Министерство образования и науки
Российской Федерации

«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

Комплексные числа и операционное исчисление

Справочный материал и методические указания
для студентов и преподавателей

Составители: Заварзина И. Ф.
Кулакова Р. Д.

Москва 2004

Введение

Методические указания содержат материалы для практических занятий по действиям с комплексными числами и операционному исчислению. Введение комплексных чисел связано с решением уравнений вида $x^2 + 1 = 0$. В множестве R не существует решений данного уравнения, однако в множестве комплексных чисел – С решение существует. Множество С содержит элемент, квадрат которого равен (-1). Так как этот элемент не может быть действительным, то его обозначают через i, т. е. $i^2 = -1$.

Комплексные числа находят широкое применение в задачах физики, геометрии, электротехники. Операционное исчисление изобретено английским ученым О. Хевисойдом, предназначено для решения, дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами как однородных так и неоднородных. Многие прикладные задачи описываются такими уравнениями. В частности, методы операционного исчисления позволяют с большим успехом рассчитывать любые процессы в сложных электрических цепях при произвольном внешнем напряжении

Методические указания предназначены для студентов 3 факультета, а также для преподавателей.

1. Комплексные числа. Действия над ними

Комплексное число z - это число вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма комплексного числа), где x, y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются x = Rez, y = Imz. Число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $x + iy$.

$$(z_1 = z_2) \overset{\text{det}}{\Longleftrightarrow} (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$$

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости ХОУ точкой М с координатами (x, y) или вектором с координатами (x, y), (рис. 1.1)

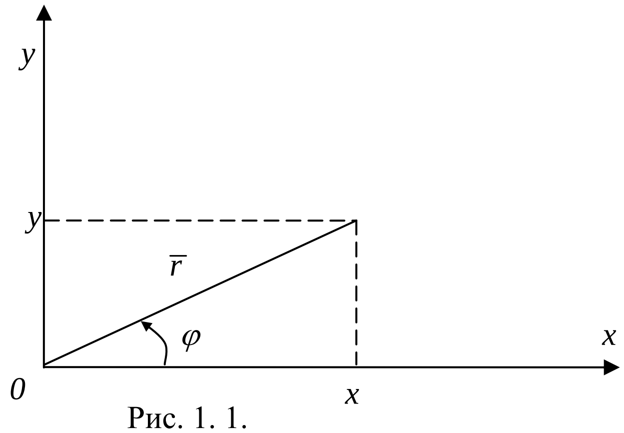


Рис. 1. 1.

Длина r вектора z называется модулем числа z и обозначается $|z|$. Угол φ между положительным направлением оси ОХ и вектором z называет аргументом комплексного числа и обозначается Arg z; он определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение arg z аргумента z, удовлетворяющее условию $0 \le \arg z \le 2\pi$ или $-\pi \le \arg z \le \pi$ называется главным. Имеем $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа имеют вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$.

Связь между алгебраической и тригонометрической формами устанавливается при помощи формул $x = r\cos\phi,\ \ y = r\sin\phi,\ \ r\sqrt{x^2 + y^2},\ \ tg\phi = \dfrac{y}{x}$.

Действия на комплексными числами осуществляются по следующим правилам:

а) числа заданы в алгебраической форме:

$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_1 = x_2 + iy_2;$

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 \pm y_1 y_2) + i(x_1 y_2 \pm x_2 y_1);$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};$

б) числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right); \quad z_2 = r_2\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos\left(\phi_1 + \phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1 + \phi_2\right)\right];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\phi_1 + \phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1 - \phi_2\right)\right];$$

$$z = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right);$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\phi + i\sin n\phi\right);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,(n-1).$$

Задача 1.

Задана комплексные числа: а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = 1 + i$; г) $z_4 = -1 + 2i$; д) $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$; е) $z_1 = 2 - i$.

Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической, а z_4, z_5, z_6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной площади.

Решение:

а) имеем (см. рис. 1.2) r = 1; φ = π, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ (1.1)

б) имеем (см. рис. 1.2) r = 2; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

в) имеем $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $tg\varphi = 1$; согласно рис. 1.2 точка z_3 принадлежит первому квадранту, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так что $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (1.2);

