Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Кафедра высшей математики

О. Ю. Агарева

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Учебное пособие с задачами для самостоятельного решения

Москва 2016

УДК 510.6
ББК

Агарева О. Ю.
Булевы функции
Учебное пособие. «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».: Кафедра «Высшей математики», 2016. – 26с.

Учебное пособие посвящено изучению раздела дискретной математики: теории булевых функций.

Его основу составляют конспекты лекций, которые читались студентам «Московского авиационного института (национального исследовательского университета)»

Пособие содержит большое количество примеров, иллюстрирующих основные понятия теории булевых функций. Пособие также содержит типовые задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Информатика и вычислительная техника» и «Системы автоматизированного проектирования».

Пособие может быть полезно для студентов других специальностей и преподавателей.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. Основные определения и свойства булевых функций

Рассмотрим множество из двух элементов B^2 = $\{0,1\}$ и определим совокупность переменных x_1, x_2, ..., x_n таких, что каждая переменная может принимать значения только из B^2. Совокупность таких переменных назовем **вектором двоичных переменных** и обозначим символом x :

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Любой такой набор можно рассматривать как совокупность цифр двоичного числа. Условимся называть десятичный эквивалент этого числа **номером набора** $J(\tilde{x})$. Он вычисляется следующим образом:

$$J(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{n-i}$$

Например, номер набора (0, 1, 0, 1, 0, 1): $J = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ (n=6).

Наборы из n компонентов нумеруются числами от 0 до $2^n - 1$. Следовательно, всего имеется 2^n различных двоичных наборов.

В таблице приведены различные двоичные наборы и их номера для n=3.

x_1	x_2	x_3	$J(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

Двоичный набор $x(J)$ полностью определяется своим номером J и числом компонентов n.

Например, для J = 12 и n = 6 имеем $x(12) = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$.

Введем функции, зависящие от вектора аргументов $\tilde{x}$, которые обозначим: $f\left(\tilde{x}\right)$ или $f(x_1, ..., x_n)$ и условимся, что такие функции могут принимать значения только из множества B^2.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$, зависящая от переменных $x_1,..., x_n$, каждая из которых может быть 0 или 1 и принимающая значение 0 или 1, называется **булевой (переключательной) функцией**.

Областью определения булевой функции от n переменных является множество из 2^n двоичных наборов.

Для того чтобы задать булеву функцию, нужно указать соответствие между этими наборами и значениями функции.

2. Способы задания булевых функций

1. **С помощью таблицы**, число строк в которой определяется числом всех наборов переменных, а число столбцов на единицу больше числа переменных. Пример такой формы задания функции приведен в таблице:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Таблица, задающая $f\left(\tilde{x}\right)$, в которой наборы $x = \left(x_1 ... x_n\right)$ выписываются в порядке возрастания их номеров (сверху вниз), называется **таблицей истинности функции $f\left(\tilde{x}\right)$.**

2. **Множеством номеров двоичных наборов или их десятичным эквивалентом.**

С ростом числа переменных таблица, задающая булеву функцию, сильно усложняется. Чтобы избежать усложнения таблицы, в некоторых случаях функцию задают **множеством номеров двоичных наборов**, на которых она равна единице. Например, функция, приведенная в таблице 3.1.1, может быть задана в виде следующей совокупности двоичных наборов:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\{010, 011, 101, 111\}$$

или их десятичных эквивалентов:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\{2, 3, 5, 7\}.$$

3. **Вектором ее значений.**

При стандартном расположении наборов (в соответствии с увеличением их номера), функцию $f\left(x\right)$ можно задать **вектором ее значений** $\alpha_f = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2^n-1})$, где координата α_i равна значению $f\left(x\right)$ в i-ой строке таблицы $(i=0, 1, ..., 2^n-1)$:

$$f\left(x\right)=(00110101).$$

4. **Двумерная таблица (Карта Карно).**

Табличный способ задания булевых функций является наиболее естественным, но не самым компактным. Чтобы несколько сократить размеры таблиц, задающих функции многих переменных, часто используют двухмерные таблицы, которые строят следующим образом. Вектор аргументов $x_1, ..., x_n$ разбивают на две части $x_1, ..., x_k$ и $x_{k+1}, ..., x_n$. Строкам таблицы приписывают значения первой группы аргументов, а столбцам таблицы – значения второй группы аргументов. При таком расположении значений аргументов каждому значению $x_1, ..., x_n$ соответствует одна клетка таблицы, в которую может быть записано значение функции. Пример двухмерной таблицы для функции $f\left(x\right)=(00110101)$.

