Занятие 9

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
(часть 2)

6. Использование тождеств $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$.

Пример 1. $\sin 2x - 5 + 5\sin x - 5\cos x = 0$.
Сделаем замену: $t = \sin x - \cos x$, тогда $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$. Следовательно, $\sin 2x = 1 - t^2$. Подставим эти выражения в уравнение: $1 - t^2 - 5 + 5t = 0$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Очевидно, что разность синуса и косинуса не может равняться четырем, поскольку эти функции не принимают значений, модуль которых превышает 1; поэтому второй корень квадратного уравнения – посторонний. Для $t = 1$ сделаем обратную замену: $\sin x - \cos x = 1$. Применим метод дополнительного угла:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\left(x - \frac{p}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad x = \frac{p}{4} + (-1)^n\frac{p}{4} + pn.$$

Ответ: $\frac{p}{4} + (-1)^n\frac{p}{4} + pn.$

Пример 2. $(\sin 2x - \cos 2x)^4 + \cos 8x = \frac{11}{4}$.

Поскольку $(\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1 - \sin 4x$, представим $(\sin 2x - \cos 2x)^4 = (1 - \sin 4x)^2$.
Кроме того, $\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x$. Эти преобразования позволяют сделать замену:

$t = \sin 4x$ и получить для t уравнение $(1-t)^2 + 1 - 2t^2 - \frac{11}{4} = 0$, $4t^2 + 8t + 3 = 0$,

$t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{3}{2} < -1$ – посторонний корень. Сделаем обратную замену:

$\sin 4x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\frac{p}{24} + \frac{pn}{4}$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{p}{24} + \frac{pn}{4}$.

7. Понижение степени.

Четные степени синуса и косинуса можно понизить переходом к двойному углу с помощью следующих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};\quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x;$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1 + \cos^2 2x}{2} = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3 + \cos 4x}{4};$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x =$$

$$= \frac{1 + 3\cos^2 2x}{4} = \frac{5 + 3\cos 4x}{8};$$

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right) =$$

$$=\frac{\cos 2x(3+\cos^2 2x)}{4}.$$

Пример 3. $\cos^2 8x + \cos^2 2x + 2\cos^2 5x = 2.$

Понизим степени тригонометрических функций, входящих в уравнение:

$$\frac{1+\cos 16x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{2+2\cos 10x}{2}=2,\ \ (\cos 16x+\cos 4x)+2\cos 10x=0,$$

$$2\cos 10x\cos 6x+2\cos 10x=0,\ \ 2\cos 10x(\cos 6x+1)=0.$$

А) $\cos 10x=0,\ \ x=\frac{p}{20}+\frac{pn}{10}.$

Б) $\cos 6x+1=0,\ \ \cos 6x=-1,\ \ x=\frac{p}{6}+\frac{pn}{3}.$

Ответ: $\frac{p}{20}+\frac{pn}{10};\ \frac{p}{6}+\frac{pn}{3}.$

Пример 4. $\sin^2 4x+\sin^2 8x=\frac{3}{2}.$

При понижении степени первого слагаемого оно выразится через cos 8x, поэтому у второго слагаемого мы не будем понижать степень, а вместо этого применим к нему основное тождество: $\frac{1-\cos 8x}{2}+1-\cos^2 8x=\frac{3}{2},\ \ t=\cos 8x,\ \ \frac{1-t}{2}+1-t^2=\frac{3}{2},$

$2t^2 + t = 0,\ \ t_1 = 0,\ \ t_2 = -\frac{1}{2}.$

А) $\cos 8x=0,\ \ x=\frac{p}{16}+\frac{pn}{8}.$

Б) $\cos 8x=-\frac{1}{2},\ \ x=\pm\frac{p}{12}+\frac{pn}{4}.$

Ответ: $\frac{p}{16}+\frac{pn}{8};\ \pm\frac{p}{12}+\frac{pn}{4}.$

Пример 5. $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \sin x.$

Преобразуем разность четвертых степеней: $\cos 4x = \sin x$ и применим формулу приведения: $\cos 4x-\cos\left(\frac{p}{2}-x\right)=0,\ \ -2\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{p}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{p}{4}\right)=0.$

