Н.Д.Выск

Математический анализ
Часть 1. Дифференциальное исчисление

учебное пособие

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского
Кафедра «Высшая математика»
2011

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания

Начинайте каждое занятие с изучения лекции. При этом:

- ✓ вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- ✓ затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- ✓ разберите доказательства теорем и выводы формул
- ✓ в завершение работы прочтите всю лекцию еще раз, чтобы убедиться, что теоретический материал освоен.

Следующий этап работы – выполнение заданий практикума.

- ✓ каждую задачу попробуйте решить самостоятельно
- ✓ в случае неудачи посмотрите указание и вновь повторите попытку
- ✓ в случае повторной неудачи внимательно разберите приведенное решение
- ✓ если вы решили задачу самостоятельно (во всяком случае, ваш ответ оказался верным), все равно обязательно прочтите решение, данное в учебном курсе – это поможет вам проверить правильность примененного метода решения
- ✓ закончив решение всех задач практикума, обязательно вернитесь к тем из них, которые не получились в первый раз, и попробуйте вновь самостоятельно решить их.

При выполнении домашнего задания используйте материал лекции и практикума.

1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. ПРЕДЕЛЫ

1.1.1. *Множества. Функция. Определение предела*

Замечание. Понятие множества, как и другие основополагающие понятия математики, вводится без определения.

Операции с множествами

1. Включение множества A в множество B $(A \subset B)$. При этом каждый элемент множества A является элементом множества B, и множество A называется подмножеством множества B. В частности, $A=B$, если все элементы множества A принадлежат множеству B и наоборот.
2. Объединение множеств A и B $(A \cup B)$ - множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B.
3. Пересечение множеств A и B $(A \cap B)$ - множество всех элементов, принадлежащих одновременно A и B.
4. Разность множеств A и B $(A \backslash B)$ – множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством****.*

Пусть заданы непустые множества X и Y.

Соответствие, при котором каждому элементу множества X соответствует некоторый элемент множества Y, называется ***отображением*** *X на Y.*

Множество действительных чисел

Из элементарной математики известно, что совокупность рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел ***R***. На нем определены операции:

1) Сложение: для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число $a+b$, называемое их суммой, причем выполняются следующие условия:
   a) $a+b=b+a$
   b) $a+(b+c)=(a+b)+c$
   c) существует число 0 такое, что $a+0=a$ для любого $a\in$ R
   d) $\forall a \in R \quad \exists$ противоположное число $-a$, для которого $a+(-a)=0$.
2) Умножение: $\forall a,b \in R$ определено единственное число ab, называемое их произведением, такое, что выполняются следующие условия:

a) $ab=ba \quad \forall a,b \in R$

b) $a(bc)=(ab)c \quad \forall a,b,c \in R$

c) существует число 1 такое, что $a\cdot 1=a \quad \forall a \in R$

d) $\forall\, a\neq 0$ существует обратное число $1/a$, для которого $a\cdot 1/a = 1$.

Связь сложения и умножения: $(a + b)c = ac + bc$.

Множество действительных чисел обладает следующими свойствами:

1) Упорядоченность - $\forall a,b \in R$ либо $a < b$, либо $a > b$. При этом
   a) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
   b) если $a < b$, то $\forall c \quad a + c < b + c$.
   c) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.
2) Непрерывность – для любых непустых множеств X и Y таких, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y \;\; x \leq y,\;\; \exists a : x \leq a \leq y$.

Подмножества множества $\boldsymbol{R}$ называют числовыми множествами.

Примеры числовых множеств:

1. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ (1,2,3,…).
2. Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ ($0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).
3. Множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ (числа вида m/n, где m и n – целые).

Функция

Определение. Если каждому элементу x множества X (называемого областью определения функции) по определенному закону ставится в соответствие **единственный** элемент y множества Y, то подобное отображение называется **функцией,** определенной на множестве X со значениями в множестве Y. При этом x называется независимой переменной, или аргументом, а $y = f(x)$ – зависимой переменной, или функцией.

> *Мы будем рассматривать только* ***однозначные функции*** *(в отличие от многозначных функций, для которых одному значению x может соответствовать более одного значения y).*

Способы задания функции:

1) табличный
2) графический
3) аналитический.

Если $y=F(u)$ является функцией от u, а $u=\varphi(x)$ – функцией от x, то

$$y = F[\varphi(x)]$$

*называется **сложной функцией** или функцией от функции.*

Основные элементарные функции

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
2. Показательная функция $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.
5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

***Элементарной функцией** $y = f(x)$ называется функция, заданная с помощью основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций и взятия функции от функции.*

Если для функции $y = f(x)$ можно определить функцию $x = g(y)$, ставящую в соответствие каждому значению функции $y = f(x)$ значение ее аргумента x, то функция $y = g(x)$ называется **обратной функцией** к $y = f(x)$ и обозначается $y = f^{-1}(x)$.

Пределы функций

Определим понятие **окрестности** точки x_0 как множество значений x, являющихся решениями неравенства $0<|x - x_0| < \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое число. Само значение x_0 может включаться в окрестность или не включаться в нее (в этом случае окрестность называется проколотой).

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Число A называется ***пределом*** *функции y = f(x) при x, стремящемся к* x_0*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

такое, что

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad | x - x_0 | < \delta.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Замечание. Для существования предела функции в точке x_0 не требуется, чтобы функция была определена в самой этой точке.

Примеры.

1. Докажем, что

$$\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7.$$

Если $|2x+1-7| < \varepsilon$, то $|2x - 6| < \varepsilon$, $|x - 3| < \varepsilon/2$. Таким образом, если принять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, то выполнены все условия определения предела. Утверждение доказано.

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3.$

Заметим, что в проколотой окрестности x=2 $x - 2$ не равно нулю, поэтому мы имеем право сократить дробь на $(x - 2)$.

Функция y = f(x) имеет ***бесконечный предел*** *при x, стремящемуся к* x_0 *(стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если*

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left| f(x) \right| > M \quad \text{при} \quad | x - x_0 | < \delta.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Число A называется ***пределом функции y = f(x) на бесконечности****, если*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists X>0: |f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{при}:$$

$$а)\quad x>X \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=A\ ;$$

$$б)\quad x<-X \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A\ ;$$

$$в)\quad |x|>X \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=A\ .$$

Замечание. Бесконечный предел функции на бесконечности можно определить по аналогии с двумя предыдущими определениями.

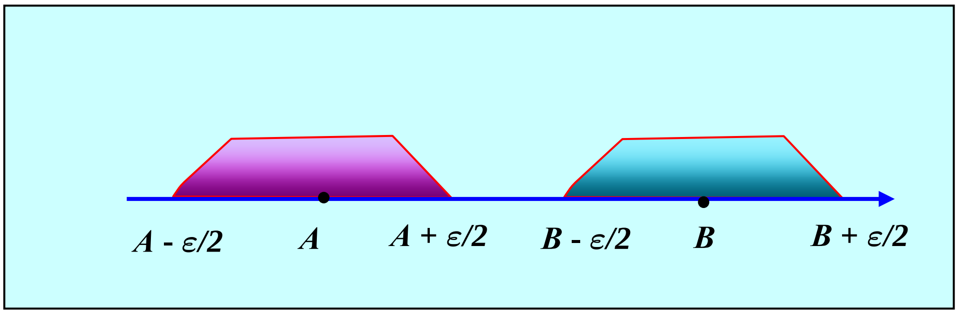
Определение. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** в некоторой области значений x, если существует число $M>0$ такое, что $|f(x)|<M$ для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области.

