

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

«Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)»
Кафедра «Высшая математика»

**Сборник заданий по высшей математике
для контроля самостоятельной работы
студентов**

Составитель: Агарева О.Ю.

Москва 2016

Сборник заданий по высшей математике для контроля самостоятельной работы предназначен для студентов 1, 2 курсов МАИ, изучающих стандартный курс высшей математики.

Он содержит несложные типовые задачи, которые бакалавры технических и технологических специальностей должны уметь решать на контрольных работах.

1 СЕМЕСТР

КСР 1 Системы линейных уравнений, определители

1. Решить систему двумя способами: методом Крамера, обратной матрицы

$$1.1 \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases} \quad 1.2 \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

$$1.3 \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 22 \\ x + y - 2z = -18 \end{cases} \quad 1.4 \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

2. Решить систему методом Гаусса:

$$2.1 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad 2.2 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$$2.3 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_2 - x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad 2.4 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Вычислить:

$$3.1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad 3.2 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad 3.3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad 3.4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

КСР 2 Векторы

1. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$1.1 \quad A(2, 3, 2); \quad B(-1, -3, -1); \quad C(-3, -7, -3).$$

$$1.2 \ A(-2, 4, -6); \ B(0, 2, -4); \ C(-6, 8, -10).$$

$$1.3 \ A(0, 1, 0); \ B(0, 2, 1); \ C(1, 2, 0).$$

$$1.4 \ A(1, -1, 0); \ B(-2, -1, 4); \ C(8, -1, -1).$$

2. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$.

$$2.1 \ \vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}, \ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, \ |\vec{p}| = 7, \ |\vec{q}| = 2, \ \angle \vec{p}, \vec{q} = \pi/3.$$

$$2.2 \ \vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \ \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, \ |\vec{p}| = 4, \ |\vec{q}| = 1, \ \angle \vec{p}, \vec{q} = \pi/6.$$

$$2.3 \ \vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}, \ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \ |\vec{p}| = 2, \ |\vec{q}| = 3, \ \angle \vec{p}, \vec{q} = \pi/4.$$

$$2.4 \ \vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \ \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, \ |\vec{p}| = 3, \ |\vec{q}| = 2, \ \angle \vec{p}, \vec{q} = \pi/2.$$

3. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D и высоту, опущенную из вершины D.

$$3.1 \ A(0, -3, 1); \ B(-4, 1, 2); \ C(2, -1, 5); \ D(3, 1, -4).$$

$$3.2 \ A(1, 1, 2); \ B(-1, 1, 3); \ C(2, -2, 4); \ D(-1, 0, -2).$$

$$3.3 \ A(1, 0, 2); \ B(1, 2, -1); \ C(2, -2, 1); \ D(2, 1, 0).$$

$$3.4 \ A(1, 3, 0); \ B(4, -1, 2); \ C(3, 0, 1); \ D(-4, 3, 5).$$

КСР 3 Прямая и плоскость

1. Найти расстояние от точки D до плоскости, проходящей через точки A, B, C.

$$1.1 \ A(1, 5, -7), B(-3, 6, 3), C(-2, 7, 3), D(1, -1, 2).$$

$$1.2 \ A(1, 1, -1), B(2, 3, 1), C(3, 2, 1), D(-3, -7, 6).$$

$$1.3 \ A(-2, 0, -4), B(-1, 7, 1), C(4, -8, -4), D(-6, 5, 5).$$

$$1.4 \ A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(-5, -4, 8).$$

2. Написать каноническое уравнение прямой.

$$2.1 \ l: \begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0 \\ x - 3y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad 2.2 \ l: \begin{cases} x + y + 3z - 7 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$2.3 \quad l: \begin{cases} x-3y+z-1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases} \quad 2.4 \quad l: \begin{cases} x+2y+2z-3=0 \\ 16x+12y-15z-1=0 \end{cases}$$

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости и угол между ними.

$$3.1 \quad l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}, \quad P: 3x-7y-2z+7=0.$$

$$3.2 \quad l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad P: 4x+2y-z-11=0.$$

$$3.3 \quad l: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad P: x+7y+3z+11=0.$$

$$3.4 \quad l: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, \quad P: x+4y+13z-23=0.$$

КСР 4 Пределы и производные

1. Вычислить

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$$

$$1.3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-2x}}{2 \arcsin x - x}$$

$$1.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{5x}}{\operatorname{arctg} 7x - 3x}$$

