

Задача 1

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}.$$

Задача 5

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}.$$

Задача 2

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1.$$

Задача 6

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}.$$

Задача 3

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 1} - \frac{3n^2}{3n - 1} \right).$$

Задача 7

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

Задача 4

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2}.$$

Задача 8

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{3n}.$$

Задача 9

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}.$$

Задача 13

Используя определение, доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2.$$

Задача 10

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n/2}.$$

Задача 14

Используя определение, доказать непрерывность функции $y = x^2 - 7x + 4$ в точке $x_0 = 3$.

Задача 11

Используя определение, доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1.$$

Задача 15

Используя определение, доказать непрерывность функции

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4}$$

в точке $x_0 = 1$.

Задача 12

Используя определение, доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Задача 16

Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Задача 17

Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

Задача 21

Найти y'

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Задача 18

Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)^{50}}{(x + 10)^{100}}.$$

Задача 22

Найти y'

$$y = e^{\operatorname{tg} x}.$$

Задача 19

Найти

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 1}{3x^2 + x + 2}.$$

Задача 23

Найти y'

$$y = \ln \ln \sqrt{x}.$$

Задача 20

Найти

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right).$$

Задача 24

Найти y'

$$y = x \ln x + \arcsin \sqrt{x}.$$

Задача 25

Найти y'

$$y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}.$$

Задача 29

Составить уравнение касательной к графику функции $y = 4x - x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Задача 26

Найти y'

$$y = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

Задача 30

Составить уравнение касательной к графику функции $y = e^{2x}$ в точке пересечения с осью Oy .

Задача 27

Найти y'

$$y = x^{\sin x}.$$

Задача 31

Найти дифференциал функции

$$y = x^3 + x\sqrt{x}.$$

Задача 28

Найти y'

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Задача 32

Найти дифференциал функции

$$y = \frac{x^2}{\arcsin x}.$$

Задача 33

Найти y''

$$y = e^{-x^2}.$$

Задача 37

Найти производную n -го порядка

$$y = 3^x.$$

Задача 34

Найти y''

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

Задача 38

Найти производную n -го порядка

$$y = \sin 3x.$$

Задача 35

Найти y'''

$$y = e^x \cos x.$$

Задача 39

Найти производные y'_x, y'_{xx}

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} - t. \end{cases}$$

Задача 36

Найти y'''

$$y = x^3 \ln x.$$

Задача 40

Найти производные y'_x, y'_{xx}

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Задача 41

Найти производные y'_x, y'_{xx}

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$$

Задача 45

Построить прямую, проходящую через точку $(2, -1, 3)$ перпендикулярно данной:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 7 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0. \end{cases}$$

Задача 42

Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_2 параллельно прямой L_1 :

$$L_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2},$$
$$L_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Задача 46

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -1, 4)$ и $B(3, 2, -1)$ перпендикулярно плоскости

$$x + y + 2z - 3 = 0.$$

Задача 43

Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2.$$

Задача 47

Определить косинус угла между диагоналями AC и BD параллелограмма, если заданы его вершины: $A(2, 1, 3)$; $B(5, 2, -1)$; $C(-3, 3, -3)$.

Задача 44

Точки $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$, $C(-4, 0, 3)$ являются вершинами треугольника. Найти длину медианы, проведенной из вершины A .

Задача 48

Точки $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$ и $D(0, 0, 4)$ являются вершинами тетраэдра $ABCD$. Составить уравнение его высоты AN .

Задача 49

Определить длину перпендикуляра, опущенного из точки $C(1, -3, 9)$ на прямую, проходящую через точки $A(4, 6, 1)$ и $B(2, 0, 4)$.

Задача 50

Найти вектор \vec{x} , если он перпендикулярен векторам $\vec{a}(3, -2, 1)$ и $\vec{b}(4, -2, -1)$ и удовлетворяют условию

$$\vec{x}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5.$$

Задача 51

Найти решение в случае совместности системы

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + z = 2, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Задача 52

Даны векторы: $\vec{a}_1(2, 3, 5)$, $\vec{a}_2(3, 7, 8)$, $\vec{a}_3(1, -6, 1)$ и $\vec{x}(7, -2, \lambda)$. Найти все значения параметра λ , при которых \vec{x} линейно выражается через векторы \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и \vec{a}_3 .

Задача 53

Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1. \end{cases}$$

Задача 54

Привести уравнение плоскости к нормальному виду:

$$\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0.$$

Задача 55

Определить уравнения сторон и углы треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -1, 1)$.

Задача 56

Найти точки, удаленные от плоскости

$$3x - 2y + 5z + 1 = 0$$

на 3 единицы.

Задача 57

Найти объем параллелепипеда с вершинами в точках $A(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 5)$, $C(-1, -2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$.

Задача 58

Найти определитель и обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задача 59

Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0.$$

Доказать, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}].$$

Задача 60

Показать, что прямые $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$ не лежат в одной плоскости и вычислить расстояние между ними.

Задача 61

В треугольнике ABC с вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$. Определить высоту $h = |\overrightarrow{BD}|$.

Задача 62

Найти синус угла между векторами $\vec{a}(6, 3, 2)$ и $\vec{b}(-2, 2, 1)$ (двумя способами).

Задача 63

Даны векторы $\vec{a}(1, 1)$ и $\vec{b}(1, -1)$. Определить косинус угла между векторами \vec{x} и \vec{y} , если они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}, \\ \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}. \end{cases}$$

Задача 64

Определить координаты вектора \vec{x} , который перпендикулярен векторам $\vec{a}(4, -2, -3)$ и $\vec{b}(0, 1, 3)$ и образует с ортом \mathbf{j} тупой угол, причем $|\vec{x}| = 26$.

Задача 65

Доказать, что вектор

$$\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

перпендикулярен вектору \vec{a} .