Занятие 6

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Весьма распространенный прием решения иррациональных уравнений и неравенств – возведение в квадрат. Тем не менее советуем вам пользоваться им как можно реже, ибо он обладает существенными недостатками: во-первых, возводя в квадрат обе части уравнения, вы расширяете область допустимых значений неизвестного, что может привести к появлению посторонних корней; во-вторых, часто в результате этой операции получается уравнение с громоздкими коэффициентами, работать с которыми затруднительно (особенно если на экзамене не разрешается пользоваться калькулятором). Наконец, главный недостаток этого приема – увеличение вдвое степени уравнения. Возведя обе части в квадрат, вы можете избавиться от иррациональностей, но получить рациональное уравнение степени выше второй, способы решения которого в общем виде вам неизвестны или вообще не существуют.
Если возводить в квадрат все-таки приходится, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить в ответ посторонние корни. В частности, если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то для корней должно выполняться условие $g(x) \ge 0$ (при этом $f(x) = g^2(x) \ge 0$, и условие $f(x) \ge 0$ отдельно ставить не требуется). Еще один способ обнаружить посторонние корни – проверка всех найденных корней подстановкой из в первоначальное уравнение.

Пример 1. $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 4x - 8$.
Корни должны удовлетворять условию $4x - 8 \ge 0$, то есть $x \ge 2$. Возведем обе части в квадрат: $x^2 + 4x - 5 = 16x^2 - 64x + 64$, $15x^2 - 68x + 69 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{23}{15} < 2$ - посторонний корень.
Ответ: $x = 3$.

Замена переменной очень полезна при решении иррациональных уравнений. Часто с ее помощью удается избежать необходимости возведения в квадрат.

Пример 2. $2\sqrt{x^2 - 7x + 19} + x^2 - 7x + 4 = 0$.
Поскольку неизвестное входит в подкоренное выражение и в рациональную часть уравнения в виде одной и той же комбинации ($x^2 - 7x$), можно сделать замену: $t = \sqrt{x^2 - 7x + 19}$ $(t \ge 0)$, тогда $x^2 - 7x = t^2 - 19$, и t определяется из уравнения: $2t + t^2 - 19 + 4 = 0$, $t^2 + 2t - 15 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -5 < 0$ – не соответствует условию на знак t.
Обратная замена: $\sqrt{x^2 - 7x + 19} = 3$, $x^2 - 7x + 19 = 9$, $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.
Ответ: $x = 2$, $x = 5$.

Пример 3. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + 4\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = 5$.

Подкоренные выражения – взаимно обратные дроби, поэтому замена $t = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ $(t \ge 0)$ приводит к уравнению $t + \frac{4}{t} = 5$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

А) $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}=1,\ \ \dfrac{x+1}{1-x}=1,\ \ x+1=1-x,\ \ x=0.$

Б) $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}=4,\ \ \dfrac{x+1}{1-x}=16,\ \ x+1=16-16x,\ \ x=\dfrac{15}{17}.$

Ответ: $x=0,\ \ x=\dfrac{15}{17}.$

Обращаем ваше внимание на то, что в этих двух заданиях не было необходимости в проверке корней или задании каких-либо ограничений: значения x определялись из условия, что корень принимает некоторое неотрицательное значение.

Пример 4. $\sqrt{x}+\sqrt{x-16}=\sqrt{32-x}$ **.**

Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{x-16}=\sqrt{32-x}-\sqrt{x}$ и возведем обе части в квадрат, не задавая никаких ограничений: проще будет в конце работы проверить получившиеся корни.

$x-16=\left(\sqrt{32-x}-\sqrt{x}\right)^2,\ \ x-16=32-x-2\sqrt{32x-x^2}+x,\ 2\sqrt{32x-x^2}=48-x.$

Еще раз возведем в квадрат обе части полученного равенства:

$4(32x-x^2)=2304-96x+x^2,\ 5x^2-224x+2304=0,\ \ x_1=16,\ \ x_2=\dfrac{144}{5}.$

Проверка:

А) $x=16$: $\sqrt{16}+\sqrt{16-16}=4;\ \sqrt{32-16}=4$ – $x=16$ – корень уравнения.

Б) $x=\dfrac{144}{5}$: $\sqrt{\dfrac{144}{5}}+\sqrt{\dfrac{144}{5}-16}=\dfrac{12}{\sqrt{5}}+\sqrt{\dfrac{64}{5}}=\dfrac{12}{\sqrt{5}}+\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{20}{\sqrt{5}};\ \ \sqrt{32-\dfrac{144}{5}}=\sqrt{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\neq\dfrac{20}{\sqrt{5}}$

– $x=\dfrac{144}{5}$ – не корень уравнения.

