Занятие 7

## УПРОЩЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Уже было сказано, что задания на упрощение выражений (в том числе тригонометрических) чаще предлагаются на экзамене в форме тестирования, чем в экзаменационных вариантах классического типа. Тем не менее и тем, кто собирается сдавать обычный экзамен, полезно поработать над выполнением этих заданий, поскольку для их решения требуется хорошо знать тригонометрические формулы и уметь применять их в комплексе, а такие навыки нужны и для решения тригонометрических уравнений, без которых не обходится ни один вариант письменного экзамена по математике.
Начнем с заданий на вычисление одних тригонометрических функций по известным другим.

**Пример 1.** Известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}3$. Найти:

1) $\sin 2\alpha$;
2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

Возведем в квадрат обе части данного равенства: $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0{,}09$.
Используем основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного угла:
$1 - \sin 2\alpha = 0{,}09$, откуда $\sin 2\alpha = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$.
Применим полученный результат для ответа на следующие вопросы:
$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - ½\cdot\sin^2 2\alpha =$
$= 1 - ½\cdot 0{,}91 = 0{,}545.$
$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$
$= 1\cdot(0{,}545 - ¼\cdot 0{,}91) = 0{,}3175.$
Ответ: 1) 0,91 2) 0,545 3) 0,3175

**Пример 2.** Найти $\mathrm{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\sin a + 4\cos a}{\sin a - 2\cos a} = 5.$

Проверкой можно убедиться, что при $\cos a = 0$ приведенное равенство неверно. Поэтому можно разделить числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$: $\dfrac{3tga + 4}{tga - 2} = 5,$

$3\mathrm{tg}\alpha + 4 = 5\mathrm{tg}\alpha - 10$, $2\mathrm{tg}\alpha = 14$, $\mathrm{tg}\alpha = 7$.
Ответ: 7.

**Пример 3.** Вычислить $\cos\alpha$, если $\cos 2\alpha = ¾$ и $\dfrac{3p}{2} < 2a < 2p$.

Как известно, $\cos a = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2a}{2}}$. Выясним, в каких пределах лежит угол $\alpha$ и какой знак при этом имеет его косинус. Разделим все три части заданного двойного неравенства на 2: $\dfrac{3p}{4} < a < p$, то есть угол $\alpha$ располагается во второй четверти, и $\cos a < 0$. Следовательно,

$$\cos a = -\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3}{4}}{2}} = -\sqrt{\dfrac{7}{8}} = -\dfrac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\cos a = -\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Следующая группа заданий – вычисление значений тригонометрических выражений с использованием тригонометрических формул.

**Пример 4.** Найти значение выражения $\dfrac{\sin^3 19^\circ - \cos^3 19^\circ}{\sin 19^\circ - \cos 19^\circ} - \dfrac{\sin^2 57^\circ + \sin^2 33^\circ}{tg 19^\circ + ctg 19^\circ}$.

Вначале упростим каждую из дробей по отдельности:

А) $\dfrac{\sin^3 19^\circ - \cos^3 19^\circ}{\sin 19^\circ - \cos 19^\circ} = \dfrac{(\sin 19^\circ - \cos 19^\circ)(\sin^2 19^\circ + \sin 19^\circ \cos 19^\circ + \cos^2 19^\circ)}{\sin 19^\circ - \cos 19^\circ} =$

$= (\sin^2 19^\circ + \cos^2 19^\circ) + \sin 19^\circ \cos 19^\circ = 1 + \sin 19^\circ \cos 19^\circ$.

Б) Применим формулу приведения: $\sin 33^\circ = \cos(90^\circ - 33^\circ) = \cos 57^\circ$, поэтому

$\sin^2 57^\circ + \sin^2 33^\circ = \sin^2 57^\circ + \cos^2 57^\circ = 1$. Тогда $\dfrac{\sin^2 57^\circ + \sin^2 33^\circ}{tg 19^\circ + ctg 19^\circ} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin 19^\circ}{\cos 19^\circ} + \dfrac{\cos 19^\circ}{\sin 19^\circ}} =$

$= \dfrac{\sin 19^\circ \cos 19^\circ}{\sin^2 19^\circ + \cos^2 19^\circ} = \sin 19^\circ \cos 19^\circ$.

В) $\dfrac{\sin^3 19^\circ - \cos^3 19^\circ}{\sin 19^\circ - \cos 19^\circ} - \dfrac{\sin^2 57^\circ + \sin^2 33^\circ}{tg 19^\circ + ctg 19^\circ} = 1 + \sin 19^\circ \cos 19^\circ - \sin 19^\circ \cos 19^\circ = 1$.

Ответ: 1.