	x_2x_3			
x_1	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1

3. Число различных булевых функций *n* -го порядка

Обозначим множество булевых функций, зависящих от *n* аргументов: $P(n) = \{f_i(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ и найдем число элементов этого множества $|P(n)|$. В случае табличного задания столбцы значений различных функций должны иметь различие хотя бы в одной строке. Следовательно, для того чтобы найти число различных функций *n* переменных, нужно подсчитать какое количество различных столбцов значений может быть в таблице, имеющей 2^n строк. Если каждую позицию в столбце считать двоичной переменной, то задача сводится к определению числа наборов для 2^n переменных. Исходя из этого, получаем, что

$$|P(n)| = 2^{2^n}.$$

Зависимость числа булевых функций от числа переменных показана в таблице:

n	$\|P(n)\|$
1	4
2	16
3	256
4	65536
5	4294967296

Из таблицы видно, что число функций быстро растет при незначительном увеличении числа переменных.

4. Существенные и фиктивные переменные

Переменную x_i в функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называют **фиктивной (несущественной)**, если

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

при любых значениях остальных переменных.

Это означает, что изменение значения переменной x_i не изменяет значения функции, поэтому эту переменную можно исключить из числа аргументов и рассматривать заданную функцию, как функцию, зависящую от n-1 переменной. Несущественные переменные можно не только удалять, но и добавлять к аргументам функции. Следовательно, если заданы две функции $f_1(x_1, \ldots, x_k)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_m)$, зависящие от разного числа переменных и $k < m$, то добавляя к функции с меньшим числом аргументов *m-k* несущественных переменных, можно получить функции с одинаковым количеством аргументов.

Две функции $f_1(x_1,\ldots,x_k)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_m)$ от разного количества переменных **равны**, если одна получается из другой путем удаления или введения несущественных переменных.

Пример

Пусть $f(x)=(00110011)$, или задана таблицей:

x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Видим, что переменная x_3 является несущественной для $f(x_1,x_2,x_3)$, т.к. $f(x_1,x_2,0)= f(x_1,x_2,1)$. Удаляя ее, получим функцию $f(x_1,x_2)$:

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Переменная x_1 также является несущественной. В итоге получаем $f(x)=x_2$.

5. Функции одной переменной

В таблице даны все булевы функции одной переменной.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_0 и f_3 называются соответственно **(тождественным) нулем** и **(тождественной) единицей**.

Функция f_1 называется **тождественной функцией** и обозначается x.

Функция f_2 называется **отрицанием x**, обозначается $\overline{x}$ или $\neg x$ и читается «не *x*».

6. Функции двух переменных

В таблице представлены все булевы функции двух переменных.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции f_0 называется **(тождественным) нулем**.

Функция f_1 называется **конъюнкцией x_1 и x_2**, обозначается $x_1 \& x_2$ или x_1x_2, или $x_1 \wedge x_2$ и читается «x_1 *и* x_2».

Функция f_3 называется **переменной x_1** и обозначается x_1.

Функция f_5 называется **переменной x_2** и обозначается x_2.

Функция f_6 называется **суммой по модулю 2** x_1 и x_2, обозначается $x_1 \oplus x_2$ и читается «x_1 плюс x_2».

Функция f_7 называется **дизъюнкцией x_1 и x_2**, обозначается $x_1 \vee x_2$ и читается «x_1 или x_2».

Функция f_8 называется **стрелкой Пирса x_1 и x_2**, обозначается $x_1 \downarrow x_2$ и читается «ни x_1, ни x_2».

Функция f_9 называется **эквиваленцией x_1 и x_2**, обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \equiv x_2$ и читается «x_1 эквивалентно x_2».

Функция f_{10} называется **отрицанием x_2**, обозначается $\bar{x}_2$ и читается «не x_2».

Функция f_{12} называется **отрицанием x_1**, обозначается $\bar{x}_1$ и читается «не x_1».

Функция f_{13} называется **импликацией x_1 и x_2**, обозначается $x_1 \to x_2$ или $x_1 \supset x_2$ и читается «из x_1 следует x_2».

