Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

«Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)»
Кафедра «Высшая математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания
и варианты курсовых заданий

Составители: Выск Н.Д.
Гуторина Т.А.

Москва 2016

Методические указания предназначены для студентов 1 курса МАИ, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». В них рассматриваются операции над матрицами, вычисление определителей и основные приемы решения однородных и неоднородных систем линейных уравнений, операции над векторами, прямые и плоскости. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях.

I. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначения: A – матрица, a_{ij} - элемент матрицы, i – номер строки, в которой стоит данный элемент, j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы, n – число ее столбцов.

Матрица называется **квадратной**, если $m = n$. Число n в этом случае называют **порядком** квадратной матрицы.

Матрицы одинаковой размерности называются **равными**, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны 0.

Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны 0.

1. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B одинаковой размерности $m\times n$ называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n.$

Пример 1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ и

$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим элементы матрицы $C = A + B$, складывая элементы исходных матриц, стоящие на одинаковых местах:

$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 2 - 1 = 1;\ c_{12} = -3 + 4 = 1;\ c_{13} = 1 + 0 = 1;\ c_{14} = 1 - 1 = 0;$

$c_{21} = 0 + 2 = 2;\ c_{22} = 4 - 2 = 2;\ c_{32} = -2 + 5 = 3;\ c_{14} = 8 + 7 = 15.$

Следовательно, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

Произведением матрицы на число называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число.

Пример 2. Найти матрицу $5A - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix},\ 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix},\ 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Перемножение матриц

Произведением матрицы A **размерности** $\boldsymbol{m \times p}$ **и матрицы** B **размерности** $p \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, i = 1,..., m,\ j = 1,..., n.$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Операция перемножения матриц некоммутативна, т.е. $AB \neq BA$. Действительно, если существует произведение *AB*, то *BA* может вообще не существовать из-за несовпадения размерностей. Если существуют и *AB*, и *BA*, то они могут иметь разные размерности (если $m \neq n$).

Для квадратных матриц одного порядка произведения *AB* и *BA* существуют и имеют одинаковую размерность, но их соответствующие элементы в общем случае не равны.

Пример 3. Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Если произведение существует, вычислить его.

Решение.
Сравним размерности матриц *A* и *B*: *A*[3×2], *B*[2×2]. Следовательно, $n = l,\ m \neq k,$ поэтому произведение *AB*[3×2] существует, а произведение *BA* – нет.
Найдем элементы *AB*:
$(ab)_{11} = 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21$; $(ab)_{12} = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24$; $(ab)_{21} = 4 \cdot 5 – 2 \cdot 7 = 6$;
$(ab)_{22} = 4 \cdot 6 – 2 \cdot 8 = 8$; $(ab)_{31} = 1 \cdot 5 – 1 \cdot 7 = -2$; $(ab)_{32} = 1 \cdot 6 – 1 \cdot 8 = -2$.

Таким образом, $AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, *BA* не существует.

Пример 4. Найти *AB* и *BA*, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.
Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность.
A[2×4], *B*[4×2]. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы *AB* и *BA* существуют, причем *AB*[2×2], *BA*[4×4].

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B:

$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$

(сумма произведений элементов первой строки А на элементы первого столбца В; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки А, второй индекс – номер столбца В);

$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$

$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$

$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1\_ \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$

Следовательно,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A:

$d_{11} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0;$ $d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4;$ $d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1;$

$d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2;$ $d_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2;$ $d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2;$

$d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1;$ $d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0;$ $d_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1;$

$d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1;$ $d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0;$ $d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1;$

$d_{41} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8;$ $d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0;$ $d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2;$

$d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4.$

Таким образом,

$$D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Определители

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot(-3) = 8 + 15 = 23.$$

Определителем третьего порядка называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Пример 6.