Свойства пределов

1. Если существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

(A – конечное число), то функция $y = f(x)$ является ограниченной в некоторой окрестности (возможно, проколотой) точки x_0.
Доказательство.
Так как для любого ε существует такое δ, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, то при этом $|f(x)| < |A| + \varepsilon$, то есть функция ограничена в рассматриваемой окрестности.
2. Функция не может иметь двух различных пределов при x, стремящемуся к одному и тому же значению.
Доказательство.



Пусть A и B – пределы $f(x)$ при $x \to x_0$. Выберем $\varepsilon < |A\text{-}B|$. Тогда существует такое δ_1, что $|f(x)\text{-}A|<\varepsilon/2$ при $|x - x_0| < \delta_1$, и такое δ_2, что $|f(x)\text{-}B|<\varepsilon/2$ при $|x - x_0| < \delta_2$. Если выбрать в качестве δ меньшее из чисел δ_1 и δ_2, то значения функции $f(x)$ для аргументов, лежащих в δ – окрестности x_0, должны одновременно находиться в двух непересекающихся окрестностях, что невозможно. Утверждение доказано.

3. Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad и \quad A \neq 0,$$

то существует окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак ($f(x)>0$, если $A > 0$, и $f(x)<0$, если $A < 0$).

Доказательство.

Достаточно выбрать $\varepsilon=|A|/2$. Тогда для x из некоторой окрестности x_0 $|f(x)\text{-}A| < |A|/2$, то есть $A/2 < f(x) < 3A/2$ при $A > 0$ и $3A/2 < f(x) < A/2$ при $A < 0$. Следовательно, в выбранной окрестности $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Односторонние пределы

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева (справа), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$при \quad x_0 - x < \delta \quad (x - x_0 < \delta).$$

Обозначения:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Теорема (второе определение предела). Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к x_0, предел, равный A, в том и только в том случае, если оба ее односторонних предела в этой точке существуют и равны A.

Доказательство.

1) Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

то и для $x_0 - x < \delta$, и для $x - x_0 < \delta$ $|f(x) - A|<\varepsilon$, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

2) Если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A,$$

то существует δ_1: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x_0 - x < \delta_1$ и δ_2: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x - x_0 < \delta_2$. Выбрав из чисел δ_1 и δ_2 меньшее и приняв его за δ, получим, что при $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Теорема доказана.

Замечание. Поскольку доказана эквивалентность требований, содержащихся в определении предела и условия существования и равенства односторонних пределов, это условие можно считать вторым определением предела.

Предел числовой последовательности

Числовую последовательность $\{a_n\}$ можно считать функцией дискретного аргумента n и применить к ней определение предела:

Число A называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : |a_n - A| < \varepsilon \quad при \quad n > N.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Множества. Функция. Определение предела*»

Задача 1.
Найти область определения функции

$$y = \sqrt{5 - |x|}.$$

Указание

Область определения функции задается неравенством

$$5 - |x| \geq 0.$$

Решение

Область определения функции задается неравенством

$$5 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5.$$

Ответ: $-5,5$.

Задача 2.
Найти область определения функции

$$y = \log_2 \frac{x+2}{x^2 - 2x + 1} + \arcsin \frac{x+3}{6}.$$

Указание

Область определения функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-2x+1} > 0 \\ -1 \le \dfrac{x+3}{6} \le 1 \end{cases}.$$

Решение

Область определения функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-2x+1} > 0 \\ -1 \le \dfrac{x+3}{6} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{(x-1)^2} > 0 \\ -6 \le x+3 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \ne 1 \\ -9 \le x \le 3 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 1,\, 1 < x \le 3.$$

Ответ: $(-2,1) \cup (1,3]$.

Задача 3.

Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}.$$

Указание

Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, а затем сократите на общий знаменатель.

Решение

Перед нами так называемая неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$, так как при $x = 3$ и числитель, и знаменатель дроби равны нулю. Следовательно, $x = 3$ является корнем и числителя, и знаменателя. Поэтому можно разложить обе части дроби на множители и сократить общий множитель $(x - 3)$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3+1}{3-2} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 4.

Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5+x^4+x^3-3}{3x^3-x^2-x-1}.$$

Указание

Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, а затем сократите на общий знаменатель.

Решение

При x = 1 и числитель, и знаменатель дроби равны нулю, следовательно, можно разложить их на множители и сократить общий множитель (x – 1):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^4+x^3-3}{3x^3-x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+2x^3+3x^2+3x+3)}{(x-1)(3x^2+2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{3x^2+2x+1}=\frac{1+2+3+3+3}{3+2+1}=\frac{12}{6}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 5.

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}.$$

Указание

Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, а затем сократите на общий знаменатель.

Решение

При x = -3 и числитель, и знаменатель дроби равны нулю, следовательно, можно разложить их на множители и сократить общий множитель (x + 3):

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x(x+3)^2}=\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x(x+3)}.$$

Теперь при $x\to -3$ числитель дроби стремится к -6, а знаменатель – к нулю. Следовательно, дробь неограниченно возрастает, и предел равен бесконечности.

Ответ: ∞.

Задача 6.

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^3-2x^2-x-8}.$$

Указание

Разделите каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень знаменателя.

Решение

На этот раз перед нами неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ – обе части дроби при x, стремящемся к бесконечности, неограниченно возрастают. Для того чтобы избавиться от этой неопределенности, разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x^3-2x^2-x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^a}=0 \quad при \quad a>0,$$

получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ответ: 0.

Задача 7.
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3-2}{x^2-x+4}.$$

Указание

Разделите каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 – старшую степень знаменателя.

Решение

Для того чтобы избавиться от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 – старшую степень знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3-2}{x^2-x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\infty}{1}=\infty.$$

Ответ: ∞.

Задача 8.
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x^2-x-5}{2x^3-5x+7}.$$

Указание

Разделите каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень числителя и знаменателя.

Решение

Для того чтобы избавиться от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x^2-x-5}{2x^3-5x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{2-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{6}{2}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 9.
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[3]{x+1}-2}.$$

Указание

Домножьте числитель и знаменатель на выражения

$$\sqrt{x+2}+3 \quad и \quad \sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4$$

и примените формулы сокращенного умножения.

Решение

Домножим числитель и знаменатель на выражения

$$\sqrt{x+2}+3 \quad и \quad \sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4$$

и применим формулы разности квадратов и разности кубов:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[3]{x+1}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)}{(\sqrt[3]{x+1}-2)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)(\sqrt{x+2}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x+2-9)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)}{(x+1-8)(\sqrt{x+2}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}{\sqrt{x+2}+3}=\frac{4+4+4}{3+3}=\frac{12}{6}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 10.
Вычислить предел:

$$\lim_{x\to-\infty} x \ \sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7} \ .$$

Указание

Домножьте и разделите данное выражение на

$$\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-7}.$$

Решение

Домножим и разделим данное выражение на

$$\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-7}:$$

$$\lim_{x\to-\infty} x \ \sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7} \ =$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x \ \sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7} \ \ \sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-7}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^2+5-x^2+7)}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{12x}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7}}.$$

Теперь разделим обе части дроби на $|x|$ = $-x$ (при этом подкоренные выражения нужно разделить на x^2):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{12x}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-7}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-12}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}=-\frac{12}{2}=-6.$$

Ответ: -6.