Функция f_{14} называется **штрихом Шеффера x_1 и x_2**, обозначается $x_1|x_2$ и читается «не x_1 или не x_2».

Функция f_{15} называется **(тождественной) единицей**.

Остальные функции не имеют названий.

7. Реализация булевых функций формулами

Функция f называется **суперпозицией** функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$, если она получается некоторой подстановкой этих функций друг в друга. Выражение, описывающее результат этой подстановки, называется **формулой**, задающей функцию f.

Пусть $B = \{\bar{x}, xy, x \vee y, x \to y, x \sim y, x \oplus y, x \downarrow y, x \mid y\}$.

Формулой над *B* является всякое (и только такое) выражение вида:

1. переменные $x, y, \ldots$ – формулы;
2. если U и V – формулы, то и

$\bar{U}, UV, U \vee V, U \to V, U \sim V, U \oplus V, U \downarrow V, \quad U \mid V$ тоже формулы.

Говорят, что формула U, задающая функцию f, **реализует *f***.

Две **формулы эквивалентны**, если реализуемые ими функции равны.

Для того чтобы проверить эквивалентность формул, нужно построить, соответствующие им таблицы истинности. Если таблицы одинаковы, то формулы эквивалентны.

Пример

Выяснить, эквивалентны ли формулы

$$U = x \downarrow y; \quad V = \overline{x \vee y}.$$

Строим таблицу истинности:

x	y	$U = x \downarrow y$	$x \vee y$	$V = \overline{x \vee y}$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Видим, что столбцы, отвечающие формулам U и V, одинаковы. Следовательно, формулы эквивалентны.

8. Основные свойства элементарных функций

1. Коммутативность:

$$x \circ y = y \circ x, \text{ где } \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \downarrow, |\ \}$$

2. Ассоциативность:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \text{ где } \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim\}$$

3. Дистрибутивность:

$$(x \vee y)z = xz \vee yz,$$
$$(xy) \vee z = (x \vee z)(y \vee z),$$
$$(x \oplus y)z = xz \oplus yz.$$

4. Законы де Моргана:

$$a)\ \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}; \quad b)\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

5. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

6. Законы поглощения:

$$a)\ x \vee xy = x; \quad b)\ x(x \vee y) = x.$$

7.

$$a)\ x \cdot \overline{x} = x \cdot 0 = x \oplus x = 0;$$
$$b)\ x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \sim x = x \to x = x \oplus \overline{x} = 1;$$
$$c)\ x \vee x = x \cdot x = x \cdot 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x;$$
$$d)\ x \oplus 1 = x \to 0 = x \sim 0 = x \downarrow x = x \mid x = \overline{x};$$
$$e)\ x \vee \overline{x}y = x \vee y.$$

8.

$$a)\ x \mid y = \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}; \quad b)\ x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

9. Склеивание:

$$xy \vee x\overline{y} = x.$$

10. Обобщенное склеивание:

$$xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z}.$$

Для проверки этих свойств, достаточно составить таблицы истинности для правой и левой частей равенств.

9. Принцип двойственности переключательных функций

Функция $f^*(x_1,...,x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ называется **двойственной к** $f(x_1,...,x_n)$.

Таблица двойственной функции получается из таблицы $f(x_1,...,x_n)$ инвертированием (отрицанием) столбца значений функции и его переворачиванием.

Пример

Найти функцию, двойственную к $f(x)=(00110011)$.

Строим таблицу истинности, инвертируем столбец значений, затем его переворачиваем.

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$	$\overline{f(\tilde{x})}$	$f^*(\tilde{x})$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Из определения двойственности следует, что $f^{**}=(f^*)^*=f$, т.е. функция f является двойственной к f^* (**свойство взаимности**).

Функция $f(\tilde{x})$ называется **самодвойственной**, если $f(\tilde{x})=f^*(\tilde{x})$.

Пример

Функция $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ является самодвойственной.

Строим таблицу истинности.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	$f(\tilde{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$\overline{f(\tilde{x})}$	$f^*(\tilde{x})$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Видим, что столбцы, соответствующие $f(\tilde{x})$ и $f^*(\tilde{x})$, совпадают.