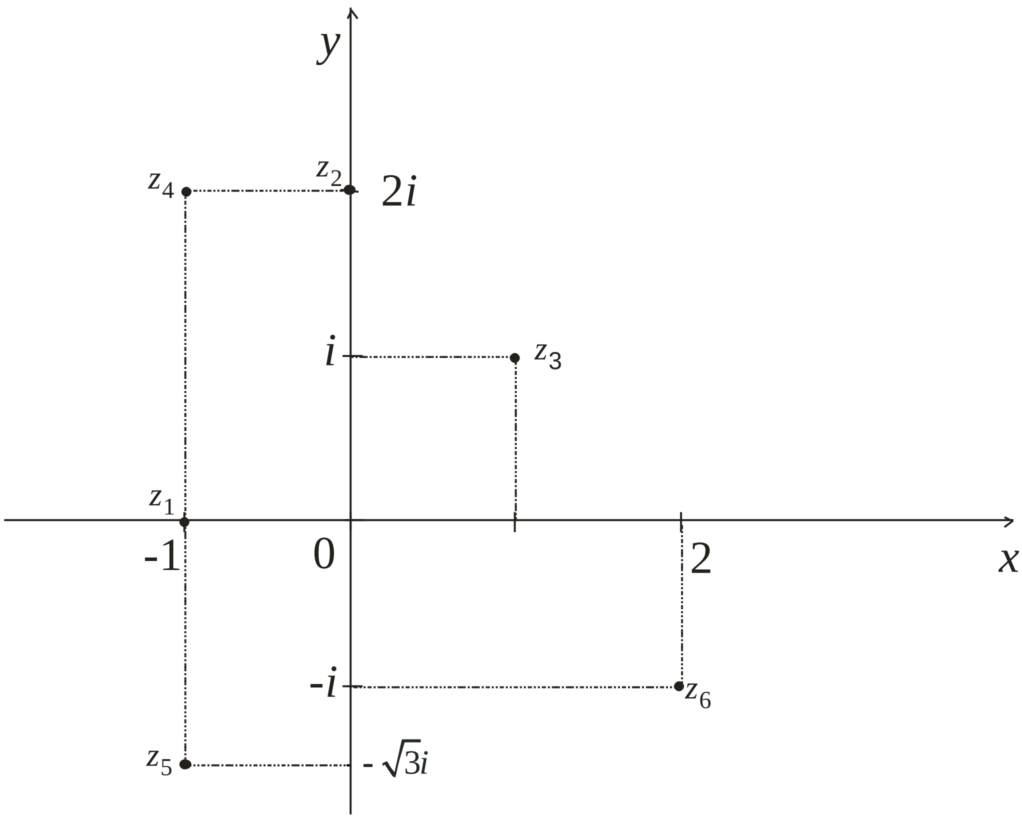


рис. 1.2

г) имеем $r=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}, \quad \mathrm{tg}\varphi=-2;$ согласно рис. 1.2, точка z_4 принадлежит второму квадранту, поэтому $\varphi=\pi-arctg2,$ так что $-1+2i=\sqrt{5}e^{i(\pi-artcrg\,2)}$;

д) имеет $r=\sqrt{1+3}=2$, $tg4=-\sqrt{3}$, согласно рис. 1.2, точка z_5 принадлежит третьему квадранту, поэтому $\varphi=\dfrac{4}{3}\pi$, так что $-1-i\sqrt{3}=e^{i\frac{4}{3}\pi}$ (1.3);

е) имеем $r=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}, \quad \mathrm{tg}\varphi=-\dfrac{1}{2}$, согласно рис. 1.2, точка z_6 принадлежит четвертому квадранту, поэтому $\varphi=arctg\left(-\dfrac{1}{2}\right), \quad 2\text{-}i=\sqrt{5}e^{i\left[arctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$.

Задача 2.

Найти все значения корней: а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{-1-i3}$.

Решение:

а) имеем согласно (1.2)

$$\sqrt{2i}=\sqrt{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]}=\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right], \quad k=0,1;$$

$$\text{при } k=0 \quad \left(\sqrt{2\mathrm{i}}\right)_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{при } k=1 \quad \left(\sqrt{2i}\right)_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

б) имеем согласно (1.1)

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k=0,1,2;$$

$$\text{при } k=0 \quad \left(\sqrt[3]{-1}\right)_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};$$

$$\text{при } k=1 \quad \left(\sqrt[3]{-1}\right)_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};$$

$$\text{при } k=2 \quad \left(\sqrt[3]{-1}\right)_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

в) Имеем согласно (1.3)

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right)\right]}=\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right),$$

$k=0,1,2,3;$

$$\text{при } k=0 \quad \left(\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}\right)_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\text{при } k=1 \quad \left(\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}\right)_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$\text{при } k=2 \quad \left(\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}\right)_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\text{при } k=3 \quad \left(\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}\right)_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{3}+i\sin\frac{11\pi}{3}\right)$$

Задача 3.

Представить в алгебраической форме $z = \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^9$

Решение:

Пусть $z_1 = 1-i, \quad z_2 = \sqrt{3}+i.$ Имеем $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}, \quad tg\varphi_1 = -1$; точка z_1 принадлежит четвертому квадранту, поэтому

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^9 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^9 \left[\cos 9(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin 9(\varphi_1 - \varphi_2) \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 \left[\cos \frac{57}{4}\pi + i \sin \frac{57}{4}\pi \right] = \frac{1+i}{32}$$

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Преобразование Лапласа функции $f(t), t \in R,$ которая может принимать комплексные значения, называется функция $F(p)$ комплексного переменного p, определяемая следующим равенством: $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t)\,dt, \quad p = s + i\sigma$ (2.1). Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям: 1) $f(t) \equiv 0 \;\; при \;\; t < 0$; 2) существуют также постоянные M и S, что $f(t) \le M \cdot e^{St} \;\; при \;\; t \ge 0$ (inf$S$ = S_0 называется показателем роста функции $f(t)$; 3) на любом конечном отрезке [0, T] функция $f(t)$ имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода, причем считаем, что $f(0) = f(t0)$. В этом случае несобственный интеграл, задающий преобразование Лапласа, сходится, причем абсолютно.

Функцию $F(p)$называют изображением для $f(t)$ и при этом записывается $F(p) \underset{g}{B} f(t)$ или $f(t) \underset{g}{B} F(p)$. $F(p)$ является функцией, заданной в полуплоскости Rep > S_0. Простейшей функцией оригиналом является единичная функция Хевисайда (рис 2.1)

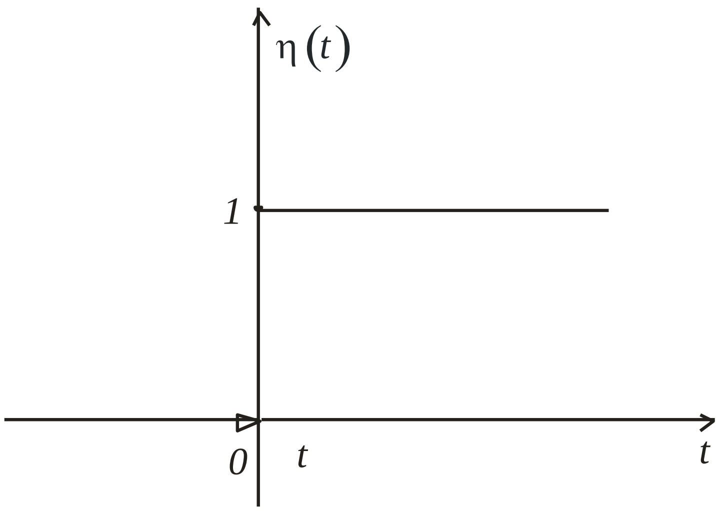


рис. 2.1

$$\eta(t)=\begin{cases}1 \ \text{при} \ t\ge 0\\ 0 \ \text{при} \ t<0\end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t)\cdot\eta(t)$, считая, что $f(t)=0 \ \text{при} \ t<0$. Ниже приводятся основные теоремы операционного исчисления.

