Занятие 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
(часть 1)

Решение тригонометрических уравнений в большинстве случаев проводится либо с помощью замены переменной, либо разложения на множители, но и тот, и другой способ применяется в разных вариантах в зависимости от вида конкретного уравнения. Поэтому вам предлагается более подробная классификация типов тригонометрических уравнений и методов их решения.

1. Замены с использованием основного тождества и формул для косинуса двойного угла.

Пример 1. $2\cos 2x - 4\sin x + 1 = 0$.
Используем формулу: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и сделаем замену $t = \sin x$: $2(1 - 2t^2) - 4t + 1 = 0$,

$4t^2 + 4t - 3 = 0$, $t_1 = ½$, $t_2 = -\frac{3}{2} < -1 -$ посторонний корень (учитываем, что $-1 \le t \le 1$).

Обратная замена: $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{p}{6} + pn$.

Ответ: $(-1)^n \frac{p}{6} + pn.$

Пример 2. $2\cos^2 x + 4\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$.

Применим следствие из основного тождества: $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$ и сделаем замену $t = \mathrm{tg}\, x$:

$\frac{2}{1+t^2} + 4t + 3 = 0$, $4t^3 + 3t^2 + 4t + 5 = 0$. Найдем подбором корень t = - 1 и разложим на множители левую часть полученного уравнения: $(t + 1)(4t^2 - t + 5) = 0$. Дискриминант второго множителя отрицателен, следовательно, других корней уравнение не имеет.

Обратная замена: $\mathrm{tg}\, x = -1$, $x = -\frac{p}{4} + pn.$

Ответ: $-\frac{p}{4} + pn.$

2. Однородные уравнения.

Пример 3. $10 + \sin 6x - 22\cos^2 3x = 0$.
Поскольку $10 = 10\sin^2 3x + 10\cos^2 3x$, а $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$, уравнение можно записать в виде: $10\sin^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x - 12\cos^2 3x = 0$. Перед нами так называемое однородное уравнение, для всех слагаемых левой части которого сумма степеней $\sin 3x$ и $\cos 3x$ одинакова. Проверкой можно убедиться, что $\cos 3x \ne 0$ для корней этого уравнения, поэтому можно разделить обе его части на $2\cos 3x$: $5\mathrm{tg}^2\, 3x + \mathrm{tg}\, 3x - 6 = 0$. Сделаем замену: $t = \mathrm{tg}\, 3x$, тогда $5t^2 + t - 6 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{6}{5}$. Обратная замена:

А) $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \frac{p}{4} + pn.$

Б) $\mathrm{tg}\, x = -\frac{6}{5}$, $x = -arctg\frac{6}{5} + pn.$

Ответ: $\frac{p}{4} + pn, \ -arctg\frac{6}{5} + pn.$

3. Метод дополнительного угла.

Уравнения вида $a \sin kx + b \cos kx = c$ можно превратить в простейшие, если разделить обе части равенства на $\sqrt{a^2+b^2}$: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin kx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos kx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\sin(kx + a) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $a = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (при $a > 0$).

Пример 4. $5\sin 4x - 12\cos 4x = 6{,}5.$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$ Разделим обе части уравнения на 13:

$\frac{5}{13}\sin 4x - \frac{12}{13}\cos 4x = \frac{1}{2}$. Пусть $a = \arcsin\frac{12}{13}$, тогда $\sin a = \frac{12}{13}$, $\cos a = \frac{5}{13}$, и уравнение принимает вид: $\sin x\cos a - \cos x \sin a = \frac{1}{2}$, или $\sin(x - a) = \frac{1}{2}$, откуда

$x - a = (-1)^n\frac{p}{6} + pn, \ \ x = \arcsin\frac{12}{13} + (-1)^n\frac{p}{6} + pn.$

Ответ: $\arcsin\frac{12}{13} + (-1)^n\frac{p}{6} + pn.$

4. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример 5. $\sin 4x + \sin 3x + \cos 6x + \cos 7x = 0.$