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$\Delta = 2\cdot0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot2 + 5\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot5 - 1\cdot(-4)\cdot2 - (-1)\cdot1\cdot(-3) =$

$= 0 + 24 + 5 – 0 + 8 – 3 = 34.$

Пред тем, как перечислить основные свойства определителей, приведем определение понятия транспонирования матрицы. **Транспонированием** матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате получается матрица A', называемая **транспонированной** по отношению к матрице A, элементы которой связаны с элементами A соотношением $a'_{ij} = a_{ji}$.

Основные свойства определителей

1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Определитель, имеющий две равные строки, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. $$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложение определителя по строке

Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.
Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Пример 7.
Для $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ $a_{21} = -5, M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента $i+j$ есть число четное, или число, противоположное минору, если $i+j$ нечетно, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

При этом справедливо следующее утверждение: определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij}, \text{ где } i=1,2,3.$$

Таким образом, для вычисления определителя достаточно найти алгебраические дополнения к элементам какой-либо строки или столбца и вычислить сумму их произведений на соответствующие элементы определителя.

Пример 8.

Вычислим определитель из примера 6 с помощью разложения по строке. Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22}, так как произведение $a_{22} A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij}, получается вычеркиванием из исходного определителя i-й строки и j-го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4)(-8) = 34$.

4. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если $\Delta_A = 0$, и **невырожденной**, если $\Delta_A \neq 0$.

Квадратная матрица B называется **обратной** к квадратной матрице A того же порядка, если $AB = BA = E$. При этом B обозначается A^{-1}.

Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной. Тогда

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta_A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta_A} & \frac{A_{2n}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta_A} \end{pmatrix},$$

то есть ее элементами являются алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы A, деленные на ее определитель.

Пример 9.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу:

$$\Delta_A = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.

Найдем алгебраические дополнения а элементам матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-3 \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=11$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

Значит,

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Системы линейных уравнений

Линейным уравнением называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

где a_i и b – числа, x_i - неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Линейное уравнение называется **однородным**, если b = 0. В противном случае уравнение называется **неоднородным.**

Системой линейных уравнений (линейной системой) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij} , b_i - числа, x_j - неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

Решением линейной системы называется набор чисел $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

Линейная система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Совместная линейная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

1. Метод Гаусса

Пусть в системе (1) $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Если новые коэффициенты при x_2 не все равны нулю, можно таким же образом исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_n = \hat{b}_n \end{cases}. \qquad (2)$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\hat{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (2) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Пример 10.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Решение.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и
2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при *x* равнялся единице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим *x* из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -11y+z=3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -24y=0 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3$, $x = 1$.

Итак, $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

2. Правило Крамера

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

Назовем **главным определителем** такой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

а определителем Δ_{x_j} - определитель, полученный из (4) заменой столбца коэффициентов при x_j на столбец свободных членов. Тогда:

1) Если $\Delta \neq 0$, система (3) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, ..., x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.
2) Если $\Delta = \Delta_{x_j}$ =0, система имеет бесконечно много решений.
3) Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_{x_j} \neq 0$, система не имеет решений.

Пример 11.

Решить систему по правилу Крамера: $\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}$.

Решение.

Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$

следовательно, система имеет единственное решение.
Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

3. Решение линейных систем с помощью обратной матрицы

Рассмотрим линейную систему (3) и введем следующие обозначения:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов. Тогда систему (3) можно записать в виде матричного уравнения: $AX = B$. (5)

Пусть матрица A – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}.

Умножим обе части равенства (5) слева на A^{-1}. Получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Но $A^{-1}A = E,$ тогда $EX = A^{-1}B$, а поскольку $EX = X, X = A^{-1}B.$

Итак**,** решением матричного уравнения (5) является произведение матрицы, обратной к A, на столбец свободных членов системы (3).

Пример 12.

Решить систему $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=6 \\ 5x-4y-7z=4 \end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

Решение.

Составим матрицу системы: $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

Δ_A = -51 $\neq$ 0, следовательно, система имеет единственное решение.
Найдем матрицу A^{-1}:

$$A_{11}=-11 \quad A_{21}=-25 \quad A_{31}=2$$

$$A_{12}=9 \quad A_{22}=-12 \quad A_{32}=3$$

$$A_{13}=-13 \quad A_{23}=-11 \quad A_{33}=7$$

Тогда $A^{-1}=-\dfrac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}$.