1) <u>Свойство линейности.</u>

Для постоянной $C_k \quad (k=1,\overline{n})$ $\quad \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} F_k(p)$, $\operatorname{Re} p>\max[S_1,\ldots,S_n]$ (2.2) (Здесь и всюду в дальнейшем считаем, что $f(t)\risingdotseq F(p)$);

2) <u>Теорема подобия.</u>

Для любой постоянной $a>0,\ a\in R,\ f(at)\risingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\ \operatorname{Re} p>aS_0$

3) <u>Теорема смещения.</u> Умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует запаздыванию изображения на α, т.е.

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha), \operatorname{Re}(p-\alpha)>S_0, \qquad (2.4)$$

α - некоторая постоянная (действительная или комплексная величина).

4) <u>Теорема запаздывания.</u> Запаздыванию включения оригинала на $\tau>0$ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$, т.е.

$$f(p-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\cdot F(p), \operatorname{Re} p>S_0, \qquad (2.5)$$

(при $t<\tau$ в силу первого условия, налагаемого на оригинал, $f(t-\tau)\equiv 0$).

5) <u>Теорема о дифференцировании оригинала.</u>

Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)(k=1,2,\ldots,n)$ являются оригиналами, то для любого $k=1,2,\ldots,n$

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq pF(p)-p^{k-1}f(0)-p^{k-2}f'(0)-\ldots-f^{(k-1)}(0) \qquad (2.6)$$

В частности

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0), \operatorname{Re} p>S_0 \qquad (2.7)$$

6) <u>Интегрирование оригинала.</u> Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, т.е.

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p>S_0. \qquad (2.8)$$

7) <u>Дифференцирование изображения.</u>

Если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то $F'(p) \risingdotseq tf(t)$, в общем случае $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n\cdot f(t)$ (2.9)

Задача 1.

Выяснить, какие из данных функций являются оригиналами:

а) $f(t)=\begin{cases}0, t<0\\ e^{(3+4i)t}, t\geq 0\end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{1}{t-4}, t\geq 0\end{cases}$

Решение. а) функция $f(t)$ является оригиналом, т.к. удовлетворяет всем требования, предъявляемым к оригиналу: при $t<0$ обращается в нуль, непрерывна, а для $t\geq 0$ $|f(t)|=\left|e^{(3+4i)t}\right|=e^{3t}\left|\cos 4t+i\sin 4t\right|=e^{3t}\leq Me^{st}$ при $M\geq 1, S\geq 3(S_0=\inf s=3)$;

б) функция $f(t)$ не является оригиналом, т.к. в точке $t=4$, принадлежащей промежутку $[0,+\infty[$, она имеет разрыв второго рода.

Задача 2. Найти изображение функций-оригиналов, используя определение:

а) $f(t)=\eta(t)$; б) $f(t)=e^{5t}$.

Решение. Для функции $f(t)=\eta(t)$ имеем

$$F(p)=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}, \operatorname{Re} p>0,$$

так как

$$\left|e^{-pt}\right|=\left|e^{-(s+i\sigma)t}\right|=e^{-st}\left|\cos\sigma t-i\sin\sigma t\right|=e^{-st}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-st}=0$ при $s>0, s=\operatorname{Re} p>0$.

Для функции $f(t)=e^{5t}$ имеем

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot e^{5t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-5)t}dt=-\frac{1}{p-5}e^{-(p-5)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-5} \text{ при } \operatorname{Re} p>5.$$

Задача 3. Найти изображения следующих функций-оригиналов, используя теоремы операционного исчисления.

а) $\operatorname{sh}2t$; б) $t\operatorname{sh}2t$; в) $\cos 3t$; г) $e^t\cdot\cos 3t$; д) $t^n, n\in Г$.

Решение. а) Имеем $f(t)=\operatorname{sh}2t=\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)\big/2$. Используя теорему смещения для

$$e^{2t}\text{ В }\frac{1}{p-2}; e^{-2t}\text{ В }\frac{1}{p+2}$$

и окончательно, учитывая свойство линейности (2.2), запишем

$$\sin 2t=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\text{ В }\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}\right)=\frac{2}{p^2-4};$$

б) для функции $f(t) = t\,\mathrm{sh}\,2t$ используем теорему о дифференцировании изображения;

если $\mathrm{sh}\,2t \text{ В } \dfrac{2}{p^2-4}$, то $t\,\mathrm{sh}\,2t \text{ В } -\left(\dfrac{2}{p^2-4}\right)' = \dfrac{4p}{\left(p^2-4\right)^2}$;

в) имеем $\cos 3t = \dfrac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}$.

Применяя теорему смещения к e^{i3t} и e^{-i3t} и используя свойство линейности (2.2), получаем

$$\cos 3t = \frac{1}{2}\left(e^{i3t}+e^{-i3t}\right) \text{ В } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-3i}+\frac{1}{p+3i}\right) = \frac{p}{p^2+9};$$

г) для функции $f(t) = e^t \cdot \cos 3t$ воспользуемся результатом предыдущего примера и теоремой смещений (2.4):

если $f(t) = \cos 3t \text{ В } \dfrac{p}{p^2+9}$, то $f(t)\cdot e^t = \cos 3t \cdot e^t \text{ В } \dfrac{p-1}{\left(p-1\right)^2+9}$;

д) $f(t) = t^n$. Найти $F(p)$.

Если $1 \text{ В } \dfrac{1}{p}$, то $t \text{ В } -\left(\dfrac{1}{p}\right)' = \dfrac{1}{p^2}$; далее для $t^2 \text{ В } \dfrac{2!}{p^3}, t^3 \text{ В } \dfrac{3!}{p^4}, \text{K}, t^n \text{ В } \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Ниже приводится таблица основных операционных соотношений.

