. Корень числителя ($x = -4$) – кратный, так как при этом значении x ни один множитель не меняет знак. Корни знаменателя: $x = -5$ и $x = -1$. При $x = 0$ дробь положительна. Знаки на интервалах:

```
              +           -       -           +
_______________o__________•________o___________
              - 5        - 4      - 1
```

Заметим, что неравенство нестрогое, поэтому точка -4 входит в ответ.
Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$, $x = -4$.

Если для решения неравенства используется замена переменной, то важно не сделать раньше времени обратную замену. Сначала нужно полностью решить неравенство для вспомогательного неизвестного, найти его возможные значения (записав их не в интервальной форме, а в виде одного или нескольких неравенств), и только после этого подставить в эти неравенства выражение для вспомогательного неизвестного.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Пример 6. $x^2-7x+16-\dfrac{20}{x^2-7x+17}\le 0.$

Сделаем замену: $t = x^2 - 7x + 17$ и решим неравенство $t-1-\dfrac{20}{t}\le 0,\quad \dfrac{t^2-t-20}{t}\le 0,$

$\dfrac{(t-5)(t+4)}{t}\le 0$. Его решение можно записать так: $t \le -4,\ 0 < t \le 5$. После обратной замены получим:

А) $x^2-7x+17\le -4,\ \ x^2-7x+21\le 0$. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части, отрицателен, следовательно, левая часть неравенства не может изменить знак, то есть сохраняет постоянный знак при любом значении x. Поскольку при $x = 0$ она отрицательна, то неравенство решений не имеет.

Б) $\begin{cases}x^2-7x+17>0\\ x^2-7x+17\le 5\end{cases},\quad \begin{cases}x^2-7x+17>0\\ x^2-7x+12\le 0\end{cases}$. Первое неравенство верно всегда, решение второго: $3 \le x \le 4$. Оно и будет окончательным ответом.

Ответ: [3; 4].

Пример 7. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) < 180$.

Разложим на множители оба квадратных трехчлена: $(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) < 180$, и перемножим их в другом порядке (первый с последним и второй с третьим): $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) < 180$. Теперь можно сделать замену: $t = x^2 - 6x + 5$, тогда $t(t + 3) < 180$, $t^2 + 3t - 180 < 0$, $(t + 15)(t - 12) < 0$, $-15 < t < 12$. Обратная замена:

$\begin{cases}x^2-6x+5>-15\\ x^2-6x+5<12\end{cases},\quad \begin{cases}x^2-6x+20>0\ -\ \textit{верно всегда}\\ x^2-6x-7<0\Rightarrow -1<x<7\end{cases}.$

Ответ: (-1; 7).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 < 0$
2. $\dfrac{3x^2+20x+26}{x^2+6x+5}<2$
3. $\dfrac{2x^2+12x+17}{x^2+4x}\ge\dfrac{x+2}{x}$
4. $(x^2 - 3x + 2)^2 + (x^4 - 5x - 6)^2 \le 0$
5. $x^2-3x+1+\dfrac{4}{x^2-3x+6}\le 0$
6. $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10) \le 40$
7. $30x^2 > (x - 2)(x - 3)(x^2 - 10x + 24)$
8. $\dfrac{x^2}{4-x}+\dfrac{2x-8}{x^2}\ge 1$
9. $x^3-\dfrac{1}{x^3}\ge 4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
10. $\dfrac{1}{x^2+x}\le\dfrac{1}{2x^2+2x+3}$

Ответы

1) $(-\infty; -4)$U$(-3; -2)$ 2) $(-5; -4)$U$(-4; -1)$ 3) $(-\infty; -4)$U$(0; \infty)$; $x = 3$

4) 2 5) [1; 2] 6) [0; 6] 7) (1; 12) 8) $(-\infty; -4]$U$[2; 4)$

9) $\left[\dfrac{-1-\sqrt5}{2};-1\right]\cup\left[\dfrac{1-\sqrt5}{2};0\right)\cup\left[\dfrac{\sqrt5-1}{2};1\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt5+1}{2};\infty\right)$ 10) $(-1; 0)$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com