Если $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то исходная система превращается в

матричное уравнение $AX = B$, решение которого $X = A^{-1}B$.
Следовательно,

$$X=-\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix}=-\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

III. Векторная алгебра

1. Разложение вектора по базису

Два линейно независимых вектора на плоскости (или три линейно независимых вектора в пространстве) образуют **базис**, если любой вектор плоскости (пространства) может быть представлен в виде их линейной комбинации. Числовые коэффициенты этой линейной комбинации называются **координатами** данного вектора в рассматриваемом базисе: если ***a, b, c* –** базис и ***d*** **=** k***a*** + m***b*** + p***c***, то числа k, m, p есть координаты вектора ***d*** в базисе ***a, b, c.***

Свойства базиса:

1. Любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора – базис в пространстве.
2. Разложение данного вектора по данному базису единственно, т.е. его координаты в данном базисе определяются единственным образом.
3. При сложении двух векторов их координаты относительно любого базиса складываются.
4. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пример 13.

Разложить вектор ***c*** = {3;10} по базису из векторов ***a*** = {-3;1} и ***b*** = {2;3}.

Для этого нужно найти такие числа k, m, что ***c*** = k***a*** + m***b***. Запишем это равенство для первых и вторых координат данных векторов:

$$\begin{cases} 3 = -3k + 2m \\ 10 = k + 3m \end{cases}, \quad \begin{cases} 3 = -3k + 2m \\ 30 = 3k + 9m \end{cases}, \quad 33 = 11m,\ m = 3,\ k = 10 - 9 = 1.$$

Следовательно, ***c*** = ***a*** + 3***b.***

2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\varphi .$$

Обозначения скалярного произведения: ***ab, (ab), a·b*** .

Свойства скалярного произведения:

1. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_a \boldsymbol{b}$.

2. $\boldsymbol{ab} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 3. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

4. $(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{ab})$. 5. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

6. $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$, где $\boldsymbol{a}^2$ называется скалярным квадратом вектора **a**.

7. Если векторы ***a*** и ***b*** определены своими декартовыми координатами

$$\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\},\ \boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то $$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 .$$

8. $$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} .$$

Пример 14.
Даны векторы $\boldsymbol{a}$ = {2; -3; 1} и $\boldsymbol{b}$ = {-1; 2; 1}. Найти скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$.
Найдем координаты векторов $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$:
$3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{3\cdot2 + 1; 3\cdot(-3) - 2; 3\cdot1 - 1\} = \{7; -11; 2\}$;
$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = \{2 + 2\cdot(-1); -3 + 2\cdot2; 1 + 2\cdot1\} = \{0; 1; 3\}$.
Тогда $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 7\cdot0 - 11\cdot1 + 2\cdot3 = -5$.

3. Векторное произведение векторов

Тройка некомпланарных векторов ***abc*** называется правой (левой), если после приведения к общему началу вектор **c** располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами ***a*** и ***b***, откуда кратчайший поворот от ***a*** к ***b*** кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).
Вектор ***c*** называется **векторным произведением** векторов ***a*** и ***b*,** если:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между ***a*** и ***b*.**
2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.
3) Тройка векторов ***abc*** является правой.

Обозначения векторного произведения: $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}]$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

<u>Свойства векторного произведения.</u>

1) $[\boldsymbol{ba}] = -[\boldsymbol{ab}]$.
2) $[\boldsymbol{ab}] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.
3) Модуль векторного произведения $|[\boldsymbol{ab}]|$ равняется площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a*** и ***b***.
4) $[(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] = k[\boldsymbol{ab}]$.
5) $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}]$.
6) Если в декартовой системе координат $\boldsymbol{a} = \{X_a, Y_a, Z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_b, Y_b, Z_b\}$, то

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \end{vmatrix}.$$

Пример 15.

Вычислим векторное произведение векторов ***a*** = {3, -4, 2} и ***b*** = {1, 5, 1}.