1.1.2. *Свойства пределов. Замечательные пределы*

Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $y=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Свойства бесконечно малых

1. Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, то существуют δ_1 и δ_2 такие, что $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$ и $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ для выбранного значения ε. Тогда $|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon$, то есть $|(\alpha(x)+\beta(x))-0|<\varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha(x)+\beta(x))=0,$$

то есть $\alpha(x)+\beta(x)$ – бесконечно малая.

Замечание. Отсюда следует, что сумма любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

2. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, а $f(x)$ – функция, ограниченная в некоторой окрестности x_0, то $\alpha(x)f(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство.

Выберем число M такое, что $|f(x)|<M$ при $|x-x_0|<\delta_1$, и найдем такое δ_2, что

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M} \quad при \quad |x-x_0|<\delta_2.$$

Тогда, если выбрать в качестве δ меньшее из чисел δ_1 и δ_2,

$$|\alpha(x)\cdot f(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

то есть $\alpha(x)\cdot f(x)$ – бесконечно малая.

Следствие 1.
Произведение бесконечно малой на конечное число есть бесконечно малая.

Следствие 2.
Произведение двух или нескольких бесконечно малых есть бесконечно малая.

Следствие 3.
Линейная комбинация бесконечно малых есть бесконечно малая.

Теорема (**Третье определение предела**).
Если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

то необходимым и достаточным условием этого является то, что функцию $f(x)$ можно представить в виде

$f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство.

1)Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Следовательно, $f(x)=A+\alpha(x)$.

2)Пусть $f(x)=A+\alpha(x)$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)-A)=\lim_{x \to x_0}\alpha(x)=0,$$

значит,

$$\forall \varepsilon \quad |f(x)-A|<\varepsilon \quad при \quad |x-x_0|<\delta(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A.$$

Замечание. Тем самым получено еще одно определение предела, эквивалентное двум предыдущим.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если существуют

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \quad и \quad \lim_{x \to x_0} g(x)=B,$$

то существует и

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)+g(x))=A+B.$$

Доказательство.

Используя третье определение предела, представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда $f(x)+g(x)=A+B+(\alpha(x)+\beta(x))=A+B+\gamma(x)$, где $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$ – бесконечно малая. Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)+g(x))=A+B.$$

Теорема 2. Если существуют

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \quad и \quad \lim_{x \to x_0} g(x)=B,$$

то существует и

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B.$$

Доказательство.

Представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда $f(x)\cdot g(x)=AB+A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$. Но $A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ – бесконечно малая (так как $f(x)$ и $g(x)$ ограничены в окрестности x_0), следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B.$$

Теорема 3. Если существуют

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0,$$

то существует и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство.

Представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B(B+\beta(x))} =$$

$$= \frac{A}{B} + \frac{1}{B(B+\beta(x))}(B\alpha(x)-A\beta(x)),$$

где $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ – ограниченная в окрестности x_0 функция, так как имеет предел, равный $1/B^2$, а $B\alpha(x)-A\beta(x)$ – бесконечно малая. Поэтому

$$\frac{1}{B(B+\beta(x))}(B\alpha(x)-A\beta(x)) -$$

бесконечно малая, и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Теорема 4 («лемма о двух милиционерах»). Если $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ в некоторой окрестности x_0 и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,$$

то существует и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A.$$

Доказательство.

Из условия теоремы следует, что

$$f(x)-A \le \varphi(x)-A \le g(x)-A.$$

Выберем δ-окрестность точки x_0, в которой

$$|f(x)-A| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |g(x)-A| < \varepsilon.$$

Тогда

$$-\varepsilon < f(x)-A \le \varphi(x)-A \le g(x)-A < \varepsilon.$$

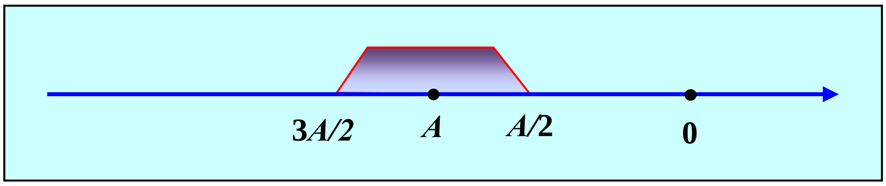
Поэтому $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A.$$

Теорема 5. Если

$$при \quad x \to x_0 \quad f(x) \ge 0 \quad и \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad то \quad A \ge 0.$$

Доказательство.



Предположим, что $A<0$. Тогда, выбрав $\varepsilon=|A|/2$, найдем окрестность точки x_0, в которой $|f(x)-A|<|A|/2$, следовательно, $3A/2<f(x)<A/2$, то есть $f(x)<0$ в рассматриваемой окрестности, что противоречит условию теоремы.

Следствие 1.
Аналогично доказывается, что если $f(x)\le 0$, то $A\le 0$.

Следствие 2.
Если $f(x)\ge g(x)$ и обе функции имеют пределы в точке x_0, то
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ge \lim_{x \to x_0} g(x).$$
Замечание. Все перечисленные утверждения можно доказать для $x \to \infty$.

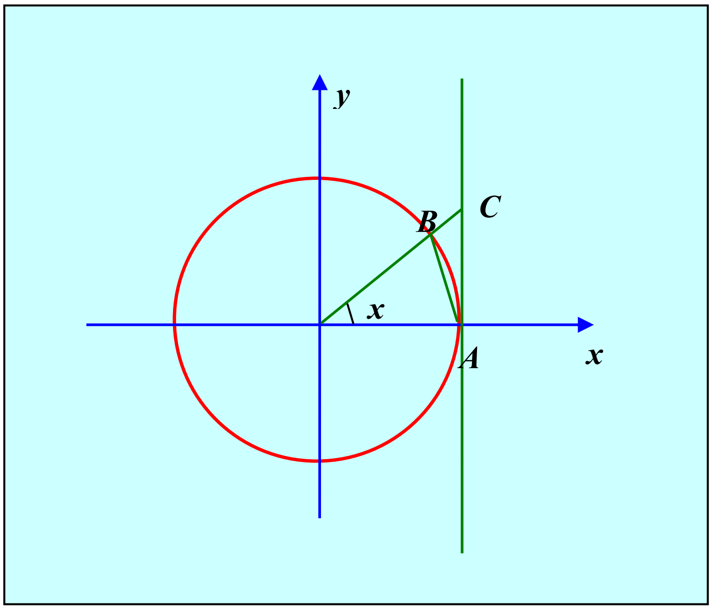
Теорема 6 (без доказательства). Ограниченная и возрастающая при $a<x<b$ $(a<x<\infty)$ функция имеет предел при $x \to b \; (x \to \infty)$.

Замечательные пределы

Теорема (первый замечательный предел).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство.
Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и будем считать, что угол AOB равен x (радиан). Сравним площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOC, где прямая OC – касательная к окружности, проходящая через точку (1;0). Очевидно, что
$$S_{\Delta AOB} < S_{сект.AOB} < S_{\Delta AOC}.$$



Используя соответствующие геометрические формулы для площадей фигур, получим отсюда, что

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot tgx,$$

или $\sin x<x<\operatorname{tg}x$. Разделив все части неравенства на $\sin x$ (при $0<x<\pi/2$ $\sin x>0$), запишем неравенство в виде:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

Тогда

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

и по лемме о двух милиционерах

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Замечание. Доказанное справедливо и при $x<0$.

