Занятие 5

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Основной прием решения модульных уравнений и неравенств – раскрытие модуля с использованием его определения ($|a| = a$ при $a \geq 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$). Для этого обычно рассматривают отдельно два случая: случай, когда подмодульное выражение неотрицательно и когда оно отрицательно.

Пример 1. $x^2 - 6x + 6 + |x - 6| = 0$.
Рассмотрим две возможности:
А) $x - 6 \geq 0$, то есть $x \geq 6$. Тогда $|x - 6| = x - 6$, и уравнение принимает вид:
$x^2 - 6x + 6 + x - 6 = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Видим, что оба корня не соответствуют условию, поставленному на знак подмодульного выражения, следовательно, являются посторонними.
Б) $x - 6 < 0$, $x < 6$; $x^2 - 6x + 6 - x + 6 = 0$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ – оба корня соответствуют поставленному условию.
Ответ: $x = 3$, $x = 4$.

Аналогично решаются модульные неравенства этого типа, но если в уравнении достаточно проверить полученные корни на соответствие условию, задающему знак подмодульного выражения, то решением неравенства является объединение решений двух систем, состоящих из условия на знак подмодульного выражения и неравенства, полученного из исходного после раскрытия модуля.

Пример 2. $\dfrac{2x+4}{|4x+5|-1} \leq 3$.

А) Пусть $4x + 5 \geq 0$, тогда нужно решить систему неравенств: $\begin{cases} 4x+5 \geq 0 \\ \dfrac{2x+4}{4x+4} \leq 3 \end{cases}$,

$\begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{-5x-4}{2x+2} \leq 0 \end{cases}$. Решая второе неравенство методом интервалов, получим: $x < -1$, $x \geq -\dfrac{4}{5}$.

С учетом решения первого неравенства $-\dfrac{5}{4} \leq x < -1$, $x \geq -\dfrac{4}{5}$.

Б) $\begin{cases} 4x+5 < 0 \\ \dfrac{2x+4}{-4x-6} \leq 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x < -\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{7x+11}{-2x-3} \leq 0 \end{cases}$, $- \begin{cases} x < -\dfrac{5}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{11}{7} \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. \end{cases}$, и окончательно $x \leq -\dfrac{11}{7}$, $-\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{5}{4}$.

Объединяя решения обеих систем, находим окончательный ответ.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{11}{7}\right] \cup \left(-\dfrac{3}{2}; -1\right) \cup \left[-\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$.

Процесс решения можно сократить в том случае, когда неизвестное входит только в подмодульное выражение. При этом обычно нет надобности исследовать знак этого выражения, так как его значение ограничивается конкретными числами.

Пример 3. $| x^2 + 2x – 16| = 8$.
Выражение, модуль которого равен 8, может принимать только два значения: 8 и – 8.
А) $x^2 + 2x – 16 = 8$, $x^2 + 2x – 24 = 0$, $x_1 = - 6$, $x_2 = 4$.
Б) $x^2 + 2x – 16 = - 8$, $x^2 + 2x – 8 = 0$, $x_3 = - 4$, $x_4 = 2$.
Отметим, что при таком способе решения не требуется проверка корней, так как среди них не может быть посторонних – при каждом из найденных значений x модуль выражения $x^2 + 2x – 16$ равен 8.
Ответ: $x = - 6$, $x = - 4$, $x = 2$, $x = 4$.

Пример 4. $| | 2x – 3 | - 7 | > 6$.
Из неравенства $| a | > b$ (при $b > 0$) следует, что $a > b$ или $a < - b$. Рассмотрим эти случаи отдельно:

А) $| 2x – 3 | - 7 > 6$, $| 2x – 3 | > 13$, $\left[\begin{array}{l} 2x-3>13 \\ 2x-3<-13 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x>8 \\ x<-5 \end{array}\right.$.

Б) $| 2x – 3 | - 7 < - 6$, $| 2x – 3 | < 1$. Вспомним, что неравенство $| a | < b$ выполняется, если $- b < a < b$. Соответственно $– 1 < 2x – 3 < 1$, $2 < 2x < 4$, $1 < x < 2$.
Окончательным ответом будет объединение полученных решений.
Ответ: $(- \infty; - 5)\cup(1; 2)\cup(8; + \infty)$.