Преобразуем в произведение сумму синусов и сумму косинусов:

А) $\sin 4x + \sin 3x = 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

Б) $\cos 6x + \cos 7x = 2\cos\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

Теперь запишем левую часть уравнения в виде:

$2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0, \ 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{7x}{2} + \cos\frac{13x}{2}\right) = 0.$ Это равенство возможно в двух случаях:

А) $\cos\frac{x}{2} = 0, \ \ \frac{x}{2} = \frac{p}{2} + pn, \ \ x = p + 2pn.$

Б) $\sin\frac{7x}{2} + \cos\frac{13x}{2} = 0.$ Применим формулу приведения:

$\cos\frac{13x}{2} = \sin\left(\frac{p}{2} - \frac{13x}{2}\right) = \sin\frac{p - 13x}{2}$. Тогда $\sin\frac{7x}{2} + \sin\frac{p - 13x}{2} = 0,$

$2\sin\frac{7x + p - 13x}{4}\cos\frac{7x - p + 13x}{4} = 0, \ -2\sin\frac{6x - p}{4}\cos\left(5x - \frac{p}{4}\right) = 0.$ Это уравнение вновь сводится к двум простейшим: $\sin\frac{6x-p}{4} = 0 \Rightarrow \frac{6x-p}{4} = pn, \ \ x = \frac{p}{6} + \frac{2pn}{3};$

$\cos\left(5x - \frac{p}{4}\right) = 0, \ 5x - \frac{p}{4} = \frac{p}{2} + pn, \ \ x = \frac{3p}{20} + \frac{pn}{5}.$

Ответ: $p + 2pn,\ \dfrac{p}{6} + \dfrac{2pn}{3},\ \dfrac{3p}{20} + \dfrac{pn}{5}.$

Пример 6. $5\sin x + 2\cos x = \sqrt{29}\cos 3x.$

Применим к левой части метод дополнительного угла: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29},$

$\dfrac{5}{\sqrt{29}}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{29}}\cos x = \cos 3x.$ Выберем дополнительный угол так, чтобы получить в левой части формулу для косинуса разности: $a = \arcsin\dfrac{5}{\sqrt{29}};$

$\sin a\,\sin x + \cos a\,\cos x = \cos 3x,\ \cos(x - a) - \cos 3x = 0,\ -2\sin\dfrac{x - a + 3x}{2}\sin\dfrac{x - a - 3x}{2} = 0,$

$2\sin\left(2x - \dfrac{a}{2}\right)\sin\left(x + \dfrac{a}{2}\right) = 0.$

А) $\sin\left(2x - \dfrac{a}{2}\right) = 0,\ 2x - \dfrac{a}{2} = pn,\ \ x = \dfrac{a}{4} + \dfrac{pn}{2} = \dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{29}} + \dfrac{pn}{2}.$

Б) $\sin\left(x + \dfrac{a}{2}\right) = 0,\ \ x + \dfrac{a}{2} = pn,\ \ x = -\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{29}} + pn.$

Ответ: $\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{29}} + \dfrac{pn}{2},\quad -\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{29}} + pn.$

5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример 7. $\cos 9x + \sin 4x \sin 5x = 0.$

Преобразуем произведение синусов в сумму: $\sin 4x\sin 5x = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 9x).$

Тогда $\cos 9x + \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 9x) = 0,\ 2\cos 9x + \cos x - \cos 9x = 0,\ \ \cos 9x + \cos x = 0,$