Ответ: $x=16$.

Пример 5. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=2$ **.**

В этом уравнении замена $t=\sqrt{x-4}$ $(t\geq 0)$ поможет ограничиться только одним возведением в квадрат: $x=t^2+4;\ \ \sqrt{t^2+1}+t=2,\ \ \sqrt{t^2+1}=2-t,\begin{cases}t^2+1=4-4t+t^2\\ 0\leq t\leq 2\end{cases},$

$4t=3,\ \ t=\dfrac{3}{4},\ \ x=\dfrac{9}{16}+4=\dfrac{73}{16}.$

Ответ: $x=\dfrac{73}{16}.$

Рассмотрим еще одну группу иррациональных уравнений, которые решаются с помощью разложения на множители.

Пример 6. $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2}=x^2-36$ **.**

ОДЗ задается условием: $36+10x-x^2\geq 0,\ \ 5-\sqrt{61}\leq x\leq 5+\sqrt{61}$. Запишем уравнение в виде: $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2}=(x-6)(x+6),\ \ (x+6)(\sqrt{36+10x-x^2}-(x-6))=0.$

А) $x+6=0$, $x=-6<5-\sqrt{61}$ – посторонний корень.

Б) $\sqrt{36+10x-x^2}-(x-6)=0,\ \ \sqrt{36+10x-x^2}=x-6,\ \ \begin{cases}36+10x-x^2=x^2-12x+36\\ x-6\geq 0\end{cases},$

$\begin{cases} x^2 - 11x = 0 \\ x \geq 6 \end{cases}$, $x = 11$ (корень первого уравнения $x = 0$ не удовлетворяет второму условию). Итак, единственный корень исходного уравнения – $x = 11$.
Ответ: $x = 11$.

Нередко в иррациональных уравнениях присутствуют и модули. В этом случае при решении нужно использовать приемы работы и с иррациональными, и с модульными уравнениями.

Пример 7. $|\sqrt{x} - 3| = x - \sqrt{x} - 1$**.**

Сделаем замену: $t = \sqrt{x}$ $(t \geq 0)$ и получим для t уравнение $|t - 3| = t^2 - t - 1$.
А) $t \geq 3$, $t - 3 = t^2 - t - 1$, $t^2 - 2t + 2 = 0$, $D < 0$ – решений нет.
Б) $t < 3$, $-t + 3 = t^2 - t - 1$, $t^2 = 4$, $t_1 = 2$, $t_2 = -2 < 0$ – посторонний корень.
Итак, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$.
Ответ: $x = 4$.

Пример 8. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 6$**.**
Обратим внимание на то, что оба подкоренных выражения представляют собой полные квадраты: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Тогда, используя формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, превратим уравнение из иррационального в модульное: $|x - 1| + |x + 4| = 6$. Далее решаем его так, как рассказано в занятии 5:

– –   – +   + +
__________o__________o__________
-4   1

А) $\begin{cases} x < -4 \\ -x + 1 - x - 4 = 6 \end{cases}$, $x = -\dfrac{9}{2}$.

Б) $\begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ -x + 1 + x + 4 = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ 5 = 6 \end{cases}$ – нет решений.

В) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 + x + 4 = 6 \end{cases}$, $x = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $x = -\dfrac{9}{2}$, $x = \dfrac{3}{2}$.

Перейдем к решению иррациональных неравенств. Если применять возведение в квадрат, то неравенство преобразуется в систему (или несколько систем) рациональных неравенств, в которые входят все необходимые ограничения.

Пример 9. $\sqrt{x^2 - 4x - 140} \leq 4x - 72$.
Вспомним свойства неравенств: если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении в квадрат знак неравенства не меняется; если отрицательны, то знак меняется на противоположный; если же левая и правая части имеют разные знаки, то возведение в квадрат является некорректной операцией.
В данном неравенстве подкоренное выражение, разумеется, должно быть неотрицательным. Кроме того, значения правой части не меньше квадратного корня, то есть для решений неравенства правая часть может быть только неотрицательной. При выполнении этих условий мы имеем право возвести обе части в квадрат с сохранением знака неравенства:

$$\begin{cases} x^2-4x-140\ge 0 \\ 4x-72\ge 0 \\ x^2-4x-140\le 16x^2-576x+5184 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -10,\, x\ge 14 \\ x\ge 18 \\ 15x^2-572x+5324\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -10,\, x\ge 14 \\ x\ge 18 \\ x\le 16\dfrac{2}{15},\, x\ge 22 \end{cases}.$$

Пересечение решений можно записать в виде: $x\ge 22$.
Ответ: [22; + ∞).

