

Задача 1

Найти координаты центра тяжести полуокружности

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Задача 5

Вычислить площадь части поверхности

$$z = \frac{1}{4}xy,$$

расположенной внутри поверхности

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Задача 2

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy.$$

Задача 6

Вычислить координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линией

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и осями координат ($x \geq 0, y \geq 0$).

Задача 3

Перейти к сферической или цилиндрической системе координат в интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz;$$

V — часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2(x^2 - y^2)$; $x \geq 0$.

Задача 7

Найти массу шара

$$(z - R)^2 + x^2 + y^2 \leq R^2,$$

если плотность пропорциональна расстоянию от начала координат с коэффициентом пропорциональности k .

Задача 4

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2, \\ z &= 0, \\ y^2 &= 2x + 1, \\ x - y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Задача 8

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy.$$

Задача 9

Записать в цилиндрических или сферических координатах интеграл

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\x^2 + y^2 &= 3z, \quad z \geq 0.\end{aligned}$$

Задача 13

Вычислить

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1},$$

если D ограничена линиями $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$.

Задача 10

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

Задача 14

Вычислить

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

если D ограничена линией

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Задача 11

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx.$$

Задача 15

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 4.$$

Задача 12

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx.$$

Задача 16

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x = 2y^2, \quad x + 2y + z = 4, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Задача 17

Найти площадь части поверхности конуса

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

заключенной внутри цилиндра

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

Задача 18

Найти площадь поверхности цилиндра $x^2 = 2z$, отсекаемой плоскостями

$$x - 2y = 0, y = 2x, x = 2\sqrt{2}.$$

Задача 19

Вычислить

$$J = \iiint_V x^2 dx dy dz,$$

$$V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Задача 20

Вычислить

$$J = \iiint_V z dx dy dz,$$

где область V ограничена поверхностями

$$z^2 = x^2 + y^2, z = 2.$$

Задача 21

Вычислить

$$\int_C x^2 y dy - y^2 x dx,$$

если C :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y = \sqrt{\sin t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Задача 22

Найти массу дуги кривой

$$x = t, y = \frac{t^2}{2}, z = \frac{t^3}{3} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для плотности $\gamma = \sqrt{2y}$.

Задача 23

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_{AB} (x^2 - y^2) dx + xy dy,$$

если путь от $A(2, 2)$ до $B(4, 5)$ — отрезок прямой.

Задача 24

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_C (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

если C — ломаная OAB , где $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 2)$.

Задача 25

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int_C 2x dy - 3y dx,$$

если C — контур треугольника с вершинами $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 5)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Задача 26

Вычислить

$$\int_C -x^2y dx + xy^2 dy,$$

если C — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Задача 27

Вычислить

$$\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

σ — внешняя сторона поверхности цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (-h \leq z \leq h).$$

Задача 28

Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$$

через сторону треугольника S , вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

Задача 29

Найти поток вектора

$$\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

через часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

если $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$.

Задача 30

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$$

по контуру треугольника ABC : $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Задача 31

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

по окружности

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Задача 32

Найти циркуляцию вектора

$$\vec{u} = (x + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + x\vec{k}$$

по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 33

Найти дивергенцию градиента функции

$$u = e^{x+y+z}.$$

Задача 37

Найти площадь части поверхности $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = 4$.

Задача 34

Найти поток радиуса-вектора

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

через замкнутую поверхность

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0 \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Задача 38

Найти площадь части поверхности $z^2 = 4x$, вырезанной поверхностями $y^2 = 4x$, $x = 1$.

Задача 35

Найти работу силы \vec{F} при перемещении вдоль линии L от M к N

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j};$$

L — отрезок MN , $M(1, 0)$, $N(0, 3)$.

Задача 39

Найти момент инерции кругового сектора с центральным углом α относительно центра круга (R — радиус круга, $\gamma = 1$).

Задача 36

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = 4$, $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$.

Задача 40

Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 12, \quad z \geq 0.$$

Задача 41

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy,$$

где L — парабола $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.

Задача 42

Вычислить

$$\int_K (x - y) ds,$$

где K — отрезок прямой от $A(0, 0)$ до $B(4, 3)$.

Задача 43

Вычислить

$$\int_{AB} (x^2 - y^2) dx + xy dy,$$

где AB — отрезок прямой от $A(1, 1)$ до $B(3, 4)$.