Пример 5. $| x^2 – 3x + 3 | = | 2x – 3|$.
Равенство $| a | = | b |$ верно в двух случаях: $a = b$ или $a = - b$. Применим это утверждение к решению уравнения:
А) $x^2 – 3x + 3 = 2x – 3$, $x^2 – 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Б) $x^2 – 3x + 3 = - 2x + 3$, $x^2 – x = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.
Вновь, как и в примере 3, выбранный способ решения не приводит к появлению посторонних корней.
Ответ: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

В уравнениях и неравенствах, в которые входит алгебраическая сумма нескольких модулей, можно «убрать» их все одновременно. Для этого достаточно найти корни каждого подмодульного выражения, отметить соответствующие точки на числовой прямой и получить интервалы, на каждом из которых все подмодульные выражения сохраняют постоянный знак. Определив эти знаки, мы можем заменить каждый модуль либо подмодульным выражением, либо выражением, противоположным ему.

Пример 6. $| 2x + 2 | - | x | = x + 2$.
Найдем корни подмодульных выражений: $x = - 1$ и $x = 0$ – и определим знаки этих выражений на интервалах $(- \infty; - 1)$, $(- 1; 0)$ и $(0; + \infty)$ (для этого достаточно подставить в каждое подмодульное выражение вместо x какое-нибудь число из выбранного интервала):

– –   + –   + +
————————o——————o——————
          - 1   0

(на первом месте стоит знак первого подмодульного выражения, на втором – второго).
Теперь раскроем на каждом интервале оба модуля с учетом знака подмодульных выражений:

А) $\begin{cases} x<-1 \\ -2x-2+x=x+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x<-1 \\ x=-2 \end{cases}$. Найденный корень располагается на заданном интервале, следовательно, входит в ответ.

Б) $\begin{cases} -1 \le x < 0 \\ 2x+2+x = x+2 \end{cases}$, $\begin{cases} -1 \le x < 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Точка 0 не включена в интервал, поэтому корень оказался посторонним.

В) $\begin{cases} x \ge 0 \\ 2x+2-x = x+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x \ge 0 \\ x+2 = x+2 \end{cases}$. Видим, что на этом промежутке уравнение превратилось в тождество, то есть его решением является любое значение x из рассматриваемого промежутка.

Ответ: $x = -2$, $x \ge 0$.

Отметим две особенности уравнений такого типа, иллюстрацией которых может служить предыдущий пример: во-первых, решением такого уравнения может оказаться не конечный набор чисел, а непрерывный промежуток, и во-вторых, вы можете включать точку, разделяющую интервалы, в любой из соседних промежутков – если она не является решением уравнения, то ее включение в выбранный интервал не изменит набора корней, а если является, то этот корень обязательно получится в каждом из уравнений, к которым сводится исходное уравнение на соседних интервалах, и, соответственно, войдет в ответ (как $x = 0$ в примере 6).

Пример 7. $|x+5| + |2x-3| < 10$.

Корни подмодульных выражений: $x = -5$ и $x = 1{,}5$. Расставим знаки этих выражений на полученных интервалах:

```
            –   –            +    –            +    +
_______________________o________________o________________
                      - 5              1,5
```

Решим три системы неравенств:

А) $\begin{cases} x < -5 \\ -x-5-2x+3 < 10 \end{cases}$, $\begin{cases} x < -5 \\ x > -4 \end{cases}$ - интервалы не пересекаются, решений нет.

Б) $\begin{cases} -5 \le x < 1{,}5 \\ x+5-2x+3 < 10 \end{cases}$, $\begin{cases} -5 \le x < 1{,}5 \\ x > -2 \end{cases}$, $-2 < x < 1{,}5$.

В) $\begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ x+5+2x-3 < 10 \end{cases}$, $\begin{cases} x \ge 1{,}5 \\ x < \dfrac{8}{3} \end{cases}$, $1{,}5 \le x < \dfrac{8}{3}$.

Объединим найденные решения: $-2 < x < \dfrac{8}{3}$.

Ответ: $\left(-2; \dfrac{8}{3}\right)$.

Замена переменной применяется в модульных уравнениях и неравенствах заметно реже, чем в задачах других типов. Тем не менее встречаются задания, в которых удобно сделать замену.

Пример 8. $x^2 - 6x + |x-3| - 3 = 0$.

Заметим, что $x^2 - 6x = (x^2 - 6x + 9) - 9 = (x-3)^2 - 9 = |x-3|^2 - 9$. Введем новое неизвестное $t = |x-3|$ ($t \ge 0$), тогда для t требуется решить уравнение $t^2 - 9 + t - 3 = 0$, $t^2 + t - 12 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -4 < 0$ – посторонний корень. Следовательно, $|x-3| = 3$, $x - 3 = \pm\ 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

Как видим, такой способ решения намного короче и удобнее традиционного.

Решим систему уравнений, содержащую модуль.

Пример 9. $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 24x - 12y + 7 = 0 \\ 3|x-1| + 2y + 4 = 0 \end{cases}$.