Пример 10. $\sqrt{x^2+6x-7}>2x-1$.
В этом неравенстве, в отличие от предыдущего, правая часть может принимать значения разных знаков. Рассмотрим эти случаи отдельно:

А) Если выполнены условия $\begin{cases} x^2+6x-7\ge 0 \\ 2x-1<0 \end{cases}$, то неравенство будет верным: действительно, любое неотрицательное число больше любого отрицательного числа. Следовательно, все решения этой системы войдут в ответ. Решим полученную систему неравенств: $\begin{cases} x\le -7,\, x\ge 1 \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x\le -7.$

Б) Вторая возможность – выполнение условий $\begin{cases} x^2+6x-7\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \\ x^2+6x-7>4x^2-4x+1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x\le -7,\, x\ge 1 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \\ 3x^2-10x+8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -7,\, x\ge 1 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{3}<x<2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3}<x<2.$$

Ответ: $(-\infty;-7]\cup\left(\dfrac{4}{3};2\right)$.

В иррациональных неравенствах, как и в уравнениях, полезно использовать замену переменной.

Пример 11. $3\sqrt{x^2-17x+16}>x^2-17x+12$.
Пусть $t=\sqrt{x^2-17x+16}$, тогда значения t определяются системой неравенств:
$$\begin{cases} t\ge 0 \\ 3t>t^2-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ t^2-3t-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ -1<t<4 \end{cases} \Rightarrow 0\le t<4.$$

После обратной замены получим: $0\le\sqrt{x^2-17x+16}<4$. Поскольку левая и правая части этого двойного неравенства неотрицательны, мы можем возвести все три части в квадрат:
$0\le x^2-17x+16<16$, $\begin{cases} x^2-17x+16\ge 0 \\ x^2-17x+16<16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1,\, x\ge 16 \\ 0<x<17 \end{cases} \Rightarrow 0<x\le 1,\ 16\le x<17.$
Ответ: (0; 1]U[16; 17).

Если корень четной степени входит в нестрогое неравенство в качестве множителя, то, чтобы избежать потери решений, лучше рассмотреть отдельно случай равенства и строгого неравенства.

Пример 12. $\dfrac{\sqrt{9x-8-x^2}}{x^2-3x-4} \le 0.$

А) $\dfrac{\sqrt{9x-8-x^2}}{x^2-3x-4} = 0,\ 9x-8-x^2=0,\ \ x_1=1,\ \ x_2=8.$

Б) $\dfrac{\sqrt{9x-8-x^2}}{x^2-3x-4} < 0$. Поскольку числитель дроби при всех допустимых значениях x неотрицателен, знаменатель должен принимать отрицательные значения, и неравенство сводится к системе: $\begin{cases} 9x-8-x^2>0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1, x>8 \\ -1<x<4 \end{cases} \Rightarrow 1<x<4.$

Объединяя найденные решения, получим окончательный ответ: $1 \le x < 4$, $x = 8$.

Еще раз обратите внимание на то, что если бы мы не рассматривали случай равенства отдельно, а решали систему неравенств $\begin{cases} 9x-8-x^2 \ge 0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}$, то потеряли бы решение $x = 8$.

Ответ: [1; 4), $x = 8$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+x+10}=5$
2. $\sqrt{5x-19}+\sqrt{5x-16}-3\sqrt{2x-7}=0$
3. $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-5}}-24\sqrt{\dfrac{x-5}{x-2}}=2$
4. $\sqrt{x^2+9x-25}=\sqrt{5x+7}$
5. $(x^2-6x)\sqrt{3-x}=x(x^2-9x+8)$
6. $5\sqrt{x}=16-|x-10|$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-9}}}+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x-9}}}=\dfrac{\sqrt{x-9}}{6}$
8. $\dfrac{\sqrt{6x+5}}{10x+5} \le \dfrac{\sqrt{6x+5}}{5-x}$
9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-27}<7$
10. $(x-7)\sqrt{x^2-7x+6}<49-7x$

Ответы

1) 2; - 3 2) 4 3) $\dfrac{178}{35}$ 4) 4 5) 0; 2 6) 4; 9; $\dfrac{77-5\sqrt{129}}{2}$ 7) 121

8) $x=-\dfrac{5}{6}$; [0; 5) 9) [13,5; 18) 10) (- ∞; 1]U[6; 7)