**Пример 5.** Вычислить $\sin 10^o \sin 30^o \sin 50^o \sin 70^o$.

Используем формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму: $\sin 10^o \sin 50^o = ½ (\cos 40^o – \cos 60^o) = ½ \cos 40^o – ¼$. Подставим в первоначальное произведение это выражение и учтем, что $\sin 30^o = ½$ : $\dfrac{1}{4}(\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \dfrac{1}{2}\sin 70^\circ) =$

$= \dfrac{1}{8}(\sin 110^\circ + \sin 30^\circ - \sin 70^\circ) = \dfrac{1}{8}(\sin(180^\circ - 70^\circ) + \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{8}\left(\sin 70^\circ + \dfrac{1}{2} - \sin 70^\circ\right) = \dfrac{1}{16}$.

Ответ: $\dfrac{1}{16}$.

Рассмотрим примеры упрощения тригонометрических выражений с произвольным аргументом.

**Пример 6.** Упростить выражение $\dfrac{\cos 2a}{ctg^2 a - tg^2 a}$.

Начнем с упрощения знаменателя: $ctg^2 a - tg^2 a = \dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a} - \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\cos^4 a - \sin^4 a}{\sin^2 a \cos^2 a} =$

$= \dfrac{4(\sin^2 a + \cos^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a)}{4\sin^2 a \cos^2 a} = \dfrac{4\cos 2a}{\sin^2 2a}$. Тогда $\dfrac{\cos 2a}{ctg^2 a - tg^2 a} = \dfrac{\cos 2a \sin^2 2a}{4\cos 2a} =$

$= \dfrac{1}{4}\sin^2 2a$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}\sin^2 2a$.

**Пример 7.** Доказать тождество $\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}} = -\dfrac{2}{\cos a}$ при $\dfrac{p}{2} < a < \dfrac{3p}{2}$.

Задания на доказательство тождеств вполне можно воспринимать как задания на упрощение выражений, причем с готовым ответом в виде более простой и компактной части равенства. В частности, в приведенном примере попробуем упростить левую часть, чтобы получить такое же выражение, как справа.

А) $\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin a)^2}{(1-\sin a)(1+\sin a)}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin a)^2}{1-\sin^2 a}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin a)^2}{\cos^2 a}}=\left|\dfrac{1+\sin a}{\cos a}\right|.$

Исследуем знак числителя и знаменателя подмодульного выражения:

$\sin a\ge -1$, тогда $1+\sin a\ge 0$, поэтому $|1+\sin a|=1+\sin a$;

при $\dfrac{p}{2}<a<\dfrac{3p}{2}$ $\cos a<0$, следовательно, $|\cos a|=-\cos a$. Таким образом,

$\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}=-\dfrac{1+\sin a}{\cos a}.$

Б) Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое левой части:

$\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}=-\dfrac{1-\sin a}{\cos a}.$

Тогда $\sqrt{\dfrac{1+\sin a}{1-\sin a}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin a}{1+\sin a}}=-\dfrac{1+\sin a}{\cos a}-\dfrac{1-\sin a}{\cos a}=-\dfrac{1+\sin a+1-\sin a}{\cos a}=-\dfrac{2}{\cos a}$, что и требовалось доказать.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить sin 4$\alpha$, если tg$\alpha$ = 5.
2. Вычислить cos 2$\alpha$ tg 4$\alpha$, если sin$\alpha$ – cos$\alpha$ = ¾.
3. Вычислить $\dfrac{\sin 2a+\cos^2 a}{\cos 2a}$, если tg$\alpha$ = 4.
4. Вычислить sin70$^{o}$(1 + 2sin50$^{o}$).
5. Вычислить $\cos\dfrac{2p}{7}+\cos\dfrac{4p}{7}+\cos\dfrac{6p}{7}$.
6. Найти наименьшее значение выражения 15sin$\alpha$ – 8cos$\alpha$.
7. Упростить выражение $\dfrac{\sin 2a+\sin 5a+\sin 8a}{\cos 2a+\cos 5a+\cos 8a}$.
8. Упростить выражение $\dfrac{2\sin^4 a+2\cos^4 a+\sin^2 2a}{4\sin^6 a+4\cos^6 a+3\sin^2 2a}$.
9. Упростить выражение ctg$\alpha$ + ctg 2$\alpha$ + $\dfrac{1}{\sin 2a}$.
10. Доказать тождество $\dfrac{\sin(2a+b)}{\sin a}-2\cos(a+b)=\dfrac{\sin b}{\sin a}$.

### Ответы:

1) $-\dfrac{120}{169}$ 2) $\dfrac{1449}{1254}$ 3) - 1 4) ½ 5) – ½ 6) – 17 7) tg 5$\alpha$ 8) ½ 9) 2 ctg$\alpha$