Занятие 1

УПРОЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задания на упрощение алгебраических выражений чаще встречаются в вариантах экзаменов, проводимых в форме тестирования (ЕГЭ, централизованное тестирование). Для их выполнения требуется умение применять формулы сокращенного умножения и разложения квадратного трехчлена на множители и хорошо знать свойства степеней.

Пример 1 (ЕГЭ-2003). Упростите выражение $\dfrac{9m^{\frac{1}{2}}\cdot m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}}$.

Применим свойства степеней: $\dfrac{9m^{\frac{1}{2}}\cdot m^{3\frac{1}{2}}}{m^{-3}} = 9m^{\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}-(-3)} = 9m^{7}$.

Ответ: $9m^7$.

Пример 2 (Централизованное тестирование-2003). Сократив дробь $\dfrac{3m^2-2mn-n^2}{6m^2-7mn+n^2}$, вычислите ее значение при $\dfrac{m}{n}=\dfrac{11}{3}$.

Для того, чтобы сократить дробь, нужно разложить на множители числитель и знаменатель. Это можно сделать разными способами:

А) попробуем провести группировку в числителе, записав его так: $3m^2 - 3mn + mn - n^2 =$
$= 3m(m - n) + n(m - n) = (3m + n)(m - n)$.

Б) решим уравнение $3m^2 - 2mn - n^2 = 0$ как квадратное уравнение относительно m, считая n параметром: $m = \dfrac{2n \pm \sqrt{4n^2+12n^2}}{6} = \dfrac{2n\pm 4n}{6} = \dfrac{n\pm 2n}{3}$; $m_1 = n,\ m_2 = -\dfrac{n}{3}$. Тогда

$$3m^2-2mn-n^2 = 3(m-n)\left(m+\frac{n}{3}\right) = (m-n)(3m+n).$$

Таким же образом разложим на множители знаменатель: $6m^2 - 7mn + n^2 = (6m - n)(m - n)$.

Следовательно, $\dfrac{3m^2-2mn-n^2}{6m^2-7mn+n^2} = \dfrac{(3m+n)(m-n)}{(6m-n)(m-n)} = \dfrac{3m+n}{6m-n}$. Из условия $\dfrac{m}{n}=\dfrac{11}{3}$ следует, что $m=\dfrac{11}{3}n$. Тогда $\dfrac{3m+n}{6m-n} = \dfrac{11n+n}{22n-n} = \dfrac{12n}{27n} = \dfrac{4}{7}$.

Ответ: $\dfrac{4}{7}$.

При работе с иррациональными выражениями иногда удобно делать замену переменных таким образом, чтобы для новых переменных получить рациональное выражение. При этом лучше просматриваются возможности для применения формул сокращенного умножения и другие способы упрощения.

Пример 3 (ЕГЭ-2003). Сократите дробь: $\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$.

Примем $a=\sqrt[3]{x},\ b=\sqrt[3]{y}$, тогда $\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{a-b}{a^2-b^2} = \dfrac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

В выражениях, содержащих двойную иррациональность (корень из иррационального выражения) посмотрите внимательно, нельзя ли представить подкоренное выражение в виде полного квадрата.

Пример 4 (Централизованное тестирование-2004). Найдите значение выражения

$$\frac{\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{15}-4\right)}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}.$$

А) Преобразуем знаменатель: 8 = 5 + 3, 15 = 5·3, поэтому

$8-2\sqrt{15}=5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$, то есть $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Б) Раскроем скобки в числителе: $(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{15}-4)=\sqrt{150}+\sqrt{90}-4\sqrt{10}-4\sqrt{6}=$

$=\sqrt{25\cdot 6}+\sqrt{9\cdot 10}-4\sqrt{10}-4\sqrt{6}=5\sqrt{6}+3\sqrt{10}-4\sqrt{10}-4\sqrt{6}=\sqrt{6}-\sqrt{10}=\sqrt{2\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 5}=$

$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

Тогда $\dfrac{\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{15}-4\right)}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$.

Заметим, что подкоренное выражение в знаменателе можно было записать и как $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2$, но $\sqrt{3}-\sqrt{5}<0$, а $\sqrt{8-2\sqrt{15}}>0$, поэтому $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 5 (Централизованное тестирование-2003). Укажите все номера целых чисел данного множества

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$ 2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot(3-\sqrt{2})$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}$ 4) $\sqrt[3]{4}:2^{-\frac{2}{3}}$ 5) $2^{\log_4 9}$

Упростим запись каждого числа:

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=(3^{-1})^{-3}=3^{-1\cdot(-3)}=3^3=27$ - целое число.

2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot(3-\sqrt{2})=\sqrt{9+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2}\cdot(3-\sqrt{2})=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}\cdot(3-\sqrt{2})=$

$=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-4=5$ - целое число.

3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}=2\sqrt{5}+2$ - не целое число.

4) $\sqrt[3]{4}:2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}:2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})}=2^{\frac{4}{3}}=2\sqrt[3]{2}$ - не целое число.

5) $2^{\log_4 9}=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_4 9}=\left(4^{\log_4 9}\right)^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$ - целое число.

Ответ: 1, 2, 5.

В экзаменах традиционной формы задачи на упрощение встречаются редко, но подобные навыки могут пригодиться и при решении заданий, сформулированных иначе.

Пример 6 (МАТИ-2004). Найти наименьшее значение функции

$$f(x,y)=5x^2+2y^2-4xy-4x-8y+19.$$

Представим формулу, задающую функцию, в виде выражения, в которое входят суммы полных квадратов:
$5x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x - 8y + 19 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) - 1 =$
$= (2x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 1.$
Наименьшее значение каждого из первых трех слагаемых равно нулю, причем все они обращаются в 0 при $x = 2$ и $y = 4$. Следовательно, наименьшее значение функции равно 1 и достигается в точке (2; 4).
Ответ: 1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Упростить выражения (1 – 6):

1. $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}} : \dfrac{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$

2. $\left(\dfrac{ab}{a-b}+a\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right) : \dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}$

3) $\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \dfrac{7}{2\sqrt{2}+1} - (11-5\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$

4) $\sqrt{15-4\sqrt{14}} - \sqrt{15+4\sqrt{14}}$

5) $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$

6) $\dfrac{1}{(a-3)(a-b)} + \dfrac{1}{(3-b)(3-a)} + \dfrac{1}{(b-a)(b-3)}$

7) Вычислить $a^3 + 2a^2 + \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{8}{a^3}$, если $a + \dfrac{2}{a} = -4$.

8) Сократить дробь $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^2+x-12}$.

9) Найти наименьшее значение функции $f(x,y) = 8x^2 + 2y^2 - 4xy + 4x + 2y + 3$.

10) Найти наибольшее значение функции $f(x, y) = \dfrac{1}{5x^2+2y^2-4xy+2x+4y+7}$.

Ответы

1) – 1   2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ 3) 2   4) $2\sqrt{2}$ 5) 0   6) 0   7) – 16   8) $x + 3$ 9) 1   10) ½