Задача 44

Найти массу кривой L , заданной уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = r \sin t, \\ y(t) = r \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

с линейной плотностью $\mu = kx^2$.

Задача 45

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^2, y^2\}$ вдоль окружности L радиуса 2 с центром в начале координат.

Задача 46

Найти

$$\oiint_S 2 dx dy + (x + y) dx dz + (x^2 + z) dy dz,$$

где S — поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 47

Найти

$$\operatorname{div} \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt[3]{(x + y + z)^2}}.$$

Задача 48

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \{x^2y + x - y, 2x + y^2\}$ вдоль контура, ограниченного линиями $y = x^2 + 1$, $y = 2$.

Задача 49

Проверить, что поле

$$\vec{F} = (2xy - x)\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + (y^2 + z)\vec{k}$$

является потенциальным, и найти его потенциал.

Задача 50

Найти радиус сходимости и исследовать сходимость на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}.$$

Задача 51

Разложить в степенной ряд

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Задача 52

Разложить в степенной ряд

$$f(x) = \frac{x}{4 + x^2}.$$

Задача 53

Найти массу первого витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, где $a > b > 0$, если плотность в каждой точке равна квадрату длины радиус-вектора этой точки.

Задача 54

Вычислить

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy,$$

где

$$D: \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \leq x\sqrt{3}, \\ y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Задача 55

Вычислить

$$\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz,$$

где S — внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Задача 56

Вычислить

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

Задача 57

Найти координаты центра масс однородного тела ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $z = 2$.

Задача 58

Вычислить работу силы $\vec{F} = (x, y, x + y + z)$ вдоль прямой от точки $(0, 1, 1)$ до точки $(1, 2, 2)$.

Задача 59

Найти статические моменты однородного тела, ограниченного частью эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

лежащей в первом октанте, и коорд. плоскостями, относительно координатных плоскостей.

Задача 60

Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F} = (x^2 + y^2)$ вдоль контура Γ , образованного линиями $x = 4$, $y = 0$, $y^2 = 4x$ в направлении против часовой стрелки.

Задача 61

Найти массу четверти шара, лежащей в первом октанте, с центром в начале координат, радиуса R , если плотность $\mu = kr^2$.

Задача 62

Вычислить $\iint_S x \, ds$, S — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащая в первом октанте.

Задача 63

Определить момент инерции однородной боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq a$) относительно оси OZ .

Задача 64

Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = x^2 + y^2 + 1$.

Задача 65

Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = (xy^2, xy)$ по контуру, состоящему из половины окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости, и диаметра, на который она опирается, в направлении против часовой стрелки.

Задача 66

Вычислить $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где D ограничена линиями $x = y^2$, $y = x^2$.

Задача 67

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости $x + 2z = 2$, лежащую в первом октанте и отсекаемую плоскостью $y = 4$.

Задача 68

Вычислить $\int_{\Gamma} x^2 dx - y^2 dy$, где Γ состоит из отрезков $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Задача 69

Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

Задача 70

Найти массу части параболы $y = \frac{x^2}{2}$ от точки с абсциссой $x = 1$ до точки с абсциссой $x = 2$. Плотность $\nu(x, y) = \frac{x}{y}$.

Задача 71

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = xy$, $x + y = 1$.

Задача 72

Вычислить массу части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащей в первом октанте, если поверхностная плотность равна $2xy$.

Задача 73

Вычислить объем шарового сектора радиуса R с углом 2α при вершине.

Задача 74

Вычислить

$$\iint_D x^3 y \, dx dy,$$

где $D: y = x^2, y = 2x$.

Задача 75

Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x^2, y^2, 0)$ через часть сферы, лежащую в первом октанте.

Задача 76

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = x + 2$.

Задача 77

Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = (xy^2, yx^2)$ по контуру, состоящему из $x^2 + y^2 = R^2 (y \geq 0)$ и $y = 0$ в направлении против часовой стрелки.

Задача 78

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(3n-1)!}$$

Задача 79

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n - \ln n}$$

Задача 80

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

Задача 81

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+7)5^n}.$$

Задача 85

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}.$$

Задача 82

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^n.$$

Задача 86

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n.$$

Задача 83

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! (x+4)^n}{(n+1)^n}.$$

Задача 87

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Задача 84

Найти области абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{3}} (x-1)^n}{n!}.$$

Задача 88

Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}.$$

Задача 89

Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}.$$

Задача 90

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Задача 91

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3+5n}.$$

Задача 92

Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}.$$