А) Пусть $x \ge 1$, тогда система примет вид: $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 24x - 12y + 7 = 0 \\ 3(x-1) + 2y + 4 = 0 \end{cases}$. Сделаем подстановку из второго уравнения: $\begin{cases} y = -\dfrac{3x+1}{2} \\ 9x^2 - 4\cdot\dfrac{(3x+1)^2}{4} - 24x + 6(3x+1) + 7 = 0 \end{cases}$ и упростим полученное уравнение для x: $9x^2 - 9x^2 - 6x - 1 - 24x + 18x + 6 + 7 = 0$, $12 - 12x = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Б) Если $x < 1$, то система выглядит так: $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 24x - 12y + 7 = 0 \\ -3(x-1) + 2y + 4 = 0 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} y = \dfrac{3x-7}{2} \\ 9x^2 - 4\cdot\dfrac{(3x-7)^2}{4} - 24x - 6(3x-7) + 7 = 0 \end{cases}$, $9x^2 - 9x^2 + 42x - 49 - 24x - 18x + 42 + 7 = 0$, $0 = 0$ – тождество, то есть второе уравнение является верным равенством при любом $x < 1$, если y при этом связан с x соотношением $y = \dfrac{3x-7}{2}$. Учитывая результат, полученный в пункте А, запишем окончательный ответ.

Ответ: $\begin{cases} x \le 1 \\ y = \dfrac{3x-7}{2} \end{cases}$.

В заключение – несколько «нестандартных» задач с модулями.

Пример 10. $|x^2 - 2x - 15| + |x^4 + 2x^3 - x^2 - 18| \le 0$.
Оба слагаемых в левой части неотрицательны, поэтому их сумма не может принимать отрицательных значений. В крайнем случае она может равняться нулю – это возможно, если найдется такое значение x, при котором обращаются в 0 одновременно оба подмодульных выражения. Следовательно, решениями неравенства будут общие корни уравнений $x^2 - 2x - 15 = 0$ и $x^4 + 2x^3 - x^2 - 18 = 0$, если, конечно, они имеются.
А) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.
Б) Из пункта А следует, что общими корнями не могут быть никакие числа, кроме – 3 и 5. Поэтому нам нет необходимости решать уравнение четвертой степени $x^4 + 2x^3 - x^2 - 18 = 0$; достаточно подстановкой проверить, являются ли числа – 3 или 5 его корнями. Проверка показывает, что – 3 – корень второго уравнения, а 5 – нет. Значит, неравенство (фактически – равенство) будет верным только при $x = -3$.
Ответ: $x = -3$.

Пример 11. $\dfrac{|3x-14|}{x^2-7x+10} + \dfrac{2}{|x^2-7x+10|} = 0$.

Второе слагаемое положительно при любом допустимом x, поэтому для того, чтобы сумма, стоящая в левой части, равнялась нулю, необходимо, чтобы первое слагаемое было отрицательным. Это приводит к требованию $x^2 - 7x + 10 < 0$ (поскольку числитель дроби неотрицателен, отрицательным должен быть знаменатель). Но при этом $|x^2 - 7x + 10| =$

$= -(x^2 - 7x + 10)$, и уравнение принимает вид: $\frac{|3x-14|}{x^2-7x+10} - \frac{2}{x^2-7x+10} = 0$. Теперь нужно решить систему, состоящую из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 < 0 \\ |3x-14| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 5\frac{1}{3} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $3|x^2 + x - 6| + 8 + 10x = 0$
2. $|x|x| - 81| = (x-1)^2$
3. $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$
4. $\left(\frac{x+|x|}{x-3}\right)^2 - \frac{12x}{x-3} + 5 = 0$
5. $|x| - x + 3 = |2x - 3|$
6. $5|x^2 + 5x + 4| < 26x + 62$
7. $\frac{x^2 - 7|x| + 6}{x^2 - 3|x| - 10} \le 0$
8. $||3x - 5| - 6| \le 4$
9. $|x + 7|(x^2 + 6x - 91) \ge 6x^2 - 294$
10. $\begin{cases} |x-3| + |y| = 10 \\ x^2 - 6x + y^2 - 10y = 39 \end{cases}$

Ответы

1) $-5; -2$ 2) $-40; 41; \frac{1+\sqrt{161}}{2}$ 3) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ 4) $5; \frac{15}{7}$ 5) $x \le 0; x = 3$

6) $(-2; 3)$ 7) $[-6; -5) \cup [-1; 1] \cup (5; 6]$ 8) $\left[-\frac{5}{3}; 1\right] \cup \left[\frac{7}{3}; 15\right]$ 9) $(-\infty; -7] \cup [19; +\infty)$, $x = 7$

10) $(-5; 2)$, $(11; 2)$