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\right\} = \{-14, -1, 19\}.$$

4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется результат скалярного умножения векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ на вектор $\boldsymbol{c}$.

Обозначение: $\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$.

<u>Свойства смешанного произведения.</u>

1) Смешанное произведение $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\boldsymbol{a,b,c}$, если они образуют правую тройку, или числу, противоположному этому объему, если $\boldsymbol{abc}$ – левая тройка. Если $\boldsymbol{a,b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = 0$.

Следствие. $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$.

Действительно, обе части равенства представляют объем одного и того же параллелепипеда. Поэтому положение векторных скобок в смешанном произведении не важно, и в его обозначении скобки не ставятся : $\boldsymbol{abc}$.

2) Если $\boldsymbol{a} = \{X_a, Y_a, Z_a\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_b, Y_b, Z_b\}$, $\boldsymbol{c} = \{X_c, Y_c, Z_c\}$, то

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}.$$

Пример 16.

Найдем смешанное произведение векторов **a** = {-3, 2, -1}, **b** = {2, 1, 0}, **c** = {-1, 3, -1}. Для этого вычислим определитель, составленный из их координат:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$ следовательно, векторы компланарны.

IV. Прямые и плоскости

1. Прямая на плоскости

Рассмотрим различные виды уравнений прямой на плоскости.
1. Пусть прямая проходит через точку $M_0\ (x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = \{A,B\}$. Тогда координаты любой точки данной прямой удовлетворяют уравнению

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ -
уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. При этом вектор ***n*** называют нормалью к прямой.

2. **Общее уравнение прямой:**

$$Ax + By + C = 0.$$

3. $$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$ -

каноническое уравнение прямой или уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\ (x_0, y_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{q} = \{l, m\}$.

4. $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ -

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

5. $y = kx + b$ - **уравнение прямой с угловым коэффициентом**.

Пример 17.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M(1,2)$ и $N(5,-3)$. Уравнение (4) примет вид:

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-2}{-3-2}, -5x + 5 = 4y - 8, \quad 5x + 4y - 13 = 0$$ - общее уравнение данной прямой.

Пример 18.

Для треугольника ABC с вершинами $A(-3; -1)$, $B(1; 5)$, $C(7; 3)$ составить уравнение высоты, выходящей из вершины B.

Высота BH перпендикулярна стороне AC, следовательно, вектор $\overrightarrow{AC} = \{10; 4\}$ можно считать нормалью к прямой. Воспользуемся уравнением (1):

$$10(x-1) + 4(y-5) = 0, \quad 5(x-1) + 2(y-5) = 0, \quad 5x + 2y - 15 = 0.$$

Расстояние *d* от точки $\mathbf{M_0}(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением

$Ax + By + C = 0$, вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 19.

Найдем расстояние от точки $A(7,-3)$ до прямой, заданной уравнением

$3x + 4y + 15 = 0.$

$$d = \frac{\left|3\cdot 7 + 4\cdot(-3) + 15\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

2. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве задается линейным уравнением с тремя переменными. Приведем два вида таких уравнений.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$,называемому нормалью к плоскости:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Таким образом, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать координаты какой-либо точки, лежащей в плоскости, и нормали к ней.

Пример 20.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; -1; 3)$, $B(2; 2; 0)$, $C(-1; 1; 1)$.

Векторы $AB = \{-3; 3; -3\}$ и $AC = \{-6; 2; -2\}$ параллельны данной плоскости, поэтому их векторное произведение или любой вектор, коллинеарный ему, является нормалью к плоскости.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left\{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= (0;\ 12;\ 12) = 12(0;\ 1;\ 1).$$

Выберем в качестве нормали $\boldsymbol{n} = \{0; 1; 1\}$, а точкой $(x_0; y_0; z_0)$ будем считать точку B. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$0\cdot(x - 2) + 1\cdot(y - 2) + 1\cdot(z - 0) = 0$, $y + z - 2 = 0$.