2. Вычислить

$$2.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}$$

$$2.2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

$$2.3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+14} - 2x}{x^2 - 4}$$

$$2.4 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+33} - 2x}{x^2 - 9}$$

3. Вычислить

$$4.1 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1} \quad 4.2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^{2x^2-3}$$

$$4.3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{4x-1} \quad 4.4 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-3} \right)^{x^2+3}$$

4. Вычислить y'

$$4.1 y = \ln(\sin^3 2x) \quad 4.2 y = \sin^2(\ln 2x)$$

$$4.3 y = 4 \operatorname{arcctg} \left(\frac{1}{x^3} \right) \quad 4.4 y = 3^{\cos^2 5x}$$

5. Вычислить y'_x

$$5.1 \begin{cases} x = \ln \sin 2t \\ y = \operatorname{tg} 5t \end{cases} \quad 5.2 \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$1. \quad 5.3 \begin{cases} x = t \cos 3t \\ y = t \sin 5t \end{cases} \quad 5.4 \begin{cases} x = e^{2t} \cos t \\ y = e^t \sin 5t \end{cases}$$

6. Вычислить y'

$$6.1 y = (\cos 3x)^{e^{4x}} \quad 6.2 y = (\arccos x)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$6.3 y = (\sin 5x)^{\sqrt{x}} \quad 6.4 y = (\arccos 2x)^{3x}$$

2 СЕМЕСТР

КСР 1 Исследование функции

1. Провести полное исследование функции и построить ее график

$$1.1 \ y = \frac{4 - x^3}{x^2} \quad 1.2 \ y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$$1.3 \ y = \frac{2x^3 + 1}{x^2} \quad 1.4 \ y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$$

КСР 3 Интегралы

1. Вычислить

$$1.1 \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} \quad 1.2 \int \frac{e^x dx}{2 + e^x}$$

$$1.3 \int \frac{x^2 dx}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} \quad 1.4 \int x e^{-x^2} dx$$

2. Вычислить

$$2.1 \int x \cos 7x dx \quad 2.2 \int x \sin 5x dx$$

$$2.3 \int x 3^x dx \quad 2.4 \int (x + 1) \ln x dx$$

3. Вычислить

$$3.1 \int \frac{(2x + 3) dx}{x^2 + 2x + 10} \quad 3.2 \int \frac{(2x - 4) dx}{x^2 + 2x + 16}$$

$$3.3 \int \frac{(x + 6) dx}{x^2 + 4x + 12} \quad 3.4 \int \frac{(x - 3) dx}{x^2 + 4x + 10}$$

4. Вычислить

$$4.1 \int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^4 - 1} \quad 4.2 \int_0^2 \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$4.3 \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} \quad 4.4 \int_0^3 \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

КСР 2 Комплексные числа

1. Решить уравнение

1.1 $z^2 - 3z + 70 = 0$

1.2 $z^2 + z + 80 = 0$

1.3 $z^2 - 2z + 5 = 0$

1.4 $z^2 - 6z + 13 = 0$

2. Вычислить

2.1 $\left(\frac{1}{3} + i\frac{1}{3}\right)^{15}$

2.2 $(-1 + i)^{10}$

2.3 $(-\sqrt{3} + i)^{11}$

2.4 $(-1 - \sqrt{3}i)^{13}$

3. Вычислить

2.1 $\sqrt[5]{\frac{1}{3} + i\frac{1}{3}}$

2.2 $\sqrt[5]{-1 + \sqrt{3}i}$

2.3 $\sqrt[4]{-\sqrt{3} + i}$

2.4 $\sqrt[6]{-1 - \sqrt{3}i}$

КСР 4 Функции нескольких переменных

1. Найти df , d^2f :

1.1 $f = 3xy^3 + y^2 \sin 2x$

1.2 $f = xy^{2x} + y \sin 2xy$.

1.3 $f = x^{2y} + x^5 \operatorname{tg}(yx)$

1.4 $f = \frac{1}{x} y^2 - 2x \ln(5y - 1)$

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M

2.1 $z = 2yx^3 - 3xy^3$, $M(1, -1, 1)$

2.2 $z = \sqrt{x^2 + 4y}$, $M(-1, 0, 1)$.

2.3 $z = 5y^2x^3 - 3xy$, $M(1, 1, 2)$

2.4 $z = \sqrt{y^2 + 4x}$, $M(1, -1, \sqrt{5})$.