Следствия из первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{kx\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\frac{1}{\cos kx}=k\cdot 1=k.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin mx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\frac{x}{\sin mx}=k\frac{1}{m}=\frac{k}{m}.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{tgmx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}\frac{x}{tgmx}=\frac{k}{m}.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1,\quad где\quad y=\arcsin x.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{tgy}=1,\quad где\quad y=arctgx.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}.$

Теорема (второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Замечание. Число e$\approx$2,7.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad при\quad n\to\infty$$

имеет предел, заключенный между 2 и 3. По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\geq 2-$$

возрастающая переменная величина при возрастающем n. С другой стороны,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<1;\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$$

и т.д., поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

Следовательно,

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3-$$

ограниченная и возрастающая величина, поэтому она имеет предел (см. теорему 6). Значение этого предела обозначается числом *e*.

2. Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

а) Пусть $x\to+\infty$. Тогда

$$n\le x<n+1,\ \frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1},\ 1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

При $x\to\infty$ $n\to\infty$. Найдем пределы левой и правой частей неравенства:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}=\frac{e}{1}=e.$$

Следовательно, по лемме о двух милиционерах

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

б) Если $x\to-\infty,\quad \text{то}\quad t=-(x+1)\to+\infty,$ и

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=e\cdot 1=e.$$

Теорема доказана.

Следствия из второго замечательного предела

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$$

где $a>0,\quad y=a^x-1.$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$$

Натуральный логарифм и гиперболические функции

Логарифм с основанием *e* называется **натуральным логарифмом**. Обозначение: $\log_e x=\ln x$.

Определение. Функции

$$\boxed{shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

(гиперболический синус),

$$\boxed{chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

(гиперболический косинус),

$$\boxed{thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

(гиперболический тангенс) и

$$\boxed{cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$$

(гиперболический котангенс) называются **гиперболическими функциями**.

Замечание 1.
Гиперболические функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных тригонометрических функций. Например,

$$ch^2x - sh^2x = \frac{1}{4}\ \ e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\ \ = 1,$$

$$2shx \cdot chx = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = sh2x;$$

$$thx = \frac{shx}{chx}; \quad cthx = \frac{chx}{shx};$$

$$thx \cdot cthx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1$$

и т.д.
Замечание 2.
Термин «гиперболические» объясняется тем, что уравнения

$$\begin{cases} x = a\,cht \\ y = a\,sht \end{cases}, \quad a > 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

являются параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

так же, как

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \quad -$$

параметрические уравнения окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Свойства пределов. Замечательные пределы*»

Задача 1.
Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x - \cos 7x}{x\sin 3x}.$$

Указание

Преобразуйте числитель, воспользовавшись формулой

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

а затем разделите обе части дроби на x^2.

Решение

Преобразуем в числителе разность косинусов в произведение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x - \cos 7x}{x\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 6x\sin x}{x\sin 3x}.$$

Теперь разделим обе части дроби на x^2 и используем 1-й замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 6x\sin x}{x\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\sin 6x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}} = \frac{2\cdot 6\cdot 1}{3} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 2.
Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x + tg4x}{\pi - x}.$$

Указание

Сделайте замену переменной: $t = \pi - x$.

Решение

Сделаем замену переменной: $t = \pi - x$. Тогда, используя периодичность тригонометрических функций и формулы приведения, получим:

$$x = \pi - t, \quad \sin 3x = \sin(3\pi - 3t) = \sin(\pi - 3t) = \sin 3t,$$

$$tg4x = tg(4\pi - 4t) = tg(-4t) = -tg4t, \quad t \to 0 \quad при \quad x \to \pi.$$

Подставим эти результаты в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x + tg4x}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t - tg4t}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 2t}{t} - \frac{tg4t}{t}\right) = 3 - 4 = -1.$$

Ответ: -1.

Задача 3.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3\sin x} - \sqrt{1-2\sin x}}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}.$$

Указание

Домножьте числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю (то есть на сумму соответствующих корней), а в знаменателе примените формулу приведения.

Решение

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3\sin x} - \sqrt{1-2\sin x}}{\cos(\frac{\pi}{2} - 3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+3\sin x} - \sqrt{1-2\sin x})(\sqrt{1+3\sin x} + \sqrt{1-2\sin x})}{\sin 3x \ \ \sqrt{1+3\sin x} + \sqrt{1-2\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+3\sin x - 1 + 2\sin x}{\sin 3x \ \ \sqrt{1+3\sin x} + \sqrt{1-2\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(5\frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3\sin x} + \sqrt{1-2\sin x}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Задача 4.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-4}{x^2-3}\right)^{4x}.$$

Указание

Преобразуйте функцию к виду

$$\left(1+f(x)^{\frac{1}{f(x)}}\right)^{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-4}{x^2-3}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-3)+(2x-1)}{x^2-3}\right)^{4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-3}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3}{2x-1}}\right)^{\frac{2x-1}{x^2-3}\cdot 4x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-4x}{x^2-3}}=e^8.$$

Ответ: e^8.

Задача 5.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 12x)}{\sin 4x}.$$

Указание

Воспользуйтесь следствием из 2-го замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k.$$

Решение

Умножим обе части дроби на $\sin 12x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 12x)}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 12x)}{\sin 12x}\cdot\frac{\sin 12x}{\sin 4x}=1\cdot 3=3.$$

Ответ: 3.

Задача 6.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x+tg3x}.$$

Указание

Воспользуйтесь следствием из 2-го замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Решение

Вынесем за скобки в числителе e^x и разделим обе части дроби на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x+tg3x}=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{1+\dfrac{tg3x}{x}}=1\cdot\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задача 7.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

Указание

Преобразуйте функцию к виду

$$\left(\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right)^{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

Решение

$$\lim_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos\sqrt{x}-1\right)\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}}\right)^{-\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2}=e^{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Задача 8.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}.$$

Указание

Сделайте замену переменной

$$t = x-\frac{1}{2}$$

и воспользуйтесь следствием из 2-го замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Решение

Сделаем замену переменной

$$t = x-\frac{1}{2},$$

тогда

$$2x-1=2t,\quad x=t+\frac{1}{2},\quad \sin\pi x=\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi t,$$

$$\sin 3\pi x=\sin\left(3\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos 3\pi t,\quad t\to 0\quad \textit{при}\quad x\to\frac{1}{2}.$$

Подставляя в первоначальное выражение, получаем:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2}{e^{\cos\pi t}-e^{\cos 3\pi t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2}{e^{\cos\pi t}(1-e^{\cos 3\pi t-\cos\pi t})}=4\lim_{t\to 0}\frac{1}{e^{\cos\pi t}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-e^{\cos 3\pi t-\cos\pi t}}=$$

$$=4\cdot 1\cdot\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin 2\pi t\sin\pi t}{1-e^{-2\sin 2\pi t\sin\pi t}}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{-2\sin 2\pi t\sin\pi t}=$$

$$=4\cdot 1\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin 2\pi t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\pi t}=2\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{\pi^2}$.

1.1.3. *Сравнение бесконечно малых*

Рассмотрим функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, для которых

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0,$$

то есть бесконечно малые в окрестности x_0.

1. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad |A|<\infty,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми **одного порядка**. В частности, если A=1, говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – **эквивалентные** бесконечно малые.

2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка** по сравнению с $\beta(x)$.

3. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A,\quad |A|<\infty,$$

то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая порядка n по сравнению с $\beta(x)$.

Обозначения: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ – бесконечно малые одного порядка, $\alpha(x)\sim\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые, $\alpha(x)=o(\beta(x))$ – α есть бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

Замечание 1.
Используя 1-й и 2-й замечательные пределы и их следствия, можно указать бесконечно малые функции при $x\to 0$, эквивалентные x:

$\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln(1+x)$, e^x-1.

Замечание 2.
При раскрытии неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, то есть предела отношения двух бесконечно малых, можно каждую из них заменять на эквивалентную – эта операция не влияет на существование и величину предела.
Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1-arctg(5\sin x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{-arctg(5\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-5\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-5x}=-\frac{3}{5}.$$

Бесконечно большие функции

Функция f(x) называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty.$$

Для бесконечно больших можно ввести такую же систему классификации, как и для бесконечно малых, а именно:

1. Бесконечно большие *f*(*x*) и *g*(*x*) считаются величинами одного порядка, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A,\quad |A|<\infty.$$

2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty,$$

то *f*(*x*) считается бесконечно большой более высокого порядка, чем *g*(*x*).

3. Бесконечно большая *f*(*x*) называется величиной *k*-го порядка относительно бесконечно большой *g*(*x*), если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=A,\quad |A|<\infty.$$

Замечание.

Отметим, что a^x – бесконечно большая (при $a>1$ и $x\to\infty$) более высокого порядка, чем x^k для любого *k*, а $\log_a x$ – бесконечно большая низшего порядка, чем любая степень x^k.

Теорема.

$$\textit{Если}\quad \alpha(x)\quad - \quad \textit{бесконечно малая при } x\to x_0,$$

$$\textit{то}\ \frac{1}{\alpha(x)}\quad - \quad \textit{бесконечно большая при } x\to x_0.$$

Доказательство.

Докажем, что

$$\forall M>0\quad \exists\delta(M):|\frac{1}{\alpha}|>M\quad \textit{при}\quad |x-x_0|<\delta.$$

Для этого достаточно выбрать в качестве ε $1/M$. Тогда

$$\textit{при}\quad |x-x_0|<\delta\quad |\alpha(x)|<\frac{1}{M},$$

следовательно,

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right|>M.\quad \textit{Значит,}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\alpha(x)}=\infty,$$

то есть $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Сравнение бесконечно малых*»

Задача 1.

Определить порядок малости относительно *x* функции

$$\frac{5x^7}{x^2+1}\quad \textit{при}\quad x\to 0.$$

Указание

Представьте функцию в виде произведения двух множителей, один из которых – бесконечно малая при $x \to 0$, а второй имеет в точке $x = 0$ конечный предел.

Решение

$$\frac{5x^7}{x^2+1} = x^7 \cdot \frac{5}{x^2+1} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5x^7}{x^2+1}}{x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{x^7}{x^7} \cdot \frac{5}{x^2+1} = 1 \cdot 5 = 5.$$

Следовательно, данная функция – бесконечно малая одного порядка с x^7.

Ответ: 7.

Задача 2.

Определить порядок малости относительно x функции

$$\ln\left(1+\sqrt{x\sin x}\right) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Указание

Воспользуйтесь таблицей эквивалентных бесконечно малых.

Решение

$$\text{При} \quad x \to 0 \quad \sin x \sim x \Rightarrow \sqrt{x\sin x} \sim \sqrt{x^2} = x;$$

$$\ln\left(1+\sqrt{x\sin x}\right) \sim \ln(1+x) \sim x.$$

Следовательно, данная бесконечно малая эквивалентна x, то есть имеет порядок, равный 1.

Ответ: 1.

Задача 3.

Вычислить предел, воспользовавшись таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}.$$

Указание

Используйте соотношения эквивалентности:

$$\text{При} \quad x \to 0 \quad \sin x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x.$$

Решение

Воспользуемся соотношениями эквивалентности:

$$\text{При} \quad x \to 0 \quad \sin x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 4.
Вычислить предел, воспользовавшись таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$$\lim_{x\to 0}\ 1-\ln(1+x^3)\ ^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}.$$

Указание

Используйте соотношения эквивалентности:

$$\text{\textit{При}}\quad x\to 0\quad \arcsin x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x.$$

Решение

Воспользуемся соотношениями эквивалентности:

$$\text{\textit{При}}\quad x\to 0\quad \arcsin x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ 1-\ln(1+x^3)\ ^{\frac{3}{x^2\arcsin x}}=\lim_{x\to 0}\ 1-x^3\ ^{-\frac{1}{x^3}\cdot(-3)}=e^{-3}.$$

Задача 5.
Вычислить предел, воспользовавшись таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{tg3x-2arctgx}.$$

Указание

Используйте соотношения эквивалентности:

$$\text{\textit{При}}\quad x\to 0\quad \mathrm{arc}\,tgx\sim x,\quad tgx\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a.$$

Решение

Воспользуемся соотношениями эквивалентности:

$$\text{\textit{При}}\quad x\to 0\quad \mathrm{arc}\,tgx\sim x,\quad tgx\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^{2x}-7^{-2x}}{tg3x-2arctgx}=\lim_{x\to 0}\frac{(6^{2x}-1)-(7^{-2x}-1)}{3x-2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln 6-(-2x)\ln 7}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\ln 6+\ln 7)}{x}=2\ln 42.$$

Ответ: $2\ln 42$.

Задача 6.

Даны неограниченные функции при $x\to+\infty$:

1) $xarctgx$

2) $2^x\arcsin(\sin x)$

3) $(2+\sin x)\lg x$

4) $(1+\sin x)\lg x$

Определите, какие из них являются бесконечно большими.

Указание

Используйте связь бесконечно малых и бесконечно больших функций: если $f(x)$ – бесконечно малая при $x\to a,$ то $\frac{1}{f(x)}$ при этом – бесконечно большая, и определение бесконечно большой функции:

$$\textit{если}\quad \forall M>0\quad \exists\, x_0(M):|\,f(x)|>M\quad \textit{при}\quad x>x_0,$$
$$\textit{то}\quad f(x)-\textit{б.б.}\quad \textit{при}\quad x\to+\infty.$$

Решение

1) $\dfrac{1}{f(x)}=xarctgx\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{xarctgx}.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xarctgx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{arctgx}=0\cdot\frac{2}{\pi}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-\textit{б.м. при } x\to+\infty\Rightarrow\frac{1}{f(x)}-\textit{б.б. при } x\to+\infty.$$

2) $\textit{при}\quad x=\pi n\,(n\in Z)\quad \arcsin(\sin x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall\, x_0\quad \exists x>x_0:2^x\arcsin(\sin x)=0,$

что противоречит определению бесконечно большой функции.

3) $\dfrac{1}{f(x)}=(2+\sin x)\lg x\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{(2+\sin x)\lg x}.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lg x}=0\Rightarrow\frac{1}{\lg x}-\textit{б.б.}\quad \textit{при}\quad x\to+\infty;$$

$$-1\le\sin x\le 1\Rightarrow 1\le 2+\sin x\le 3\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2+\sin x}\quad-\quad\textit{ограниченная}\quad\textit{при}\quad x\to+\infty.$$

Как известно, произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая, следовательно, $f(x)$ – бесконечно большая.