А) $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{p}{4}\right)=0,\ \ \frac{3x}{2}+\frac{p}{4}=pn,\ \ x=-\frac{p}{6}+\frac{2pn}{3}.$

Б) $\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{p}{4}\right)=0,\ \ \frac{5x}{2}-\frac{p}{4}=pn,\ \ x=\frac{p}{10}+\frac{2pn}{5}.$

Ответ: $-\frac{p}{6}+\frac{2pn}{3},\ \ \frac{p}{10}+\frac{2pn}{5}.$

Пример 6. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^2 2x + 1.$

Выразим $\sin^6 x + \cos^6 x$ через $\sin^2 2x$: $1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\sin^2 2x+1,\ \ \sin 2x=0,\ \ x=\frac{pn}{2}.$

Ответ: $\frac{pn}{2}.$

Пример 7. $\cos^4 x = 8\cos x \cos 3x - 7$.
Понизим степень в левой части уравнения, а в правой преобразуем произведение в сумму:
$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = 4(\cos 4x + \cos 2x) - 7,\ \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} = 4\left(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x\right) - 7,$$
$t = \cos 2x$: $\dfrac{1+2t+t^2}{4} = 4(2t^2 - 1 + t) - 7,\ 31t^2 + 14t - 45 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = -\dfrac{45}{31} < -1 -$ посторонний корень.

Обратная замена: $\cos 2x = 1,\ \ x = pn.$

Ответ: $pn.$

8. Уравнения с тангенсами и котангенсами.

Разумеется, такие уравнения могут быть самыми разными. Мы рассмотрим несколько типичных приемов решения.

а) Универсальная тригонометрическая подстановка.

Так называют обычно группу формул, выражающих тригонометрические функции двойного угла через тангенс основного:
$$\sin 2a = \frac{2tga}{1+tg^2 a};\quad \cos 2a = \frac{1-tg^2 a}{1+tg^2 a};\quad tg 2a = \frac{2tga}{1-tg^2 a}.$$
Заметим, что их применение далеко не всегда полезно: при этом замена $t = \text{tg}\, x$ обычно приводит для t к уравнению высокой степени; кроме того, есть возможность потерять корни, для которых $\text{tg}\, x$ не существует. Тем не менее в некоторых случаях универсальная подстановка оказывается единственным способом решения.

Пример 8. $20\text{tg}\, 8x + 15\sin 8x + 2\text{tg}\, 4x = 0$.
Используем универсальную подстановку:
$$\frac{40tg4x}{1-tg^2 4x} + \frac{30tg4x}{1+tg^2 4x} + 2tg4x = 0,\ \ t = tg4x,\ \ t\left(\frac{20}{1-t^2} + \frac{15}{1+t^2} + 1\right) = 0.$$
А) $t = 0$, $\text{tg}\, 4x = 0$, $x = \dfrac{pn}{4}$.

Б) $\dfrac{20}{1-t^2} + \dfrac{15}{1+t^2} + 1 = 0,\ \ t^4 - 5t^2 - 36 = 0,\ \ \left(t^2\right)_1 = 9, \left(t^2\right)_2 = -4 < 0$ - постороннее решение.

Тогда $t = \pm 3,\ \ tg4x = \pm 3,\ \ x = \pm\dfrac{1}{4}arctg3 + \dfrac{pn}{4}.$

Ответ: $\dfrac{pn}{4};\ \pm\dfrac{1}{4}arctg3 + \dfrac{pn}{4}.$

Пример 9. $\dfrac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \cos 6x.$
Обратим внимание на то, что левую часть уравнения с помощью одной из формул универсальной подстановки можно представить как $\dfrac{1}{\cos 2x}$: $\quad \dfrac{1}{\cos 2x} = \cos 6x,$

$\cos 2x \cos 6x = 1$, $\dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) = 1,\ 2\cos^2 4x - 1 + \cos 4x - 2 = 0,\ \ t = \cos 4x:$

$2t^2 + t - 3 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1{,}5 < -1$ – посторонний корень. Обратная замена:

$\cos 4x = 1,\ x = \dfrac{pn}{2}.$

Ответ: $\frac{pn}{2}$.