3. Найти экстремум функции:

3.1 $z = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y - 24x$.

3.2 $z = x^3 + 6x^2y - y$.

$$3.3 \quad z = 2x^3 - y^2 - 6xy + 12x.$$

$$3.4 \quad z = x^3 + 3xy + y^3.$$

4. Найти производную по направлению $\vec{n}$ в точке M :

$$4.1 \quad u = 2x^6z - 3yz + 3y^2z^2, \quad \vec{n}(3,4,0), \quad M(2,0,-1).$$

$$4.2 \quad u = 4xz^3 - 3x^2y - 5x, \quad \vec{n}(2,-1,-2), \quad M(0,0,1).$$

$$4.3 \quad u = xy^6z - xyz + 3x^2yz^2, \quad \vec{n}(0,-3,-4), \quad M(-1,1,1).$$

$$4.4 \quad u = 5yx^2z^3 + xy - zx, \quad \vec{n}(-2,1,2), \quad M(-1,2,1).$$

3 СЕМЕСТР

КСР 1 Дифференциальные уравнения

1. Решить уравнение

$$1.1 \quad y' = \cos 3x \cdot y^4 \quad 1.2 \quad y' = \sqrt{x} \cdot y^{-9}$$

$$1.3 \quad y' = \sqrt{x} \cdot y^{-3} \quad 1.4 \quad y' = \frac{1}{x} \cdot y^7$$

2. Решить уравнение

$$2.1 \quad xy' + 2y = x^2 \quad 2.2 \quad y' + 2xy = 2x^3$$

$$2.3 \quad 2xy' - y = 3x^2 \quad 2.4 \quad (x^2 + 1)y' + xy = 1$$

3. Решить уравнение

$$3.1 \quad y'' - 10y' + 25y = 4e^{5x} \quad 3.2 \quad y'' - 4y' + 3y = 3\sin x$$

$$3.3 \quad 9y'' - 6y' + y = \sin x \quad 3.4 \quad y'' - 3y' - 4y = 2e^{4x}$$

КСР 2 Кратные интегралы

1. Изменить порядок интегрирования

$$1.1 \quad \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy.$$

$$1.2 \quad \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy.$$

$$1.3 \quad \int_0^1 dx \int_0^x f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$$

$$1.4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy.$$

2. Вычислить двойной интеграл

$$2.1 \iint_D (2y - 1) dx dy, \quad D: y = 4x - 3, y = x^2.$$

$$2.2 \iint_D (4x + 2) dx dy, \quad D: y = 0, y = -x^2 + 1.$$

$$2.3 \iint_D (xy) dx dy, \quad D: y = 0, y = -x, x = -1$$

$$2.4 \iint_D (x + 2y) dx dy, \quad D: y = 0, x = 1, y = \sqrt{x}$$

КСР 3 Ряды

1. Исследовать на сходимость

$$1.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2 (2n)!} \quad 1.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 n!}$$

$$1.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 (n)!} \quad 1.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+4)!}$$

2. Исследовать на сходимость

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+4} \right)^{n^2} \quad 2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+4} \right)^{3n}$$

$$2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{5n+4} \right)^{7n} \quad 2.4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n-9} \right)^{5n}$$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

$$3.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n 9^n} \quad 3.2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$3.3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+3)^n} \quad 3.4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

4. Найти область сходимости

$$4.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n^2+1} \quad 4.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n 3^n}{n!}$$

$$4.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3n-1} \quad 4.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^2}$$

КСР 4 Ряды Фурье

1. Разложить функцию в ряд Фурье на указанных отрезках:

а) в полный ряд;

б) по косинусам

$$1.1 \quad y = 3 - 2x \quad а) [-\pi; \pi] \quad б) [0; \pi]$$

$$1.2 \quad y = 1 + 2x \quad а) [-\pi; \pi] \quad б) [0; \pi]$$

$$1.3 \quad y = -5x \quad а) [-\pi; \pi] \quad б) [0; \pi]$$

$$1.4 \quad y = 5 - x \quad а) [-\pi; \pi] \quad б) [0; \pi]$$

Литература

1. Сборник задач по математике для втузов. (под редакцией А.В.Ефимова и А.С.Поспелова). – Т.1,2,3. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математический анализ. М.: Наука, 1999.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т.2. М.: Наука, 1965.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.2. М.: Наука, 1981.
7. Я. С. Бугров, С. Н. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Т.1,2,3. 2004.
8. П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. М. 1997.