3. Прямые в пространстве

Прямую в пространстве невозможно задать одним уравнением - она задается системой из двух или трех уравнений.

1. Прямая как пересечение двух плоскостей задается системой уравнений, определяющих эти плоскости (предполагается, что плоскости не параллельны, то есть коэффициенты при переменных в их уравнениях не пропорциональны):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

2. Уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = \{k; m; n\}$, называемому направляющим вектором прямой, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Эти уравнения называются **каноническими** уравнениями прямой.

3. Канонические уравнения можно преобразовать в так называемые **параметрические** уравнения, где координаты точки на прямой задаются как функции некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + mt. \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Пример 21.

Составим канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2; -3; 5)$ и $B(7; 1; -4)$. Направляющим вектором этой прямо можно считать вектор $\overrightarrow{AB} = \{5; 4; -9\}$, а в качестве точки, лежащей на прямой, выберем точку A. Тогда

$\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-5}{-9}$ – канонические уравнения прямой,

$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 + 4t \\ z = 5 - 9t \end{cases}$ – ее параметрические уравнения.

4. Взаимное расположение прямой и плоскости

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

и плоскостью, определяемой общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Условием параллельности прямой и плоскости является при этом условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов: $A/l = B/m = C/n$.

Точку пересечения прямой и плоскости удобно искать, решая систему из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости.

Пример 22.

Найти точку, симметричную точке $A(5; -10; 4)$ относительно плоскости α: $x - 3y + z - 6 = 0$.

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения α с прямой AB. Составим уравнения прямой AB. Эта прямая перпендикулярна α, поэтому ее направляющим вектором можно считать нормаль к плоскости α: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} = (1; -3; 1)$.

Параметрические уравнения прямой AB имеют вид: $\begin{cases} x = t + 5 \\ y = -3t - 10. \\ z = t + 4 \end{cases}$

Точка O принадлежит и прямой AB, и плоскости α, поэтому ее координаты должны удовлетворять и уравнениям прямой, и уравнению плоскости.

Подставим в уравнение плоскости α параметрические выражения для x, y, z из уравнений прямой AB:

$$t + 5 - 3(-3t - 10) + t + 4 - 6 = 0;\ 11t + 33 = 0;\ t = -3.$$

Итак, координаты точки O: $\begin{cases} x = -3 + 5 = 2 \\ y = -3(-3) - 10 = -1 \Rightarrow O(2; -1; 1). \\ z = -3 + 4 = 1 \end{cases}$

Поскольку точка O – середина отрезка AB, то

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_O = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_O - x_A = 4 - 5 = -1 \\ y_B = 2y_O - y_A = -2 + 10 = 8 \Rightarrow B(-1;\ 8; -2). \\ z_B = 2z_O - z_A = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

ВАРИАНТЫ КУРСОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант №1

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a} = \{-1;-2;3\}$, $\vec{b} = \{-4;1;2\}$, $\vec{c} = \{5;2;7\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a} = \{2;1\}$, $\vec{b} = \{3;2\}$, $\vec{c} = \{6;2\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;5), B(3;4), C(-1;-6) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-5;6) до прямой $3x + 4y - 7 = 0$.
8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;2;5), B(1;-1;4) и C(-2;6;-6).
9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ и плоскости $x + y + z - 2 = 0$.
10. Найти точку, симметричную точке A(-5;0;-1) относительно плоскости $3x + y + z - 8 = 0$.

Вариант №2

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+2y+3z=3\\ 3x+y+2z=7\\ 2x+3y+z=2\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{3;-4;-2\}$, $\vec{c}=\{-4;-3;2\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;3\}$, $\vec{c}=\{4;3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-5;1), B(4;4), C(-1;-2) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(2;6) до прямой $3x - 4y + 6 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(4;2;-5), B(1;-1;3) и C(-2;6;8).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+7}{2}$ и плоскости $x+y+z-1=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(1;2;-2) относительно плоскости $x-3y+2z-5=0$.