Таблица.

№ п/п	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-\tau), \tau > 0$	$\frac{1}{p}e^{-\tau p}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$t^n, n \in \Gamma$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$t^n \cdot e^{\alpha t}, n \in \Gamma$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
8	$\operatorname{sh} t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
9	$\operatorname{ch} t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
10	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
11	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
12	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
13	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Задача 4. Найти изображение следующих функций-оригиналов, используя теоремы операционного исчисления и таблицу.

а) $f(t) = 3 - 5t^2 + 2\sin 4t - 3e^{-6t}$;

б) $f(t) = \cos^2 3t$; в) $f(t) = te^{5t}$.

Решение. а) используя свойство линейности и таблицу, получи

$$F(p) = \frac{3}{p} - 5\frac{2!}{p^3} + 2\frac{4}{p^2+16} - 3\frac{1}{p+6} = \frac{3}{p} - \frac{10}{p^3} + \frac{8}{p^2+16} - \frac{3}{p+6};$$

б) применив формулу, получим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

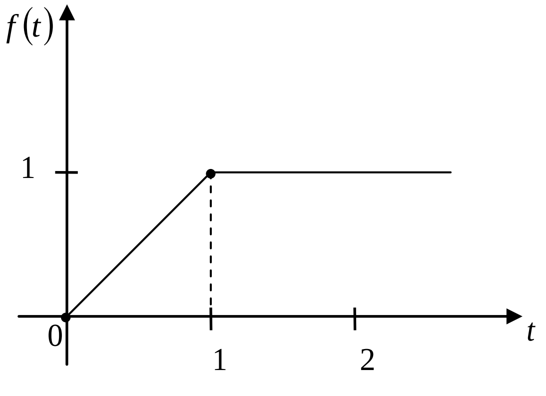
и используя свойство линейности, можем записать

$$\cos^2 3t = \frac{1}{2}(1+\cos 6t) \text{ В } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+36}\right);$$

в) учитывая соотношение $t \text{ В } \dfrac{1}{p^2}$ и теорему смещения

$e^{\alpha t} f(t) \text{ В } F(p-\alpha)$, получим $te^{5t} \text{ В } \dfrac{1}{(p-5)^2}$.

Задача 5. Найти изображение для функции-оригинала, представленного графически (рис. 2.2).



Решение. Имеем

$$f(t) = \begin{cases} t, 0 \le t \le 1 \\ 1, t > 1 \end{cases}.$$

Это эквивалентно записи

$$f(t) = t\eta(t) - t\eta(t-1) + \eta(t-1) = t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1)$$

И теперь, используя теорему запаздывания, таблицу и свойство линейности, получим

$$t\eta(t)-(t-1)\eta(t-1)\,\text{В}\,\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}.$$

3. Нахождение оригинала по изображению.

Задача 1. Найти оригинал для изображения

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$$

при помощи разложения на простейшие дроби.

Решение. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*. Так как

$$1\equiv A(p-1)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+Cp^2(p-1)+Dp(p-1),$$

то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{5},\ C=\frac{1}{20},\ D=-\frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$F(p)=-\frac{1}{4p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(p-1)}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{(p^2+4)}-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{(p^2+4)}\,\text{В}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

Свертка оригиналов. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - функции-оригиналы и $f(t)\,\text{В}\,F(p)$, $g(t)\,\text{В}\,G(p)$. По определению, сверткой оригиналов $(f*g)(t)$ называется интеграл

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (3.1)$$

По теореме сложения изображений свертки оригиналов $(f*g)(t)$ соответствует произведение изображений

$$(f*g)(t)\,\text{В}\,F(p)\cdot G(p).$$

Задача 2. Найти свертку функций $\sin t$ и $\cos t$.

Решение. Имеем

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos\tau d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(t-2\tau)+\sin t]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\tau \sin t\Big|_0^t + \frac{1}{4}\cos(t-2\tau)\Big|_0^t = \frac{1}{2}t\sin t.$$

Задача 3. Восстановить оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$ при помощи свертки.

Решение. Представим $F(p)$ как произведение двух функций и используя теорему умножения, запишем

$$\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2} = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1} \text{В} \sin t * \cos t = \frac{1}{2}t\sin t. \qquad \text{(см. задачу 2)}$$

4. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем.

Рассмотрим применение правил и теорем операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем при заданных начальных условиях. Предлагаем, что искомое решение, его производные и правая часть дифференциального уравнения являются оригиналами.

Схема решения дифференциального уравнения.

1. Искомая функция, ее производные, входящие в данное уравнение, правая часть уравнения заменяются их изображениями. В результате получается так называемое операторное уравнение.
2. Решаем операторное уравнение относительно изображения искомой функции.
3. Переходим от изображения искомой функции к оригиналу.

Схема решения систем дифференциальных уравнений такая же.

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение

$y''+y'-12y=3$, если $y(0)=1,\ y'(0)=0$

Решение. Пусть $y=y(t)$ - искомое решение.

y В $\overline{y})p$

y' В $p\overline{y}(p)-y(0)=p\overline{y}(p)-1$

y'' В $p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)=p^2\overline{y}(p)-p$

$3 \text{ В } \dfrac{3}{p}$.

Запишем операторное уравнение

$$p^2\bar{y}(p) - p + p\bar{y} - 1 - 12\bar{y}(p) = \frac{3}{p}$$

или

$$\bar{y}(p) = \frac{3 + p + p^2}{p^3 + p^2 - 12p} = \frac{3 + p + p^2}{p(p+4)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p-3}$$

$$3 + p + p^2 = A(p+4)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p+4).$$

Находим *A*, *B*, *C:* $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{5}{28}$, $C = \dfrac{5}{7}$.