б) Уравнения, содержащие комбинации $\mathrm{tg}^n x \pm \mathrm{ctg}^n x$.

Подобные выражения удобно преобразовывать, переходя к синусам и косинусам.

Пример 10. $8\sin 2x + 3(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x) - 16 = 0$.

Преобразуем сумму тангенса и котангенса:

$tgx + ctgx = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$. Теперь можно сделать замену: $t = \sin 2x$,

$8t + \frac{6}{t} - 16 = 0,\ 4t^2 - 8t + 3 = 0,\ t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{3}{2} > 1 -$ посторонний корень.

Обратная замена: $\sin 2x = \frac{1}{2},\ \ x = (-1)^n \frac{p}{12} + \frac{pn}{2}$.

Ответ: $(-1)^n \frac{p}{12} + \frac{pn}{2}$.

Пример 11. $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 5\mathrm{ctg}\, 2x + 11$.

Вновь выразим левую часть равенства через функции двойного угла:

$$tg^2 x + ctg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)}{\sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 =$$

$= 4(1 + ctg^2 2x) - 2 = 2 + 4ctg^2 2x.$ Теперь уравнение принимает вид:

$2 + 4ctg^2 2x = 5ctg 2x + 11,\ \ t = ctg 2x,\ \ 4t^2 - 5t - 9 = 0,\ \ t_1 = -1,\ \ t_2 = \frac{9}{4}.$

А) $ctg 2x = -1,\ \ x = \frac{3p}{8} + \frac{pn}{2}.$

Б) $ctg 2x = \frac{9}{4},\ \ x = \frac{1}{2} arcctg \frac{9}{4} + \frac{pn}{2}.$

Ответ: $\frac{3p}{8} + \frac{pn}{2};\ \frac{1}{2} arcctg \frac{9}{4} + \frac{pn}{2}.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $\sin 6x + 1 + \sin 3x - \cos 3x = 0$
2. $tg^3 x + ctg^3 x = \frac{ctg 2x + 11}{\sin 2x}$
3. $9(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x) = 16\sin^3 2x + 12\sin 2x$
4. $\left(\frac{tg^2 x + 1}{1 - tg^2 x}\right)^2 + 6tg 2x + 4 = 0$
5. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x = 0$
6. $\cos^4 7x - \sin^4 7x = \sin x$
7. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{4} - \sin 2x$
8. $\sin^6 x - \cos^6 x = -\frac{3\cos 2x}{4}$
9. $4\cos^2 x = 24\cos x \cos 3x + 3$

10. $\sin^4 x + 2\cos^4 x = \cos 4x$

Ответы

1) $\frac{p}{12} + (-1)^{n+1}\frac{p}{12} + \frac{pn}{3}$ 2) $-\frac{p}{8} + \frac{pn}{2};\ \frac{1}{2} arctg\frac{9}{8} + \frac{pn}{2}$ 3) $\pm\frac{p}{6} + \frac{pn}{2}$

4) $-\frac{p}{8} + \frac{pn}{2};\ -\frac{1}{2} arctg 5 + \frac{pn}{2}$ 5) $-\frac{p}{4} + pn$ 6) $-\frac{p}{26} + \frac{2pn}{13};\ \frac{p}{30} + \frac{2pn}{15}$

7) $\frac{p}{4} + pn$ 8) $\frac{p}{4} + \frac{pn}{2}$ 9) $\pm\frac{p}{6} + pn$ 10) $\frac{p}{2} + pn$