Вариант №3

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 6\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y-4z=1\\ 3x+5y-11z=3\\ 3x+4y-10z=3\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{2;-3;-1\}$, $\vec{b}=\{-3;5;3\}$, $\vec{c}=\{4;3;-4\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;1\}$, $\vec{b}=\{2;5\}$, $\vec{c}=\{1;9\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки $A(2;5)$, $B(-3;4)$, $C(-1;-3)$ - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки $M(-5;1)$ до прямой $5x + 12y - 1 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0;-2;1)$, $B(1;-3;2)$ и $C(-2;3;-1)$.

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ и плоскости $x+y+z-5=0$.

10. Найти точку, симметричную точке $A(-1;-1;9)$ относительно плоскости $2x+y-4z-3=0$.

Вариант №4

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3\\ 5x+4y+3z=11\\ 10x+5y+z=11,5\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{3;-4;2\}$, $\vec{b}=\{-5;2;-3\}$, $\vec{c}=\{-1;7;-2\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{2;-5\}$, $\vec{b}=\{2;-3\}$, $\vec{c}=\{6;-13\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-3;5), B(6;4), C(-1;-7) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(1;2) до прямой $12x$ - $5y$ - 3 = 0.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;0;2), B(0;-1;-4) и C(-4;1;-3).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ и плоскости $x+y+z-3=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-3;-3;3) относительно плоскости $4x+3y-z-2=0$.

Вариант №5

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ -3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+2y+z=10\\ 2x+y+z=20\\ x+3y+z=30\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-5;2;4\}$, $\vec{b}=\{-3;-4;2\}$, $\vec{c}=\{6;-3;-3\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{1;5\}$, $\vec{b}=\{5;-5\}$, $\vec{c}=\{13;5\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;2), B(5;4), C(-3;-6) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(2;1) до прямой $4x + 3y + 2 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(2;2;-2), B(1;3;1) и C(-2;0;-5).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ и плоскости $x+y+z-2=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(0;7;0) относительно плоскости $2x-3y-z-3=0$.

Вариант №6

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}5x-y-z=0\\ x+2y+3z=14\\ 4x+3y+2z=16\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-4;-3;5\}$, $\vec{b}=\{2;-5;6\}$, $\vec{c}=\{-2;3;-5\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{1;-2\}$, $\vec{b}=\{1;-5\}$, $\vec{c}=\{9;-33\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;5), B(3;4), C(1;-6) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(3;6) до прямой $6x + 8y - 5 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;2;0), B(1;-2;4) и C(0;3;-1).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-2}{-1}$ и плоскости $x+y+z=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(3;2;0) относительно плоскости $2x+3y-z+2=0$.

Вариант №7

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}4 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+3y-6z=12\\ 3x+2y+5z=-10\\ 2x+5y-3z=6\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{4;2;-3\}$, $\vec{b}=\{-5;6;-4\}$, $\vec{c}=\{-2;-3;4\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;-4\}$, $\vec{b}=\{2;-1\}$, $\vec{c}=\{0;15\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;5), B(5;4), C(2;-3) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-1;3) до прямой $8x + 6y + 1 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(3;2;0), B(2;-1;-4) и C(0;-1;-5).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+7}{4}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ и плоскости $x+y+z+1=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(10;4;9) относительно плоскости $4x+2y+3z-5=0$.

Вариант №8

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}5 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+2y+z=8\\ 3x+2y+z=10\\ 4x+3y-2z=4\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-4;5;-2\}$, $\vec{b}=\{-1;-5;-8\}$, $\vec{c}=\{3;-2;4\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-4;-5\}$, $\vec{b}=\{5;-5\}$, $\vec{c}=\{-14;5\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-4;7), B(1;4), C(0;-6) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(2;-1) до прямой 6x - 8y - 9 = 0.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1;-2;2), B(5;-1;2) и C(-3;2;-1).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ и плоскости $x+y+z-5=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-1;3;-8) относительно плоскости $2x-y+3z+1=0$.