Итак,

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p} + \frac{5}{28}\cdot\frac{p}{(p+4)} + \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{(p-3)} \text{ В} -\frac{1}{4} + \frac{5}{28}e^{-4t} + \frac{5}{7}e^{3t}.$$

Задача 2. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' + 5y' - 2x = 0, \\ y'' - 5x' - 4y = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Решение. Пусть $x(t) \text{ В } \bar{x}(p)$, $y(t) \text{ В } \bar{y}(p)$. Тогда

$$x'(t) \text{ В } p\bar{x}(p);\ y'(t) \text{ В } p\bar{y}(p);\ x''(t) \text{ В } p^2\bar{x}(p) - 1;\ y''(t) \text{ В } p^2\bar{y}(p).$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} (p^2 - 4)\bar{x}(p) + 5p\bar{y}(p) = 1, \\ -5p\bar{x}(p) + (p^2 - 4)\bar{y}(p) = 0. \end{cases}$$

Определяем $\bar{x}(p)$, $\bar{y}(p)$ по формулам Крамера

$$\bar{x}(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2+1)(p^2+16)};\ \bar{y}(p) = \frac{5p}{(p^2+1)(p^2+16)}$$

$$\bar{a}(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2+1)(p^2+16)} = \frac{A_1 p + B_1}{p^2+1} + \frac{A_2 p + B_2}{p^2+16}$$

Вычислим A_1, A_2, B_1, B_2, получим

$$A_1 = A_2 = 0; \qquad B_1 = -\frac{1}{3}; \quad B_2 = \frac{4}{3}$$

Итак,

$$\overline{x}(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{p^2+16}=\frac{1}{3}\cdot(-\sin t+\sin 4t)\Rightarrow$$

$$\overline{x}(p)=\frac{1}{3}\cdot(\sin 4t-\sin t)$$

$$\overline{y}(t)=\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+16)}=\frac{M_1p+N_1}{p^2+1}+\frac{M_2p+N_2}{p^2+16}$$

Вычислим M_1, M_2, N_1, N_2, получим $M_1=\frac{1}{3}, M_2=-\frac{1}{3}, N_1=N_2=0$

Тогда $\overline{y}(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+16}=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 4t)$

Итак, $x(t)=\frac{1}{3}(\sin 4t-\sin 3t); y(t)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 4t).$

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях с использованием интеграла Дюамеля.

Интеграл Дюамеля.

Если $f(t)=F(t)$ и $g(t)=G(t)$, то

$$pF(p)G(p)=f(t)g(0)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \quad (4.1)$$

или

$$pF(p)G(p)=f(t)g(0)+\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (4.1')$$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффицентами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=h(t)$$

при $y(0)=y'(0)=...=y^{(n-1)}(0)=0$ Если

$y(t)=\overline{y}(p), y'(t)=p\overline{y}(p),..., y^{(n)}(t)=p^n\overline{y}(p), h(t)=H(p)$,

то получим

$$a_0p^n\overline{y}(p)+a_1p^{n-1}\overline{y}(p)+...+a_n\overline{y}(p)=H(p)$$

или $\overline{y}(p)\cdot B(p)=H(p)$, где $B(p)$ - многочлен n-ой степени;

отсюда

$$\overline{y}(p)=\frac{H(p)}{B(p)} \qquad (4.2)$$

Если рассмотреть ещё одно дифференциальное уравнение, у которого правая часть равна единице,

$$a_0y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+...+a_ny_1=1$$

то при тех же нулевых начальных условиях в изображениях получим уравнение

$$\overline{y_1}(p)B(p)=\frac{1}{p}$$

Отсюда $B(p)=\dfrac{1}{p\overline{y_1}(p)}$ (4.3)

Подставим (4.3) в (4.2), получим

$$\overline{y}(p)=pH(p)\overline{y_1}(p) \qquad (4.4)$$

Используя интеграл Дюамеля (4.1’) для $f(t)=h(t), g(t)=y(t)$ и учитывая, что $g(0)=y(0)=0$, получаем

$$pH(p)\overline{y}(p)=y(t)=\int_0^t h(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau=\int_0^t y_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (4.5)$$

Итак, достаточно решить уравнение с правой частью равной единице, чтобы при помощи интеграла (4.5) получить решения при различных правых частях.

<u>Задача 3.</u>

Найти частное решение дифференциального уравнения, используя интеграл Дюамеля:

$$y''+y'=t; \quad y(0)=y'(0)=0 \qquad (4.7)$$

Пусть $y_1(t)=\overline{y}(p)$, тогда $y_1'(t)=p\overline{y_1}(p), y_1''(t)=p^2\overline{y_1}(p), 1=\frac{1}{p}$.

Получим уравнение для изображения $\overline{y}(p)$

$$p^2\overline{y_1}(p)+p\overline{y_1}(p)=\frac{1}{p}$$

Отсюда $\overline{y_1}(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}=te^{-t}=\int_0^t (t-\tau)\cdot e^{-\tau}d\tau=t-1+e^{-t}$

Возвращаясь к первоначальному уравнению для $y(t)$, Запишем

$$y(t)=\int_0^t y_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t (1-e^{-\tau})(t-\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t \left[(t-\tau)-(te^{-\tau}+\tau e^{-\tau})\right]d\tau=(t\tau-\frac{\tau^2}{2}+te^{-\tau}-\tau e^{-\tau}-e^{-\tau})\Big|_0^t=$$

$$=\frac{t^2}{2}-e^{-t}+1$$

Следует отметить, что преимущество операционного метода решения дифференциальных уравнений состоит в том, что благодаря этому методу мы заменяем решение дифференциального уравнения на решение алгебраического уравнения, что обычно сильно упрощает вычисление.

Применение методов операционного исчисления в задачах электротехники.

Методы операционного исчисления широко используются в решениях специальных задач электротехники.

<u>Задача1.</u>

Включение дополнительного источника ЭДС в цепь с ненулевыми начальными условиями.

Рассмотрим электрическую цепь с ненулевыми начальными условиями (рис. 5.1), где r- сопротивление; L- индуктивность; C – ёмкость конденсатора; k – выключатель.