4) $при \quad x = -\frac{\pi}{2} + \pi n \, (n \in Z) \quad 1 + \sin x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \, x_0 \quad \exists x > x_0 : (1 + \sin x) \lg x = 0,$

что противоречит определению бесконечно большой функции.

Ответ: 1,3.

1.1.4. *Непрерывность функции*

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Замечание.

Из этого определения следует, во-первых, что функция определена при $x = x_0$, и во-вторых, что при $x \to x_0$ существует конечный предел функции.

Свойства непрерывных функций

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)+g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$.
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$.
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)/g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$.
4. Если $u=\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$, а $f(u)$ непрерывна при $u = u(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

Доказательства всех перечисленных свойств непосредственно следуют из соответствующих свойств пределов.

Точки разрыва и их классификация

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой этой точки. Тогда x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если она либо не определена при $x = x_0$, либо не является непрерывной в точке x_0.

Если существует конечный предел $f(x)$ при $x \to x_0$, но не равный $f(x_0)$, точка разрыва x_0 называется **устранимой особенностью**.

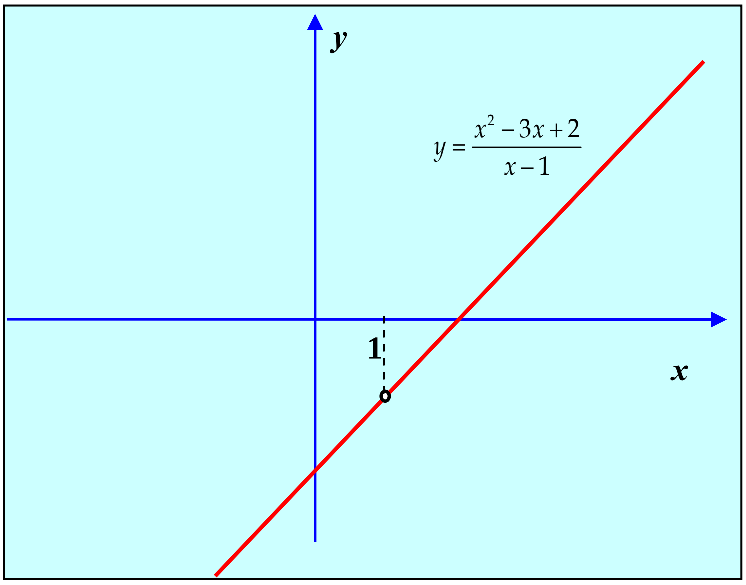
Термин «устранимая особенность» связан с тем, что, доопределив функцию в точке разрыва значением ее предела в этой точке, мы сделаем ее непрерывной при $x = x_0$, то есть устраним разрыв в рассматриваемой точке.

Если существуют конечные односторонние пределы $f(x)$ при $x \to x_0$, точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**.

Все остальные точки разрыва называются **точками разрыва 2-го рода**.

Примеры.

1. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

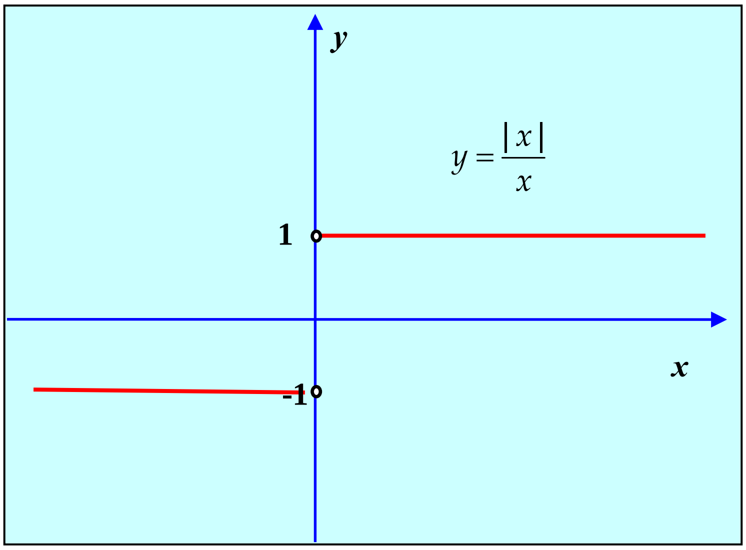


Функция не определена при $x = 1$, а для остальных значений аргумента может быть представлена как $y = x - 2$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=1-2=-1,$$

то есть $x = 1$ – устранимая особенность.

2. $y=\dfrac{|x|}{x}$.

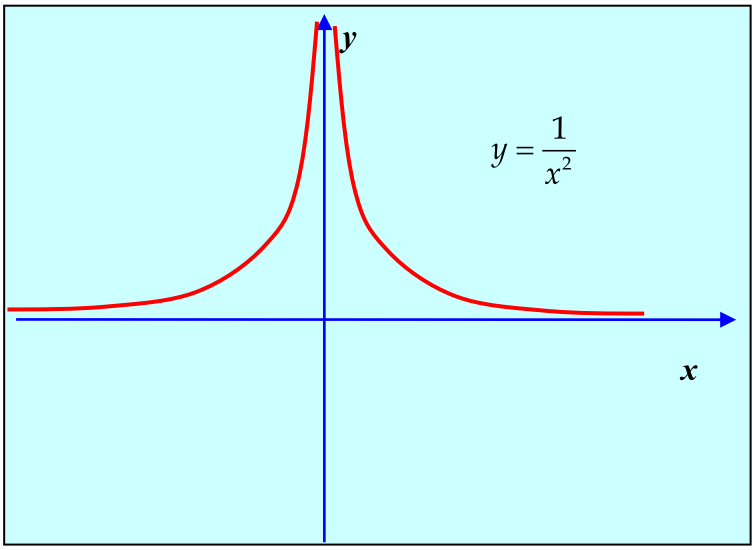


Из определения модуля следует, что $y = 1$ при $x > 0$, $y = -1$ при $x < 0$, а при $x = 0$ функция не определена. При этом

$$\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x}=1,\quad \lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x}=-1.$$

Следовательно, $x = 0$ –точка разрыва 1-го рода.

3. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

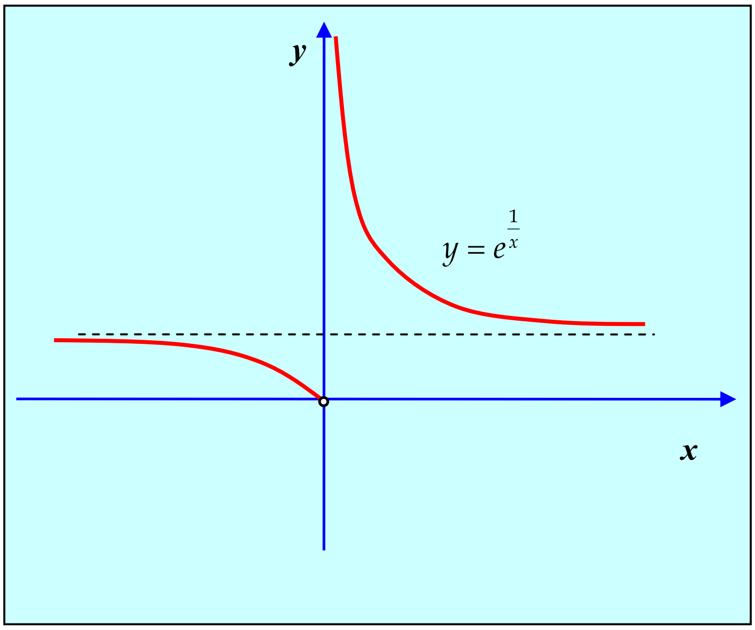


Функция не определена при $x = 0$, и

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Поэтому $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