Вариант №9

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x+3y+2z=9\\ x+2y-3z=14\\ 3x+4y+z=16\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-5;-3;-2\}$, $\vec{b}=\{3;-4;-5\}$, $\vec{c}=\{4;2;3\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-3;-3\}$, $\vec{b}=\{-4;-2\}$, $\vec{c}=\{-14;-4\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(3;1), B(-5;4), C(1;-7) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-4;3) до прямой $12x + 5y + 4 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(4;-1;2), B(2;-3;1) и C(-1;3;-3).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ и плоскости $x+y+z=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(3;4;3) относительно плоскости $x+3y+2z-7=0$.

Вариант №10

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+y-z=36\\ x-y+z=13\\ -x+y+z=7\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-3;2;6\}$, $\vec{b}=\{-4;-5;-2\}$, $\vec{c}=\{1;-3;-5\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{1;3\}$, $\vec{b}=\{2;4\}$, $\vec{c}=\{-10;2\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-4;8), B(1;4), C(2;-5) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-2;2) до прямой $4x - 3y - 5 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2;1;0), B(3;-1;1) и C(-4;1;-2).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ и плоскости $x+y+z=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(1;-4;-5) относительно плоскости $2x+y+5z-3=0$.

Вариант №11

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x-4y+9z=28\\ 7x+3y-6z=-1\\ 7x+9y-9z=5\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;2;-4\}$, $\vec{c}=\{2;7;5\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;-1\}$, $\vec{b}=\{5;3\}$, $\vec{c}=\{2;1\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-6;5), B(3;4), C(-2;-6) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(4;3) до прямой $5x - 12y - 2 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2;4;1), B(3;-1;3) и C(0;2;-4).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-1}$ и плоскости $x+y+z-5=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-9;-10;2) относительно плоскости $3x+4y-z-9=0$.

Вариант №12

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=36\\ 2x-3z=-17\\ 6x-5z=7\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{2;3;1\}$, $\vec{b}=\{-4;-2;3\}$, $\vec{c}=\{-3;2;-4\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $[\vec{b}\vec{c}]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{4;3\}$, $\vec{b}=\{1;5\}$, $\vec{c}=\{3;5\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;1), B(8;4), C(1;-3) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-6;5) до прямой $8x - 6y + 11 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;4;-1), B(2;-5;0) и C(-1;1;1).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+4}{3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-2}{-1}$ и плоскости $x+y+z+1=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-1;-9;0) относительно плоскости $x+2y+z+1=0$.

Вариант №13

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 3\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x+2y+z=4\\ 3x-5y+3z=1\\ 2x+7y-z=8\end{cases}$$

а) по правилу Крамера

б) методом Гаусса

в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-3;1;2\}$, $\vec{b}=\{5;3;-3\}$, $\vec{c}=\{3;-4;4\}$ найти:

а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;

б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;

в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{5;2\}$, $\vec{b}=\{0;3\}$, $\vec{c}=\{4;5\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(3;5), B(-7;4), C(-1;-2) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-1;5) до прямой $8x + 15y - 2 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(4;-2;1), B(5;-1;2) и C(-2;2;0).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости $x+y+z-6=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-2;4;-7) относительно плоскости $2x-y+3z+1=0$.

Вариант №14

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}5 & -4 & -2\\ -4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x+y=5\\ x+3z=16\\ 5y-z=10\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-4;2;3\}$, $\vec{b}=\{2;-3;-5\}$, $\vec{c}=\{7;-2;-1\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{1;1\}\vec{b}=\{2;3\}$, $\vec{c}=\{1;0\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;2), B(5;4), C(3;-1) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-5;3) до прямой $8x - 15y + 1 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;-2;2), B(1;1;-3) и C(2;1;-1).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+6}{3}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-4}{-1}$ и плоскости $x+y+z-6=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(4;3;3) относительно плоскости $x+2y+z-7=0$.

