

Министерство образования Российской Федерации

***“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО***

Кафедра “Высшая математика”

Дифференциальные уравнения

Методические указания к контрольной работе по курсу высшей математики
на вечернем отделении

Составитель: ст. преп. Данилина И. А.

Москва 2002 г.

Введение

В четвертом семестре при изучении дифференциальных уравнений на вечернем отделении учебным планом предусмотрено проведение контрольной работы.

Последовательность задач, а также их содержание, в данной контрольной работе полностью согласуются с программой соответствующего курса. Первый пример является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными; второй – уравнением Бернулли; третий – дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающим его понижение, четвертый – линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

При решении контрольной работы студент должен продемонстрировать не только практические навыки решений дифференциальных уравнений, но и теоретические знания основных положений теории: как-то, общий интеграл дифференциальных уравнений, общее решение, решения задачи Коши, структура общего линейного дифференциального неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Студент, претендующий на оценку по высшему уровню, должен решить все четыре задачи, по среднему уровню – три задачи, включая четвертую, по нижнему уровню – любую из первых трех задач и последнюю.

Студент, решивший менее двух задач, получает за контрольную работу «незачет», а не экзамене – обязательно дополнительные задачи по данной теме.

Вариант 1.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$y^m \operatorname{tg} x = y^n + 1.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n + 3y' + 2y = 1 - x^2.$$

Вариант 2.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$xy^m - y^n + \frac{1}{x} = 0.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n - y = x^2 + x.$$

Вариант 3.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' - y \cos x = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$y^m \operatorname{ctg} x = y^n + 1.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n + y' = 5x^2 - 1.$$

Вариант 4.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$(1 + \cos x) y^m = \sin xy^n.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$7y^n - y' = 12x.$$

Вариант 5.

5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' - \frac{y}{x+2} = 0.$$

6. Найти решение задачи Коши.

$$xy' + y = xy^2, y(1) = 1.$$

7. Найти общее решение уравнения.

$$-xy^m + 2y^n = \frac{2}{x^2}.$$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n - 13y' + 12y = x - 1.$$

Вариант 6.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' + xy = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$xy' + y = y^2 \lg x, y(1) = 1.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$y^m \operatorname{ctg} 5x = 5y^n.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x - 5.$$

Вариант 7.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$(1 + \sin x)y^m = \cos xy^n.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n - y' = 6x + 3x.$$

Вариант 8.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$y' - y = xy^2, y(0) = 1.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$(x+1)y^m + y^n = (x+1).$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n + y' = x.$$

Вариант 9.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$x^3 y^m + 2x^2 y^n = \sqrt{x}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n - 5y' + 6y = (x-1)^2.$$

Вариант 10.

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = 0.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$y' + 2xy = 2x^3 y^3, y(0) = \sqrt{2}.$$

3. Найти общее решение уравнения.

$$y^m \operatorname{tg} 5x = 5y^n.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y^n + y = 12x + 6.$$

Пример решения контрольной работы

1) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3+e^x)yy' = e^x$$

Решение

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными

Разделяем переменные

$$yy' = \frac{e^x}{3+e^x}$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{3+e^x}$$

$$y dy = \frac{e^x}{3+e^x} dx$$

Интегрируя левую часть этого уравнения по y , а правую по x , получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\int y dy = \int \frac{e^x}{3+e^x} dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(3+e^x) + C$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln(3+e^x) = C$$

2) Найти решение задачи Коши

$$y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1$$

Решение

Уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$.

Тогда $y' = u'v + uv'$. И после подстановки первоначальное уравнение примет вид:

$$u'v + uv' + uv = xu^2v^2$$

$$u'v + u(v' + v) = xu^2v^2 \quad (*)$$

Приравняем к нулю выражение стоящие в скобках

$$v' + v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln|v| = -x + C$$

Из общего решения выберем одно частное уравнение $v = e^{-x}$

Подставляя v в уравнение (*), получим новое уравнение

$$\frac{du}{dx} e^{-x} = xu^2 e^{-2x}$$

Это уравнение явл. уравнением с разделяющимися переменными. Решаем его

$$\frac{du}{u^2} = xe^{-x} dx$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int xe^{-x} dx + C;$$

$$u = \frac{1}{xe^{-x} + e^{-x} - C}$$

Следовательно, общее решение первоначального уравнения

$$y = \frac{e^{-x}}{xe^{-x} + e^{-x} - C}$$

Для того, чтобы найти C, воспользуемся начальным условием.

$$y(0) = \frac{1}{1-C};$$

$$\frac{1}{1-C} = 1 \Rightarrow c = 0$$

Окончательное решение задачи Коши

$$y = \frac{e^{-x}}{xe^{-x} + e^{-x}}$$

Или после сокращения на e^{-x}

$$y = \frac{1}{x+1}$$

Так же можно проинтегрировать и линейное уравнение первого порядка.

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'''' + y'' = 1$$

Решение.

Данное уравнение не содержит y и y' . Положим $y'' = z$, тогда $y''' = \frac{dz}{dx}$,

и уравнение примет вид:

$$x \frac{dz}{dx} + z = 1$$

Это линейное уравнение первого порядка. Его общее решение $z = 1 + \frac{C}{x}$.

Следовательно

$$y'' = 1 + \frac{C}{x}.$$

Проинтегрировав это равенство два раза получим

$$y = \frac{x^2}{2} + C(x \ln x - x) + Bx + A$$

4) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = x$$

Решение.

Это неоднородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения состоит из двух частей $\bar{y}$ - общего решения соответствующего однородного уравнения и y^* - частного решения самого уравнения.

Характеристическое уравнение $l^2 + 4l + 3 = 0$ имеет корни $l_1 = -3, l_2 = -1$.

Значит, общее решение однородного уравнения $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Будем искать частное решение в виде

$$y^* = Ax + B.$$

$$y^{*'} = A; y^{*''} = 0.$$

Подставим $y^*, y^{*'}$ и $y^{*''}$ в исходное уравнение и получим $4A + 3(Ax + B) = x$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , будем иметь $3A = x^1, 4A + 3B = 0$.

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{4}{9}$$

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Литература

1. «Сборник задач по математике для втузов». Часть 2. «Специальные разделы математического анализа» (под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича). М., Наука, 1995.
2. Данко П.Б, Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., «Высшая математика в упражнениях и задачах». Часть 2, М., Высшая школа, 1998.
3. Кузнецов Л.А, «Сборник заданий по высшей математике». М., Высшая школа, 1994.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного». М., Наука, 1985.
5. Пискунов И.С. «Дифференциальные и интегральные исчисления для втузов». Том 2. М.,- Наука, 1985.