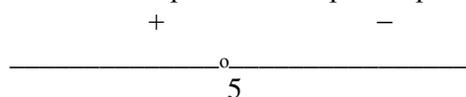


## РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Основной метод решения рациональных (и многих других) неравенств – метод интервалов. Для его применения нужно преобразовать неравенство так, чтобы в правой его части стоял 0, а левая была произведением нескольких множителей или дробью, числитель и знаменатель которой разложены на множители. Затем находятся корни каждого множителя (то есть от решения неравенства вы переходите к решению уравнений), и среди них выделяются такие, в которых ни один из имеющихся множителей не меняет знак, или меняет знак четное количество множителей. В дальнейшем такие корни, если они найдутся, мы будем называть **кратными** (хотя это не совсем точно). Для окончательного решения неравенства остается нанести найденные корни на числовую прямую, найти знак левой части неравенства только на одном интервале, ограниченном полученными точками, и расставить знаки на остальных интервалах, меняя их при переходе через простой корень и не меняя при переходе через кратный.

**Пример 1.**  $(x - 6)^2 > (x - 4)^2$ .

Перенесем все слагаемые в левую часть и разложим ее на множители, используя формулу разности квадратов:  $(x - 6 + x - 4)(x - 6 - x + 4) > 0$ ,  $(2x - 10)(-2) > 0$ . Левая часть неравенства равна 0 при  $x = 5$  и меняет знак в этой точке. При  $x = 0$   $(-10)(-2) > 0$ , поэтому знаки на координатной прямой распределяются следующим образом:

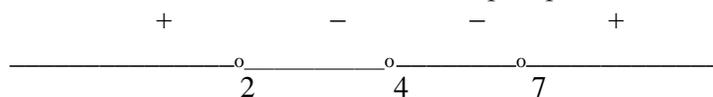


Следовательно, решением неравенства является интервал  $(-\infty; 5)$ .

Ответ:  $(-\infty; 5)$ .

**Пример 2.**  $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 11x + 28) < 0$ .

После разложения на множители получаем:  $(x - 2)(x - 4)^2(x - 7) < 0$ .  $x = 4$  – кратный корень, потому что  $(x - 4)^2 > 0$  и при  $x < 4$ , и при  $x > 4$ . Поэтому на интервалах, разделенных точкой 4, левая часть неравенства будет иметь одинаковые знаки, а точки 2 и 7 разделяют интервалы с разными знаками левой части. При  $x = 0$  левая часть неравенства положительна, следовательно, знаки распределяются так:



Ответ:  $(2; 4) \cup (4; 7)$ .

**Пример 3.**  $8(2x + 5)(x^2 + x + 20) < 16(2x + 5)^2 + (x^2 + x + 20)^2$ .

Перенесем все слагаемые в правую часть и прочтем неравенство «справа налево»:

$16(2x + 5)^2 + (x^2 + x + 20)^2 - 8(2x + 5)(x^2 + x + 20) > 0$ . Теперь заметим, что в левой части полученного неравенства стоит полный квадрат:  $(4(2x + 5) - (x^2 + x + 20))^2 > 0$ . Значит, неравенство будет верным при любом значении  $x$ , кроме тех, при которых его левая часть равна нулю, то есть кроме корней уравнения  $4(2x + 5) - (x^2 + x + 20) = 0$ . Решим это уравнение:  $x^2 - 7x = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 7$ . Следовательно, решение неравенства можно записать в виде:  $x \neq 0$ ,  $x \neq 7$ , или  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 7) \cup (7; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (0; 7) \cup (7; \infty)$ .

Перейдем к решению дробно-рациональных неравенств. Хочется сразу предостеречь вас от самой распространенной ошибки: умножения обеих частей неравенства на общий знаменатель. Если при разных значениях  $x$  знаменатель может менять знак, то избавляться

от него нельзя. Почему? Потому что при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не меняется, а на отрицательное – меняется на обратный. Поэтому, решая такое неравенство, вы должны учитывать знак не только числителя, но и знаменателя. Порядок работы можно описать так:

- 1) перенести все слагаемые в левую часть неравенства;
- 2) привести левую часть к наименьшему общему знаменателю;
- 3) найти корни числителя и знаменателя полученной дроби; проверить, есть ли среди них кратные;
- 4) решить неравенство методом интервалов с учетом кратных корней.

**Пример 4.**  $\frac{4x^2 - 11x - 21}{x^2 - 4x - 5} \leq 3.$

Выполним последовательно пункты приведенной «инструкции»:

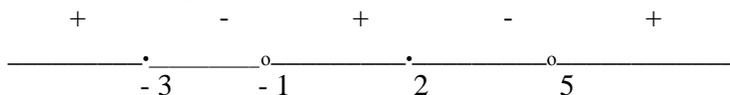
1)  $\frac{4x^2 - 11x - 21}{x^2 - 4x - 5} - 3 \leq 0.$

2)  $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x - 5} \leq 0.$

3)  $x^2 + x - 6 = 0, x_1 = -3, x_2 = 2; x^2 - 4x - 5 = 0, x_1 = -1, x_2 = 5.$  Теперь можно разложить числитель и знаменатель на множители:  $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-5)} \leq 0.$  Видим, что в каждой найденной

точке меняет знак ровно один из множителей, то есть меняет знак и вся дробь.