Принцип двойственности

Если формула $U=F(f_1,f_2,\dots f_n)$ реализует функцию $f(x_1,x_2,\dots x_n)$, то формула $U^*=F^*(f_1^*,f_2^*,\dots f_n^*)$ реализует функцию $f^*(x_1,x_2,\dots x_n)$.

10. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы СДНФ, СКНФ

Произведение вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ называют **элементарной конъюнкцией** и записывают в векторной форме следующим образом:

$$K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_l^{\sigma_l}$$

В такой записи вектор переменных $\tilde{x}$ определяет, какие переменные образуют конъюнкцию, а набор $\tilde{\sigma}$ задает порядок расстановки знаков инверсии (отрицания) над ними.

Пример

$$K_{(0,1,0,1)}(x) = x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^1 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 .$$

Из этой записи следует, что существует всего 2^n различных элементарных конъюнкций n переменных, поскольку каждая конъюнкция определяется одним двоичным набором $\tilde{\sigma}$, состоящим из n компонентов.

Элементарная конъюнкция:

правильная, если в нее каждая переменная входит не более одного раза, включая отрицание переменной;

полная относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$, если в нее каждая переменная или ее отрицание входит ровно один раз;

монотонная, если она не содержит отрицаний переменных.

Формула вида $D = \bigvee_{i=1}^{k} K_i$, где – K_i различные элементарные конъюнкции, называется **дизъюнктивной нормальной формой ДНФ**.

При $f(x) \neq 0$ тождественно, ее можно представить в виде:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_n \\ f(\sigma_1,\ldots\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$$

Такое разложение функции носит название **совершенной дизъюнктивной нормальной формы СДНФ**.

Так как существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности и СДНФ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, то СДНФ единственна.

Длина СДНФ равна числу наборов, на которых функция $f(x)=1$.

Пример

Построить СДНФ $f(x)=(10001100)$.

Таблица истинности $f(x)=(10001100)$:

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Наборы, на которых $f(x_1,x_2,x_3)=1$: (0,0,0), (1,0,0), (1,0,1). Поэтому СДНФ

$$f(x)=(10001100)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3.$$

Выражение $D_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})=x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ - какой-либо двоичный набор, причем среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется **элементарной дизъюнкцией**.

Из такой записи видно, что существует 2^n различных элементарных дизъюнкций.

Элементарная дизъюнкция:

правильная, если в нее каждая переменная входит не более одного раза, включая отрицание переменной;

полная относительно переменных $x_1,…,x_n$, если в нее каждая переменная или ее отрицание входит ровно один раз;

Формула вида $K=\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} D_i$, где – D_i различные элементарные дизъюнкции, называется **конъюнктивной нормальной формой КНФ**.

При $f(x)\neq 1$ тождественно, ее можно представить в виде:

$$f(x_1,...,x_n)=\mathop{\&}\limits_{\substack{\sigma_1,...,\sigma_n \\ f(\sigma_1,...\sigma_n)=0}} x_1^{\bar{\sigma}_1}...x_n^{\bar{\sigma}_n}$$

Такое разложение функции носит название **совершенной конъюнктивной нормальной формы СКНФ**.

Так как существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности и СКНФ функции $f(x_1,\dots,x_n)$, то СКНФ единственна.

Длина СКНФ равна числу наборов, на которых функция $f(x)=0$.

Пример

Построить СКНФ $f(x)=(10001100)$.

Таблица истинности $f(x)=(10001100)$:

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Наборы, на которых $f(x_1,x_2,x_3)=0$: (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1). Отрицание этих наборов: (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0), (0,0,1), (0,0,0). Поэтому СКНФ

$$f(x)=(10001100)=(x_1\vee x_2\vee\overline{x}_3)\cdot(x_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)\cdot(x_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3)\cdot$$
$$\cdot(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)\cdot(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3).$$

11. Полином Жегалкина

Полиномом (многочленом) Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которых все переменные входят не выше, чем в первой степени:

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1\dots i_k} x_{i_1}\dots x_{i_k},$$

причем на каждом наборе $(i_1,\dots,i_k)$ все i_j $(j=1,\dots,k)$ различны, а $a_{i_1}\dots_{i_k}\in\{0;1\}$.