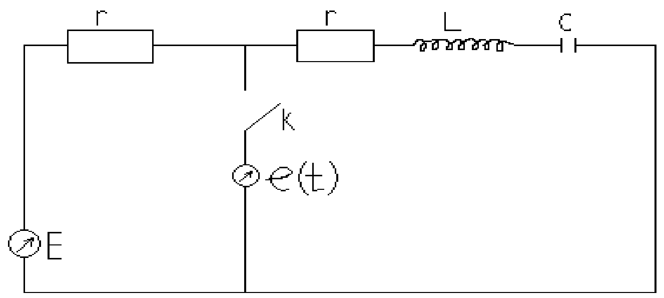


рис 5.1

Эта цепь характеризуется тем, что при отключении ЭДС E в цепи происходит зарядка конденсатора. После зарядки конденсатора ток в цепи становится равным нулю. Требуется найти ток i(t) после подключения к цепи дополнительной ЭДС e(t).

По второму закону Кирхгофа (алгебраическая сумма падения напряжения на сопротивлениях равна алгебраической сумме действующих в цепи ЭДС) для момента времени $t \geq 0$ имеем

$$e(t) = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt + u_c(o)\,, \qquad (5.1)$$

где $\frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt$ - напряжение на конденсаторе;

$u_c(0)$ – начальное напряжение на конденсаторе, обусловленное тем, что конденсатор уже был ранее заряжен.

Решение.

Применяя к интегро-дифяфференциальному уравнению (5.1) преобразование Лапласа, запишем

$$i(t) = J(p); \frac{di}{dt} = pJ(p) - i(0);$$

$$\int_0^t i(t)dt = \frac{1}{p}J(p); e(t) = E(p); u_c(o) = \frac{u_c(0)}{p};$$

где $i(0)$ - начальный ток в цепи. Используя указанные соотношения, получаем алгебраическое уравнение в изображениях

$E(p) = rJ(p) + pJ(p) - Li(0) + \frac{J(p)}{pC} + \frac{u_c(o)}{p}$, где неизвестной величиной является $J(p)$.

Остальные величины известны $(E(p), i(0), u_c(0), L, r, C)$. Из (5.2) получаем

$$J(p) = \frac{pE(p) + Lpi(0) - u_c(0)}{Lp^2 + rp + \frac{1}{c}}. \qquad (5.3)$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть
$e(t)=1В; i(0)=1А; u_c(0)=1В; L=1Гн; r=2Ом; C=1Ф.$ Применяя преобразование Лапласа, получаем $U=\frac{U}{p};$ следовательно, $E(p)=\frac{1}{p}.$ С учётом этих условий из (5.3) получаем

$$J(p)=\frac{p}{p^2+2p+1}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}=e^{-t}-te^{-t}=i(t). \qquad (5.4)$$

Замечание. Из полученного решения (5.4) следует, что $i(t)\to 0$, при $t\to+\infty$, т.е. $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{-t}-te^{-t})=0$ Это означает что за некоторое время конденсатор дополнительно зарядится и ток станет равным нулю.

Задача 2.
Определить ток в цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивления r и конденсатора C, если в момент t=0 цепь подсоединяется к источнику ЭДС (рис 5.2) в виде треугольного импульса (рис 5.3).

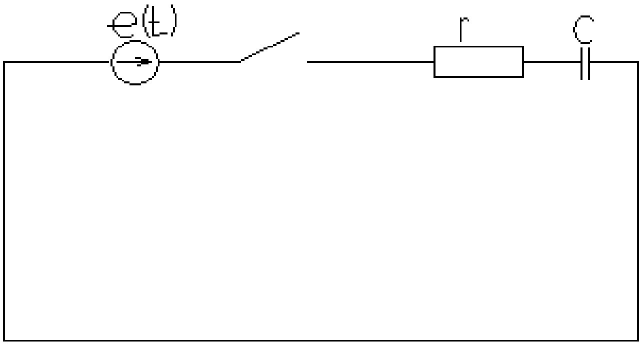


рис 5.2

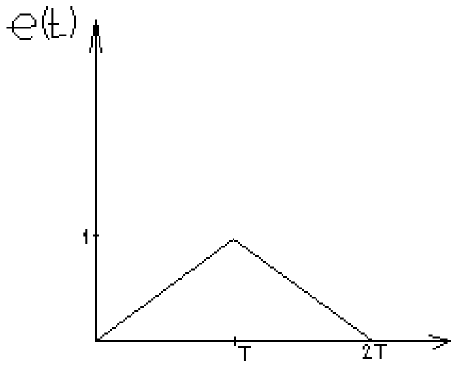


рис 5.3

В задаче задано

$$e(t)=\begin{cases}\frac{t}{T}, 0\le t\le T\\ -\frac{1}{T}(t-2T), T\le t\le 2T\end{cases}$$

Решение.
Используя второй закон Кирхгофа, получим интегральное уравнение для рассматриваемого контура

$$e(t)=ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \qquad (5.5)$$

Решение уравнения (5.5) выразим при помощи интеграла Дюамеля (4.1)

$$i(t)=e(0)j(t)+\int_0^t e'(\tau)j(t-\tau)d\tau, \qquad (5.6)$$

где $j(t)$ - решение вспомогательного уравнения

$$1=rj(t)+\frac{1}{C}\int_0^t j(t)dt \qquad (5.7)$$

Применяя преобразование Лапласа, имеем

$$j(t)=J(p);\ \frac{1}{C}\int_0^t j(t)dt=\frac{1}{p}J(p);1=\frac{1}{p}$$

Уравнение (5.7) преобразуется к алгебраическому уравнению для нахождения J(p)

$$\frac{1}{p}=rJ(p)+\frac{1}{Cp}J(p),\quad \text{откуда}\quad J(p)=\frac{1}{r(p+\frac{1}{rC})}=j(t)=\frac{1}{r}e^{-t/Cr} \qquad (5.8)$$

Подставляя найденное решение (5.8) вспомогательного уравнения (5.7) в интеграл Дюамеля (5.6) получаем решение исходного уравнения (5.5)

$$i(t)=\frac{1}{rT}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{rC}}d\tau-\frac{1}{rT}\int_T^{2T} e^{\frac{t-\tau}{rC}}d\tau=-\frac{C}{T}e^{-\frac{t}{rC}}(1-e^{\frac{T}{rC}})^2 .$$

Пример контрольной работы по операционному исчислению и комплексным числам.