$2\cos 5x \cos 4x = 0.$

А) $\cos 5x = 0,\ 5x = \dfrac{p}{2} + pn,\ \ x = \dfrac{p}{10} + \dfrac{pn}{5}.$

Б) $\cos 4x = 0,\ 4x = \dfrac{p}{2} + pn,\ \ x = \dfrac{p}{8} + \dfrac{pn}{4}.$

Ответ: $\dfrac{p}{10} + \dfrac{pn}{5},\ \ \dfrac{p}{8} + \dfrac{pn}{4}.$

Пример 8. $\sin 6x + 3\sin 4x \cos 2x = 0.$

Преобразуем произведение в сумму: $\sin 6x + \dfrac{3}{2}(\sin 6x + \sin 2x) = 0,\ 5\sin 6x + 3\sin 2x = 0.$

Воспользуемся формулой синуса тройного угла: $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$ и сделаем замену: $t = \sin 2x$. Решим уравнение для t: $15t - 20t^3 + 3t = 0$, $9t - 10t^3 = 0$, $t(9 - 10t^2) = 0$,

$t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{3}{\sqrt{10}},\ t_3 = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}.$ Обратная замена приводит к трем простейшим уравнениям:

А) $\sin 2x = 0,\ 2x = pn,\ \ x = \dfrac{pn}{2}.$

Б) $\sin 2x = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{pn}{2}$.

В) $\sin 2x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{pn}{2}$.

Объединяя две последние группы корней, получим окончательный ответ.

Ответ: $\frac{pn}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{pn}{2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $2\cos 2x + 3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 3 = 0$
2. $\mathrm{ctg}^2\, 4x - 5\mathrm{ctg}\, 4x = -\frac{2}{\sin^2 4x}$
3. $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} = 4$
4. $\frac{2}{1-\cos x} + \frac{2}{1+\cos x} = \sin^2 x + 3$
5. $3\sin^2 3x - 3\sin 3x\cos 3x - 4\cos^2 3x = 1$
6. $2 - 5\sin 8x + 6\sin^2 4x = 0$
7. $12\cos 2x + 5\cos x = 12\sin x + 5\sin 2x$
8. $\sin 2x + \sin 6x + \sin 3x - \sin x = 0$
9. $\sin 6x - \sin 4x + \cos 8x + \cos 2x = 0$
10. $5\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{26}\cos 4x$
11. $4\cos x = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x + 1$
12. $\cos 8x - \cos 3x\cos 5x = 0$
13. $\sin 3x\sin 2x + \cos 9x\cos 4x = 0$
14. $\mathrm{tg}\, 3x + \mathrm{ctg}\, 3x = 4\sin 2x$

Ответы

1) $(-1)^n\frac{p}{6} + pn$ 2) $\frac{p}{16} + \frac{pn}{4}$; $\frac{1}{4}arctg\frac{3}{2} + \frac{pn}{4}$ 3) $\pm\frac{p}{6} + pn$ 4) $\frac{p}{2} + pn$

5) $-\frac{p}{12} + \frac{pn}{3}$; $\frac{1}{3}arctg\frac{5}{2} + \frac{pn}{3}$ 6) $\frac{p}{16} + \frac{pn}{4}$; $\frac{1}{4}arctg\frac{1}{4} + \frac{pn}{4}$

7) $(-1)^n\frac{p}{6} + pn$; $-\frac{p}{2} + 2pn$; $-2arctg\frac{17}{7} + 2pn$ 8) $\frac{2pn}{5}$; $\frac{p}{4} + \frac{pn}{2}$; $\frac{p}{3} + \frac{2pn}{3}$

9) $\frac{p}{10} + \frac{pn}{5}$; $\frac{p}{4} + pn$; $\frac{3p}{8} + \frac{pn}{2}$ 10) $-\frac{1}{2}arctg5 + pn$; $\frac{1}{6}arctg5 + \frac{pn}{6}$

11) $\frac{p}{3} + 2pn$; $\frac{2p}{9} + \frac{2pn}{3}$ 12) $\frac{pn}{5}$; $\frac{pn}{3}$ 13) $\frac{p}{12} + \frac{pn}{6}$; $\frac{p}{14} + \frac{pn}{7}$ 14) $\frac{p}{8} + \frac{pn}{4}$