4) При  $x = 0$  дробь принимает положительное значение. Расставим знаки на интервалах:



В ответе укажем промежутки, на которых дробь отрицательна. Не забудем учесть, что корни знаменателя в ответ никогда не входят (знаменатель не может равняться нулю), а корни числителя войдут в ответ, если неравенство нестрогое.

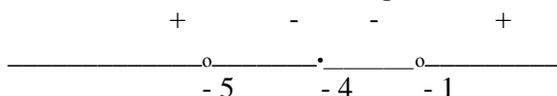
Ответ:  $[-3; -1) \cup [2; 5).$

**Пример 5.**  $\frac{2x^2 + 17x + 36}{x^2 + 6x + 5} \geq \frac{x+4}{x+1}.$

$$\frac{2x^2 + 17x + 36}{(x+1)(x+5)} - \frac{x+4}{x+1} \geq 0, \quad \frac{2x^2 + 17x + 36 - (x+4)(x+5)}{(x+1)(x+5)} \geq 0, \quad \frac{x^2 + 8x + 16}{(x+1)(x+5)} \geq 0,$$

$$\frac{(x+4)^2}{(x+1)(x+5)} \geq 0. \text{ Корень числителя } (x = -4) \text{ – кратный, так как при этом значении } x \text{ ни}$$

один множитель не меняет знак. Корни знаменателя:  $x = -5$  и  $x = -1$ . При  $x = 0$  дробь положительна. Знаки на интервалах:



Заметим, что неравенство нестрогое, поэтому точка  $-4$  входит в ответ.

Ответ:  $(-\infty; -5) \cup (-1; \infty), x = -4.$

Если для решения неравенства используется замена переменной, то важно не сделать раньше времени обратную замену. Сначала нужно полностью решить неравенство для вспомогательного неизвестного, найти его возможные значения (записав их не в интервальной форме, а в виде одного или нескольких неравенств), и только после этого подставить в эти неравенства выражение для вспомогательного неизвестного.

**Пример 6.**  $x^2 - 7x + 16 - \frac{20}{x^2 - 7x + 17} \leq 0.$

Сделаем замену:  $t = x^2 - 7x + 17$  и решим неравенство  $t - 1 - \frac{20}{t} \leq 0, \quad \frac{t^2 - t - 20}{t} \leq 0,$

$$\frac{(t-5)(t+4)}{t} \leq 0. \text{ Его решение можно записать так: } t \leq -4, \quad 0 < t \leq 5. \text{ После обратной}$$

замены получим:

А)  $x^2 - 7x + 17 \leq -4, \quad x^2 - 7x + 21 \leq 0.$  Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части, отрицателен, следовательно, левая часть неравенства не может изменить знак, то есть сохраняет постоянный знак при любом значении  $x$ . Поскольку при  $x = 0$  она отрицательна, то неравенство решений не имеет.

Б)  $\begin{cases} x^2 - 7x + 17 > 0 \\ x^2 - 7x + 17 \leq 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 17 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 \leq 0 \end{cases}.$  Первое неравенство верно всегда, решение

второго:  $3 \leq x \leq 4.$  Оно и будет окончательным ответом.

Ответ: [3; 4].

**Пример 7.**  $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) < 180.$

Разложим на множители оба квадратных трехчлена:  $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) < 180,$  и перемножим их в другом порядке (первый с последним и второй с третьим):

$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) < 180.$  Теперь можно сделать замену:  $t = x^2 - 6x + 5,$  тогда  $t(t+3) < 180, \quad t^2 + 3t - 180 < 0, \quad (t+15)(t-12) < 0, \quad -15 < t < 12.$  Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > -15 \\ x^2 - 6x + 5 < 12 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 20 > 0 \\ x^2 - 6x - 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 7.$$

Ответ: (-1; 7).

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.  $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 < 0$
2.  $\frac{3x^2 + 20x + 26}{x^2 + 6x + 5} < 2$
3.  $\frac{2x^2 + 12x + 17}{x^2 + 4x} \geq \frac{x+2}{x}$
4.  $(x^2 - 3x + 2)^2 + (x^4 - 5x - 6)^2 \leq 0$
5.  $x^2 - 3x + 1 + \frac{4}{x^2 - 3x + 6} \leq 0$
6.  $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 10) \leq 40$
7.  $30x^2 > (x-2)(x-3)(x^2 - 10x + 24)$
8.  $\frac{x^2}{4-x} + \frac{2x-8}{x^2} \geq 1$
9.  $x^3 - \frac{1}{x^3} \geq 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$
10.  $\frac{1}{x^2 + x} \leq \frac{1}{2x^2 + 2x + 3}$

### Ответы

- 1)  $(-\infty; -4) \cup (-3; -2)$
- 2)  $(-5; -4) \cup (-4; -1)$
- 3)  $(-\infty; -4) \cup (0; \infty); x = 3$
- 4) 2
- 5) [1; 2]
- 6) [0; 6]
- 7) (1; 12)
- 8)  $(-\infty; -4] \cup [2; 4)$
- 9)  $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \infty\right)$
- 10) (-1; 0)