Свойства операции $\oplus$

1. Операция $\oplus$ коммутативна:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1;$$

2. Операция $\oplus$ ассоциативна:

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3);$$

3. Операция & дистрибутивна по отношению к операции $\oplus$:

$$x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3;$$

4. Операция $\oplus$ не идемпотентна:

$$x \oplus x = 0, \quad x \oplus x \oplus x = x.$$

5. Отсутствие идемпотентности распространяется на сумму любого четного (нечетного) числа слагаемых.

6. Справедливо равенство

$$\overline{x} = x \oplus 1;$$

Методы построения полинома Жегалкина

1. В общем случае для построения полинома Жегалкина произвольной булевой функции нужно выполнить следующие действия:

1. на основании табличного задания либо путем эквивалентных преобразований произвольной формулы построить СДНФ;

2. в СДНФ символы операции $\vee$ заменить на символы $\oplus$;

3. вместо всех $\overline{x_i}$ подставить эквивалентные формулы $x_i \oplus 1$;

4. раскрыть скобки и привести подобные члены по правилу: $x \oplus x \oplus ... \oplus x = 0$ (четное число слагаемых); $x \oplus x \oplus ... \oplus x = 0$ (нечетное число слагаемых).

$$f(x)=(10001100)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 =$$
$$=(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus x_1(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus x_1(x_2 \oplus 1)x_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus$$
$$\oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 =$$
$$= 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$$

2. Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим на примере

$$f=(10001100)=\alpha_0 \oplus \alpha_1x_1 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \alpha_3x_3 \oplus \alpha_4x_1x_2 \oplus \alpha_5x_1x_3 \oplus \alpha_6x_2x_3 \oplus \alpha_7x_1x_2x_3$$
$$f(0,0,0)=1=\alpha_0$$
$$f(0,0,1)=0=1\oplus\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3=1$$
$$f(0,1,0)=0=1\oplus\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=1$$
$$f(0,1,1)=0=1\oplus 1\oplus 1\oplus\alpha_6 \Rightarrow \alpha_6=1$$
$$f(1,0,0)=1=1\oplus\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=0$$
$$f(1,0,1)=1=1\oplus 1\oplus\alpha_5 \Rightarrow \alpha_5=1$$
$$f(1,1,0)=0=1\oplus 1\oplus\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4=0$$
$$f(1,1,1)=0=1\oplus 1\oplus 1\oplus 1\oplus 1\oplus\alpha_7 \Rightarrow \alpha_7=1$$
$$\Rightarrow f=(10001100)=1\oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$$

12. Полнота, замкнутость. Теорема о полноте

Система булевых функций $G=\{f_1,\ldots,f_m\}$ называется **полной**, если любая булева функция может быть выражена через функции из G с помощью суперпозиций.

Система P_2 – множество всех булевых функций – является полной системой.

Теорема

Пусть система функций $\{f_1,\ldots,f_m\}$ – полная и любая ее функция может быть выражена с помощью суперпозиции через функции системы $\{g_1,\ldots g_k\}$.

Тогда система $\{g_1,\ldots g_k\}$ также является полной.

Доказательство

Пусть φ – произвольная функция из P_2.

Так как система функций $\{f_1,\dots,f_m\}$ полна, то $\varphi = \varphi(f_1,\dots,f_m)$, причем переменных в φ может быть любое конечное число от 1 до m.

По условию:

$$f_1 = \varphi_1(g_1,\dots,g_k),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_m = \varphi_m(g_1,\dots,g_k).$$

Поэтому функция φ может быть выражена через систему функций $\{g_1,\dots g_k\}$ с помощью суперпозиции:

$$\varphi = \varphi\big(\varphi_1(g_1,\dots g_k),\dots,\varphi_m(g_1,\dots g_k)\big) = \varphi(g_1,\dots g_k).$$

Таким образом, произвольная функция из P_2 выражена через $\{g_1,\dots g_k\}$, т.е. эта система полна.

Теорема

Любая булева функция может быть выражена через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, т.е. система $\{\neg,\&,\vee\}$ – полна.

Доказательство

Пусть $f(x)\equiv 0$, тогда $f(x)=x_1\,\&\,\overline{x}_1$.