Вариант 1.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+2p+5}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y''-3y'+2y=e^{2t},\ y(0)=1,\ y'(0)=0 .$$

3. Найти все значения корней

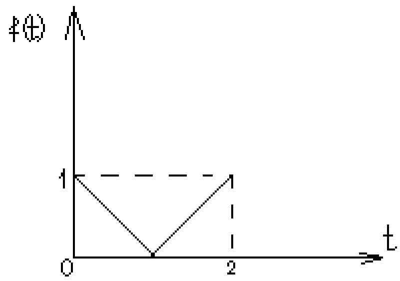
$a)\sqrt[3]{-1};$

$б)\sqrt[4]{1+i};$

4. Представить в алгебраической форме:

$$a)(1+i\sqrt{3})^8;\ б)\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически



6. Решить систему

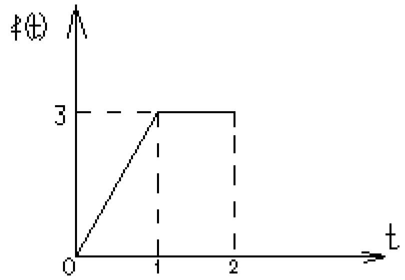
$$\begin{cases} x'=3x-y \\ y'=10x-4y \end{cases};\ x(0)=1;\ y(0)=5$$

Вариант 2.

1. Найти изображение функции:
$f(t) = t^2 \sin 3t \cdot e^{2t}$
2. Решить задачу Коши операторным методом:
$y'' - 4y' + 5y = t, y(0) = 2, y'(0) = -1$
3. Найти все значения корней
$a) \sqrt[4]{16};$
$б) \sqrt[3]{8i};$
4. Представить в алгебраической форме:
$$a)(-1 - i\sqrt{3})^8; б)\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$$
5. Восстановить оригинал по изображению
$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}$$
6. Решить систему
$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 0$$

Вариант 3.

1. Восстановить оригинал по изображению:
$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}$$
2. Решить задачу Коши операторным методом:
$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 0$.
3. Найти все значения корней
$a) \sqrt[3]{-8};$
$б) \sqrt[4]{1-i};$
4. Представить в алгебраической форме:
$$a)(-1 + i\sqrt{3})^7; б)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$$
5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 5$$

Вариант 4.

1. Найти изображение функции:
   $f(t) = te^{-t}\cos 2t$
2. Решить задачу Коши операторным методом:
   $y'' + 4y' = \cos 3t; y(0) = 1; y'(0) = 0$
3. Найти все значения корней
   $а)\sqrt[6]{-1};$
   $б)\sqrt[3]{i};$
4. Представить в алгебраической форме:
   $$а)(\sqrt[3]{3} + i)^7; б)\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^5$$
5. Восстановить оригинал по изображению
   $$F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p+1)^2}$$
6. Решить систему
   $$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 0.$$

Вариант 5.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{3}{p^2 - 4p - 5}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y'' - 2y' + 5y = e^{2t}\sin t, y(0) = 2, y'(0) = 0$.

3. Найти все значения корней

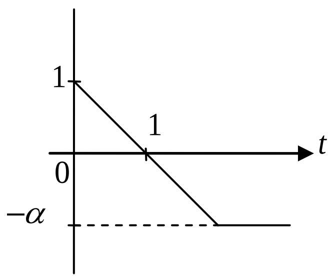
а) $\sqrt[3]{1}$;

б) $\sqrt[3]{-1-i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(\sqrt{3}-i)^8$; б) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -5x - 3y \end{cases}; x(0)=1; y(0)=0$$

Вариант 6.

3. Найти изображение функции:
   $f(t) = t^2 e^{-t} \sin t$
4. Решить задачу Коши операторным методом:
   $y'' + 3y' - 10y = te^{3t}; y(0) = 2; y'(0) = -1$
3. Найти все значения корней
   а) $\sqrt[6]{-64}$;
   б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$
4. Представить в алгебраической форме:
   а) $(-\sqrt{3}+i)^7$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^8$
6. Восстановить оригинал по изображению
   $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}; x(0)=0; y(0)=1.$$

Вариант 7.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y''+4y'+13y=10te^{2t},\ y(0)=5,\ y'(0)=0$.

3. Найти все значения корней

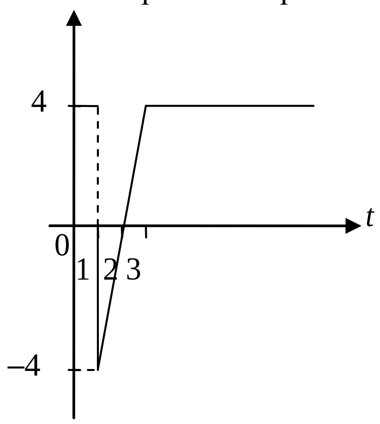
а) $\sqrt[3]{-8i}$;

б) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$;

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(1+i)^{14}$; б) $\left(\frac{-1+i}{-1-i}\right)^5$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=-2x+4y \end{cases};\ x(0)=0;\ y(0)=-1$$

Вариант 8.

1. Найти изображение функции:

$f(t)=te^t\,\mathrm{ch}3t$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y''-3y'+2y=e^{2t}\sin t;\ y(0)=3;\ y'(0)=1$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[6]{-8}$;

б) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-1-i)^{10}$;

б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p)=\frac{2p+3}{p^2+1}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}; x(0) = 1; y(0) = -1.$$

Вариант 9.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y'' - 2y' + 10y = te^{-t}, y(0) = 1, y'(0) = -2$.