Вариант №15

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}7x+2y+3z=15\\ 5x-3y+2z=15\\ 10x-11y+5z=36\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{2;4;-5\}$, $\vec{b}=\{-4;2;-3\}$, $\vec{c}=\{-3;-3;6\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;5\}$, $\vec{b}=\{-1;-5\}$, $\vec{c}=\{0;-10\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-1;7), B(3;3), C(0;-4) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-2;6) до прямой $15x + 8y - 6 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1;2;1), B(1;-3;4) и C(-2;3;-6).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$ и плоскости $x+y+z=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-3;-5;-5) относительно плоскости $2x+3y+z-2=0$.

Вариант №16

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = 16 \\ x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a} = \{-3;5;-4\}$, $\vec{b} = \{-5;6;2\}$, $\vec{c} = \{3;-5;-2\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a} = \{4;1\}$, $\vec{b} = \{2;2\}$, $\vec{c} = \{6;3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-7;1), B(1;4), C(-1;-5) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-5;4) до прямой $15x - 8y + 3 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;1;0), B(1;2;3) и C(-2;-4;-1).

9. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1}$ и плоскости $x + y + z - 2 = 0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(4;-2;6) относительно плоскости $2x - y + z + 2 = 0$.

Вариант №17

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -7 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x-5y+4z=-6 \\ x+y-z=-9 \\ 3x-7y+4z=10 \end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{2;-3;4\}$, $\vec{b}=\{6;-4;-5\}$, $\vec{c}=\{-3;4;-2\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{6;1\}$, $\vec{b}=\{1;5\}$, $\vec{c}=\{7;3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;5), B(9;0), C(-3;-6) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(3;6) до прямой $9x + 12y - 5 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1;2;4), B(2;-1;3) и C(3;6;-3).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ и плоскости $x+y+z-4=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-3;1;1) относительно плоскости $2x+y+2z-6=0$.

Вариант №18

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 3 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-8 & -1\\ 7 & -12\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+3y-2z=7\\ 4x+3y+5z=23\\ 3x+3y+2z=17\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{5;-2;-4\}$, $\vec{b}=\{-5;-8;-1\}$, $\vec{c}=\{-2;4;3\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{6;2\}$, $\vec{b}=\{2;1\}$, $\vec{c}=\{10;3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;6), B(3;5), C(-1;-4) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-5;2) до прямой $9x$ - $12y$ - 2 = 0.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(0;2;-5), B(1;-2;1) и C(2;6;-3).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-1}$ и плоскости $x+y+z-6=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(4;4;0) относительно плоскости $x+2y+3z+2=0$.

Вариант №19

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 9 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x+3y+z=6\\ x+4y+3z=8\\ 3x+y+5z=9\end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{-3;-2;-5\}$, $\vec{b}=\{-4;-5;3\}$, $\vec{c}=\{2;3;4\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{4;3\}$, $\vec{b}=\{1;2\}$, $\vec{c}=\{1;3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-3;5), B(6;4), C(-1;-1) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(5;6) до прямой $12x + 9y + 7 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;2;-1), B(1;-2;1) и C(-2;1;-3).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ и плоскости $x+y+z-4=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-7;-1;5) относительно плоскости $4x-y-2z-5=0$.

Вариант №20

1. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+y-3z=-4 \end{cases}$$

а) по правилу Крамера
б) методом Гаусса
в) с помощью обратной матрицы.

4. Для векторов $\vec{a}=\{2;6;-3\}$, $\vec{b}=\{-5;-2;-4\}$, $\vec{c}=\{-3;-5;1\}$ найти:
а) скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$;
б) векторное произведение $\left[\vec{b}\vec{c}\right]$;
в) смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{10;1\}$, $\vec{b}=\{1;2\}$, $\vec{c}=\{3;6\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

6. Точки A(-2;4), B(3;8), C(-1;-5) - вершины треугольника ABC. Составить общие уравнения сторон и высот этого треугольника.

7. Найти расстояние от точки M(-3;1) до прямой $12x - 9y - 4 = 0$.

8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;2;2), B(1;-1;1) и C(-2;0;-6).

9. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+8}{3}$ и плоскости $x+y+z-3=0$.

10. Найти точку, симметричную точке A(-1;-9;0) относительно плоскости $x+3y+z-5=0$.