Если $f(x)\neq 0$ тождественно, то выразим ее в виде СДНФ:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_n \\ f(\sigma_1,\dots\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}.$$

Следовательно, любая функция выражается в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Примеры

1. Система $\{\neg,\&\}$ – полна, т.к. дизъюнкция может быть выражена через отрицание и конъюнкцию:

$$x\vee y = \overline{\overline{x}\,\&\,\overline{y}}.$$

2. Система $\{\neg,\vee\}$ – полна, т.к. конъюнкция может быть выражена через отрицание и дизъюнкцию:

$$x\,\&\,y=\overline{\overline{x}\vee\overline{y}}.$$

3. Система $\{\downarrow\}$ – полна, т.к. отрицание и дизъюнкция могут быть выражены через стрелку Пирса:

$$\overline{x}=x\downarrow x;\quad x\vee y=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y).$$

4. Другие примеры полных систем:

$$\{\,|\,\};\ \{\&,\oplus,1\};\ \{\rightarrow,\neg\};\ \{\vee,\sim,\oplus\}.$$

Класс функций G называется **функционально замкнутым**, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.

13. Замкнутые классы

1. T_0 – класс всех булевых функций, сохраняющих ноль.

Функцию называют **сохраняющей константу 0**, если она при нулевых значениях аргументов также равна нулю:

$$f(0,...,0,...,0) = 0.$$

2. T_1– класс всех булевых функций, сохраняющих единицу.

Функцию называют **сохраняющей константу 1**, если она при единичных значениях аргументов также равна единице:

$$f(1,...,1,...,1) = 1.$$

3. S – класс самодвойственных функций.

Функцию называют **самодвойственной**, если она удовлетворяет равенству

$$f^*(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n).$$

Среди функций двух переменных классу S принадлежат функции f_3, f_5, f_{10}, f_{12}.

4. M – класс монотонных функций.

Двоичный набор $a=(a_1,...,a_n)$ называют **предшествующим** набору $b=(b_1,...,b_n)$ и записывают это как $a\leq b$, если имеют место покомпонентные неравенства $a_1 \leq b_1$, ..., $a_n \leq b_n$.

Это предшествование является отношением нестрогого порядка, устанавливающим на множестве двоичных наборов частичный порядок.

Функцию $f(x_1,...,x_n)$ называют **монотонной**, если для любых двух сравнимых наборов a и b, таких, что $a \leq b$, справедливо $f(a) \leq f(b)$.

Для отнесения функции двух переменных к этому классу необходимо сравнить их значения на всех пяти парах сравнимых наборов:

$(0,0) \leq (0,1), (0,0) \leq (1,0), (0,0) \leq (1,1), (0,1) \leq (1,1), (1,0) \leq (1,1).$

Среди них монотонными являются шесть функций: $f_0, f_1, f_3, f_5, f_7, f_{15}$.

5. L – класс линейных функций.

Свойство линейности булевых функций определяется как свойство линейности **полинома Жегалкина**, представляющего собой формулу над функциональным базисом $\{\&, \oplus, 0, 1\}$.

Функция называется **линейной**, если ее полином Жегалкина имеет степень не выше первой, т. е. содержит конъюнкции длиной не более 1.

Для проверки произвольной функции на принадлежность классу L, необходимо построить для нее полином Жегалкина.

Проверим на линейность некоторые булевы функции.

Очевидно, что в такой проверке не нуждаются функции:

$f_0(x,y) = 0, \ f_3(x,y) = x, \ f_5(x,y) = y, \ f_6(x,y) = x \oplus y, \ f_{15}(x,y) = 1.$

Функции $f_{12}(x,y) = \overline{x}$ и $f_{10}(x,y) = \overline{y}$ могут быть приведены к полиномам вида $f_{12}(x,y) = 1 \oplus x$ и $f_{10}(x,y) = 1 \oplus y$, являющимся линейными, что указывает на линейность этих функций.

Функция равнозначности $f_9(x,y) = x \sim y$ может быть представлена СДНФ вида $x\, y \vee \overline{x}\, \overline{y}$. После замены символа дизъюнкции $\vee$ символом $\oplus$, замены переменных с отрицаниями, раскрытия скобок и приведения подобных членов получим полином Жегалкина

$$f_9(x,y) = x \sim y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y} = xy \oplus \overline{x}\,\overline{y} = xy \oplus (1 \oplus x)(1 \oplus y) =$$
$$= xy \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy = 1 \oplus x \oplus y.$$

Из линейности построенного полинома Жегалкина следует линейность функции $f_9(x,y) = x \sim y$.