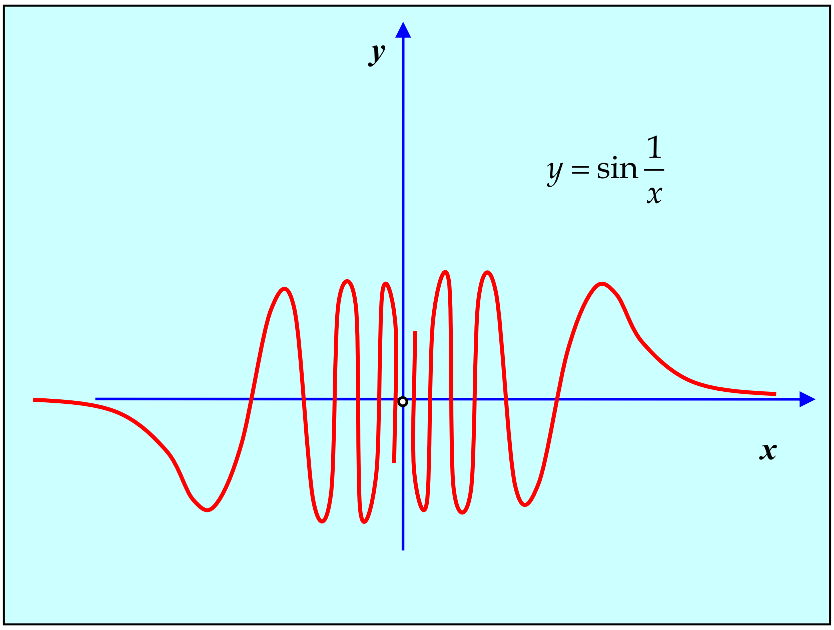
4. $y = e^{\frac{1}{x}}$.



$$\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

то есть правосторонний предел не является конечным. Значит, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

5. $y = \sin\dfrac{1}{x}$.



Функция не определена при $x = 0$ и не имеет предела при $x \to 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке [*ab*],** если она непрерывна в каждой точке этого отрезка (при этом $f(a)$ и $f(b)$ равны соответствующим односторонним пределам).

Теорема 1. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[ab]$, ограничена на нем.
Доказательство.
По 1-му свойству предела существует окрестность точки $x = a$, в которой $f(x)$ ограничена, то есть существуют числа m_0 и M_0: $m_0<f(x)<M_0$ в рассматриваемой окрестности. Выберем точку в правой части этой окрестности и рассмотрим окрестность этой точки, в которой $f(x)$ тоже ограничена. Продолжим эту процедуру до тех пор, пока весь отрезок $[ab]$ не будет покрыт системой из n окрестностей, причем для каждой i-й окрестности $m_i<f(x)<M_i$. Следовательно, для любого x, принадлежащего отрезку $[ab]$, верно неравенство: $m<f(x)<M$, где $m=\min(m_i)$, $M=\max(M_i)$. Значит, $f(x)$ ограничена на $[ab]$.
Замечание. Для доказательства следующего свойства функции, непрерывной на отрезке, введем понятие точной верхней и нижней грани числового множества.

Если множество X ограничено сверху, то наименьшее из чисел, ограничивающих его сверху, называется его **верхней гранью** . **Нижней гранью** называется наибольшее из чисел, ограничивающих множество снизу.

Обозначения: $B=\sup X$ – верхняя грань, $A=\inf X$ – нижняя грань.

Замечание 1. Можно дать другое определение верхней и нижней грани, эквивалентное предыдущему: число B называется верхней гранью числового множества X, если:
1) $x \le B \quad \forall x \in X;$
2) $\forall B_1 < B \quad \exists x \in X : x > B_1.$

Аналогично число A называется нижней гранью числового множества X, если:
1) $x \ge A \quad \forall x \in X;$
2) $\forall A_1 > A \quad \exists x \in X : x < A_1.$

Замечание 2. Можно доказать, что всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.

Следовательно, верхняя и нижняя грань существует для значений функции, ограниченной на отрезке.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[ab]$, то она достигает на нем своей верхней и нижней грани.
Доказательство.
Ограниченность $f(x)$ на $[ab]$ следует из теоремы 16.1. Пусть $M=\sup f(x)$. Предположим, что $f(x)<M$ на $[ab]$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}..$$

По выдвинутому предположению знаменатель дроби в 0 не обращается, следовательно, $g(x)$ непрерывна на $[ab]$ и поэтому ограничена (теорема 1): $g(x)\leq\mu$, $\mu>0$. Но из этого следует, что

$$f(x)\leq M-\frac{1}{\mu},$$

то есть число $M-\frac{1}{\mu}$, меньшее M, оказывается верхней гранью $f(x)$, что противоречит выбору M. Значит, на $[ab]$ найдется значение x_0 такое, что $f(x_0)=M$. Аналогичным образом можно доказать и то, что $f(x)$ достигает на $[ab]$ своей нижней грани.
Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется $x_0\in[ab]$: $f(x_0)=C$.
Доказательство.
Пусть для определенности $A<C<B$. Найдем середину отрезка $[ab]$: $\underline{x}=(a+b)/2$. Если при этом $f(\underline{x})=C$, то искомое значение x_0 найдено. В противном случае выберем ту половину отрезка, на концах которой значения $f(x)$ лежат по разные стороны C, и обозначим ее концы a_1 и b_1. Будем продолжать эту процедуру (деления отрезка пополам и выбора соответствующей половины). Тогда либо через конечное число шагов значение функции в середине очередного отрезка станет равно C, либо мы получим две последовательности ($\{a_n\}$- начальных точек выбранных отрезков и $\{b_n\}$- их конечных точек), имеющие своими пределами одну и ту же общую для всех отрезков точку x_0. Тогда в силу непрерывности $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(x_0).$$

Но, поскольку отрезки выбирались так, что $f(a_n)<C<f(b_n)$, получим, что

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leq C\leq\lim_{n\to\infty}f(b_n),$$

то есть $f(x_0)\leq C\leq f(x_0)$, или $C=f(x_0)$.
Следствие.
Если функция непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой значение функции равно нулю.