3. Найти все значения корней

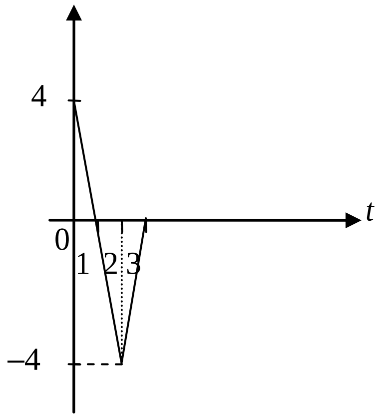
а) $\sqrt{2i}$;

б) $\sqrt[3]{-\sqrt{3} + i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-1+i)^{14}$; б) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}; x(0) = 0; y(0) = 1$$

Вариант 10.

1. Найти изображение функции:

$f(t) = e^{3t} \sin^2 t$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y'' + 6y' + 13y = 5t^2; y(0) = 4; y'(0) = 0$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[4]{-81}$;

б) $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^8$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^9$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p)=\frac{1}{p^2+6p+10}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=x-y \end{cases};\ x(0)=1;\ y(0)=-2.$$

Вариант 11.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y''-5y'+6y=e^{-t}\cos 2t,\ y(0)=3,\ y'(0)=1$.

3. Найти все значения корней

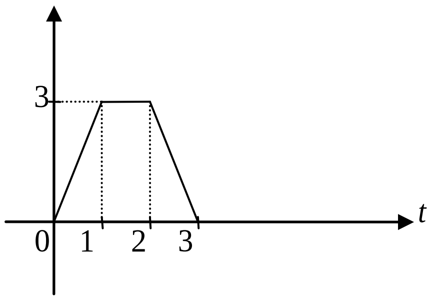
а) $\sqrt[3]{8}$;

б) $\sqrt[4]{2+2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(2+2i\right)^6$; б) $\left(\dfrac{-1-i}{-1+i}\right)^3$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x'=2x-y \\ y'=4x-2y \end{cases};\ x(0)=-1;\ y(0)=0$$

Вариант 12.

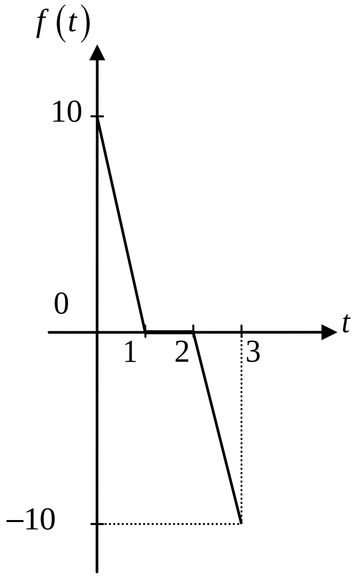
1. Найти изображение функции:
$f(t) = t\cos^2 3t$
2. Решить задачу Коши операторным методом:
$y'' - 6y' + 10y = t\sin 2t; y(0) = 2; y'(0) = 0$
3. Найти все значения корней
а) $\sqrt[3]{-125}$;
б) $\sqrt[3]{2-2i}$

4. Представить в алгебраической форме:
а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^5$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^5$
5. Восстановить оригинал по изображению
$F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$
6. Решить систему
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 2.$$

Вариант 13.

1. Восстановить оригинал по изображению:
$F(p) = \dfrac{p+1}{p^2 - 4p + 13}$
2. Решить задачу Коши операторным методом:
$y'' + 2y' + 5y = st^2, y(0) = 4, y'(0) = -1$.
3. Найти все значения корней
а) $\sqrt{9i}$;
б) $\sqrt[4]{-2-2i}$
4. Представить в алгебраической форме:
а) $(-2+2i)^7$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^7$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}; x(0) = 0; y(0) = 1$$

Вариант 14.

1. Найти изображение функции:

$f(t) = t \cdot e^{t} \cos t$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y'' - 2y' - 3y = e^{t} \cos 2t; y(0) = 2; y'(0) = 0$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;

б) $\sqrt[3]{-2+2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-2-2i)^{6}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{5}$

5. Восстановить оригинал по изображению

$F(p) = \frac{2p}{(p^{2}+4)^{2}}$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0) = -2; y(0) = 0.$$

Вариант 15.

1. Восстановить оригинал по изображению

$F(p) = \dfrac{p+2}{p^2+2p+3}$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y'' + 9y = 2e^{-t};\ y(0) = 5;\ y'(0) = 2.$

3. Найти все значения корней

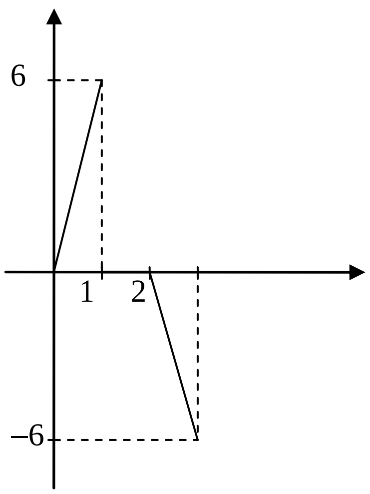
а) $\sqrt[4]{-1}$;

б) $\sqrt{-i+\sqrt{3}}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^7$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}\right)^5$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases};\ x(0) = 1;\ y(0) = -2.$$

Вариант 16.

1. Найти изображение функции:

$f(t) = t^2 \cdot e^{2t} \sin 3t$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$y'' + 4y' + 5y = t;\ y(0) = 2;\ y'(0) = -1$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[3]{-27}$;

б) $\sqrt[3]{2-2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^8$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^6$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p)=\frac{2}{(p-1)(p^2-1)}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0)=-1; y(0)=0.$$

Оглавление.

Литература.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981, 448с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. М.: издательства физико-математической литературы, 2002. 576с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Г.Н. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 304с.
4. Глатенок И.В., Заварзина И.Ф. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. М.: Московский энергетический институт, 1989. 48с.