Для функции $f_1\ (x,y)\ =\ x\ y$ полином Жегалкина строится тривиально: $f_1(x,y) = xy = 0 \oplus xy$. Как видно, полином и соответственно функция конъюнкции нелинейны.

Теперь построим полином Жегалкина для функции $f_7(x,y) = x \vee y$ – дизъюнкции:

$$f_7(x,y) = x \vee y = x(y \vee \bar{y}) \vee y(x \vee \bar{x}) = xy \vee x\bar{y} \vee yx \vee y\bar{x} = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y =$$
$$= xy \oplus x\bar{y} \oplus \bar{x}y = xy \oplus x(1 \oplus y) \oplus (1 \oplus x)y = xy \oplus x \oplus xy \oplus y \oplus xy = x \oplus y \oplus xy.$$

Нелинейность полученного полинома Жегалкина указывает на нелинейность дизъюнкции.

Для функции $f_{14}(x,y) = x \mid y$ – функции Шеффера полином строится достаточно просто, так как она является инверсией конъюнкции:

$$f_{14}(x,y) = x \mid y = \overline{xy} = 1 \oplus xy..$$

Построенный полином и, следовательно, функция Шеффера нелинейны.

При построении полинома Жегалкина для функции Пирса $f_8(x,y)=x{\downarrow}y$ воспользуемся полиномом Жегалкина для дизъюнкции, так как функция Пирса и дизъюнкция инверсны:

$$f_8(x,y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y} = 1 \oplus (x \oplus y \oplus xy) = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy.$$

Отсюда следует, что функция Пирса нелинейна.

Таким образом, мы рассмотрели пять классов функций, каждый из которых вследствие замкнутости не обладает свойством функциональной полноты.

14. Теорема о функциональной полноте Поста

Система функций B из P_2 является **полна в P_2** тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.

Доказательство

Предположим, что система функций B целиком принадлежит одному из перечисленных замкнутых классов. Тогда в силу замкнутости класса функций, содержащего функции из B, суперпозиция функций из B дает лишь функции из этого же замкнутого класса. Однако ни один из замкнутых классов не содержит всех булевых функций. Отсюда следует, что система функций B не полна.

При исследовании полноты системы функций удобно пользоваться, так называемой, **критериальной** таблицей. Эта таблица имеет пять столбцов, каждый из которых соответствует одному из пяти классов в P_2, а строки таблицы соответствуют функциям исследуемой системы. На пересечении строки таблицы, соответствующей функции f, и столбца, соответствующего классу K, ставится знак плюс, если $f \in K$, и минус, если $f \notin K$.

Система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце содержится хотя бы один знак минус.

Пример

Исследовать на полноту систему функций $B = \{ f_1 = 1 \oplus x \oplus y, \quad f_2 = z \oplus xy \}$.

	T_0	T_1	S	M	L
$f_1 = 1 \oplus x \oplus y$	-	+	+	-	-
$f_2 = z \oplus xy$	+	-	-	-	-

В каждом столбце имеется не менее одного минуса, следовательно система полна.

15. Минимизация булевых функций

ДНФ называется **минимальной**, если она содержит наименьшее число букв среди всех ДНФ, эквивалентных ей.

ДНФ называется **кратчайшей**, если она имеет наименьшую длину (число элементарных конъюнкций) среди всех ДНФ, эквивалентных ей.

Минимальную ДНФ можно найти, используя **минимизирующую карту Карно**. Нахождение элементарных конъюнктов ДНФ сводится к выделению максимальных по включению единиц прямоугольников, площадь которых должна быть степенью 2. Считается, что каждая клетка таблицы, примыкающая к одной из сторон, является соседней к клетке, примыкающей к противоположной стороне и расположенной на той же горизонтали или вертикали. Далее полученная ДНФ, если нужно, упрощается с помощью формул $K \vee KA = K; \; K \vee \overline{K}A = K \vee A.$

Пример

Найти минимальные ДНФ булевых функций, используя карты Карно

$$f = (1110\,0110\,0101\,0101)$$

z / xy w	0 / 0	0 / 1	1 / 1	1 / 0
00	1	1	0	1
01	0	1	0	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

Минимальная ДНФ: $f = xw \vee \overline{z}w \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}z\overline{w}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ булевых функций

$$1.1 \quad f=(01101100)$$

$$1.2 \quad f=(10101010)$$

$$1.3 \quad f=(0101111101011111)$$

$$1.4 \quad f=((x\oplus y)\to z)(\overline{z\to y})$$

$$1.5 \quad f=((x\to \bar{y})\oplus(y\to \bar{z}))\oplus(y\to z)$$

2. Найти существенные и фиктивные переменные булевых функций

$$2.1 \quad f=(11100101)$$

$$2.2 \quad f=(11100101)$$

$$2.3 \quad f=(11100101)$$

$$2.4 \quad f=((x\oplus y)\to z)(\overline{z\to y})$$

$$2.5 \quad f=((x\to \bar{y})\oplus(y\to \bar{z}))\oplus(y\to z)$$

3. Проверить, являются ли булевы функции самодвойственными

$$3.1 \quad f=(00110111)$$

$$3.2 \quad f=(01100110)$$

$$3.3 \quad f=(0010001101111111)$$

$$3.4 \quad f=(x\downarrow \bar{y})\oplus(xz\to(\bar{x}\vee\bar{z}))$$

$$3.5 \quad f=(xz\sim \bar{y})\to(xz|(\bar{x}\vee\bar{z}))$$

4. Проверить, являются ли булевы функции монотонными

$$4.1 \quad f=(00110111)$$

$$4.2 \quad f=(01100110)$$

$$4.3 \quad f=(0010001101111111)$$

$$4.4 \quad f=(x\downarrow \bar{y})\oplus(xz\to(\bar{x}\vee\bar{z}))$$

$$4.5 \quad f=(xz\sim \bar{y})\to(xz|(\bar{x}\vee\bar{z}))$$

5. Построить полином Жегалкина булевых функций и проверить, являются ли они линейными

$$5.1 \quad f=(00110111)$$

$$5.2 \quad f = (01100110)$$
$$5.3 \quad f = (0010001101111111)$$
$$5.4 \quad f = (x \downarrow \overline{y}) \oplus (xz \to (\overline{x} \vee \overline{z}))$$
$$5.5 \quad f = (xz \sim \overline{y}) \to (xz | (\overline{x} \vee \overline{z}))$$

6. Определить, к каким классам принадлежат булевы функции

$$6.1 \quad f = (00110111)$$
$$6.2 \quad f = (01100110)$$
$$6.3 \quad f = (0010001101111111)$$
$$6.4 \quad f = (x \downarrow \overline{y}) \oplus (xz \to (\overline{x} \vee \overline{z}))$$
$$6.5 \quad f = (xz \sim \overline{y}) \to (xz | (\overline{x} \vee \overline{z}))$$

7. Исследовать на полноту систему функций

$$7.1 \quad B = \{x \to y; x \oplus y\}$$
$$7.2 \quad B = \{0; \overline{x}; x(y \oplus z) \oplus yz\}$$
$$7.3 \quad B = \{xy; x \vee y; x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$$
$$7.4 \quad B = \{\overline{x}; x(y \sim z) \sim yz; x \oplus y \oplus z\}$$
$$7.5 \quad B = \{f_1 = (11000011); f_2 = (10010110); f_3 = (0110)\}$$

8. Найти минимальные ДНФ булевых функций, используя карты Карно

$$7.1 \quad f = (10110100)$$
$$7.2 \quad f = (01111100)$$
$$7.3 \quad f = (0010001101000011)$$
$$7.4 \quad f = (x | \overline{y}) \oplus (xz \sim (\overline{x} \vee \overline{z}))$$
$$7.5 \quad f = (xz \to \overline{y}) \sim (xy \oplus (\overline{x} \vee \overline{z}))$$

Рекомендуемая литература

Обязательная

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: «Физматлит», 2005.

2. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.

3. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – С.-Пб.: «БХВ-Перербург», 2008.

4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: «Высшая школа», 2002.

Дополнительная

1. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: «Лаборатория Базовых Знаний», 2003.

2. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. – М.: «Высшая школа», 1986.

3. Кулабухов С. Ю. Дискретная математика (конспект лекций). – Таганрог: ТРУ, 2001.

4. Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. – М.: «Логос», 2003