Непрерывность обратной функции

Лемма. Если функция $f(x)$ строго возрастает на $[ab]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то существует обратная функция $f^{-1}(x)$, строго возрастающая на $[AB]$.
Доказательство.
Докажем существование обратной функции, то есть ее однозначность. Действительно, если существует $y=f(x_1)=f(x_2)$, то это противоречит условию монотонности $f(x)$: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, а если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.
Докажем возрастание f^{-1} на $[AB]$. Пусть $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Тогда, если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = =f(x_2)$; если $x_1 > x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Оба эти случая противоречат выбору y_1 и y_2. Значит, $x_1 < x_2$, то есть $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. Лемма доказана.
Теорема 4. Если функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна на $[ab]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то множеством значений $f(x)$ является отрезок $[AB]$, и обратная функция $f^{-1}(x)$ является непрерывной и строго возрастающей на $[AB]$.
Доказательство.
Неравенство $A = f(a) < f(x) < f(b) = B$ для $a < x < b$ следует из возрастания $f(x)$. С другой стороны, любое значение из интервала (AB) будет достигаться при некотором x из интервала (ab) по теореме 3. Возрастание обратной функции следует из леммы. Остается доказать непрерывность f^{-1}. Если допустить, что на (AB) существует точка разрыва, то из условия $a \le f^{-1} \le b$ следует, что может наблюдаться только разрыв 1-го рода. Но, если односторонние пределы в точке такого разрыва не равны между собой, то обратная функция не может принимать значений, лежащих между односторонними пределами (так как функция монотонна, и левосторонний предел может быть только меньше правостороннего), а это противоречит доказанному утверждению, что обратная функция принимает **все** значения из интервала $[AB]$. Значит, f^{-1} непрерывна на $[AB]$. Теорема доказана.

Непрерывность элементарных функций

1. Так как функции $y=C$ и $y=x$ непрерывны, то из свойств непрерывных функций следует непрерывность любого многочлена и непрерывность дробно-рациональной функции при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в 0.
2. Для доказательства непрерывности показательной функции воспользуемся тем, что

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 = a^0,$$

то есть a^x непрерывна при x=0. Но

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1, \quad \text{то} \quad \text{есть} \quad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},$$

и показательная функция непрерывна при всех значениях аргумента. Отсюда следует непрерывность гиперболических функций.

3. Непрерывность логарифмической функции на любом конечном отрезке следует из теоремы 4, так как логарифмическая функция является обратной к показательной.

4. Докажем непрерывность функции $y=\sin x$. $\sin x < x$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда

$|\sin x| < |x|$ для любого x. Отсюда

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\cdot|\cos\frac{x+x_0}{2}| \le |x-x_0|,$$

что доказывает непрерывность функции при выборе $\varepsilon = \delta = |x - x_0|$.

Из непрерывности функции $y = \sin x$, в свою очередь, следует непрерывность остальных тригонометрических функций:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

и т.д. и непрерывность обратных тригонометрических функций.

Следовательно, все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Непрерывность функции*»

Задача 1.

При каком значении числа a функция

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \ge 5, \\ x^2 - 3x, & x < 5 \end{cases}$$

будет непрерывной?

Указание

Функция может иметь разрыв только в точке $x = 5$, поэтому a следует выбрать так, чтобы в этой точке выполнялось равенство

$$x + a = x^2 - 3x.$$

Решение

Областью определения функции является все множество действительных чисел, причем по обе стороны точки $x = 5$ функция является элементарной, то есть непрерывной. Для обеспечения непрерывности в точке $x = 5$ поставим условие

$$5 + a = 25 - 15 \Rightarrow a = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 2.

Каким числом можно доопределить функцию

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$$

при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Указание

Подобная операция возможна в том случае, если точка разрыва является устранимой особенностью, то есть существует конечный предел функции в этой точке.

Решение

Найдем предел данной функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3.$$

Следовательно, если принять $f(0) = 3$, функция станет непрерывной точке $x = 0$.

Ответ: 3.

Задача 3.

Каким числом можно доопределить функцию

$$f(x) = x \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Указание

Вычисляя предел функции в точке $x = 0$, воспользуйтесь тем, что второй множитель – ограниченная функция, и примените свойства бесконечно малых.

Решение

При $x \to 0 \quad \lim_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow x - б.м.,$

$$\left| \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right| \le 1 \Rightarrow \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \quad -$$

ограниченная функция. Как известно, произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right) = 0,$$

то есть предел существует и конечен. Поэтому можно доопределить функцию так: $f(0) = 0$.

Ответ: $f(0) = 0$.

Задача 4.

Каким числом можно доопределить функцию

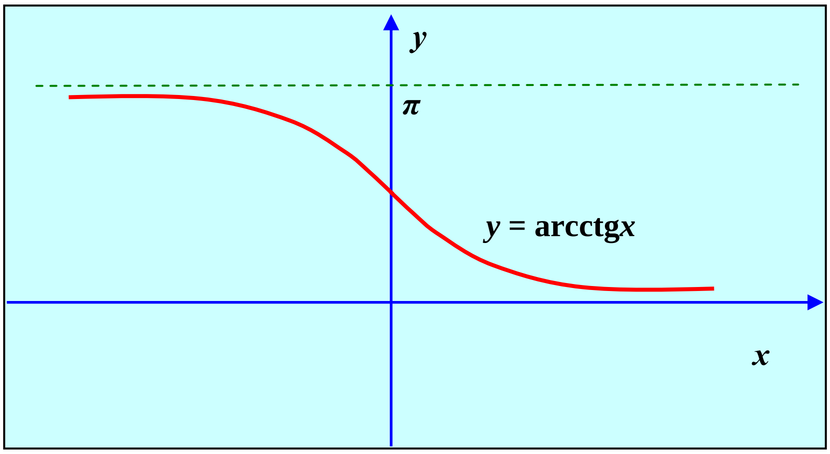
$$f(x) = arcctg\frac{3}{x}$$

при $x = 0$, чтобы она стала непрерывной в этой точке?

Указание

Подобная операция возможна в том случае, если точка разрыва является устранимой особенностью, то есть существует конечный предел функции в этой точке.

Решение



Найдем односторонние пределы данной функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to -0} arcctg\frac{3}{x} = \lim_{t\to -\infty} arcctgt = \pi \quad \left(t = \frac{3}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to +0} arcctg\frac{3}{x} = \lim_{t\to +\infty} arcctgt = 0 \neq \lim_{x\to -0} arcctg\frac{3}{x}.$$

Следовательно, предел данной функции в точке $x = 0$ в обычном смысле не существует, поэтому добиться ее непрерывности в этой точке невозможно.

Ответ: это невозможно.

Задача 5.

Найти количество точек разрыва функции

$$y = \frac{2x-3}{\log_2|x|}.$$

Исследовать характер этих точек.

Указание

На область определения накладываются два ограничения: логарифмируемое выражение должно быть положительным, а знаменатель дроби – не равным нулю.

Решение

Данная функция не существует при трех значениях аргумента: $x = 0$ и $x = \pm 1$ (в первом случае знаменатель не существует, во втором он равен нулю). Каждая из найденных точек является внутренней точкой области определения и, следовательно, точкой разрыва.
Исследуем характер точек разрыва:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{\log_2|x|} = \lim\limits_{x\to 0}(2x-3)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2|x|} = -3\cdot 0 = 0.$

Следовательно, $x = 0$ – устранимая особенность.

2) *При* $x \to \pm 1 \quad |x| \to 1 \Rightarrow \log_2|x| \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2|x|} \Rightarrow \infty.$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{2x-3}{\log_2|x|} = \infty,$$

и $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода.

Ответ: $x = 0$ – устранимая особенность, $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода.

Задача 6.

Выяснить, какие из функций

1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{|2x+1|}{2x+1}$

имеют точки разрыва 1-го рода.

Указание

В точке разрыва 1-го рода существуют конечные односторонние пределы функции, но они не равны между собой.

Решение

Найдем точки разрыва каждой функции и исследуем их характер.
1) Функция

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

не определена при $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty,$$

следовательно, единственная точка разрыва этой функции – это точка разрыва 2-го рода.

2) Функция

$$f(x)=\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}$$

не определена при $x = 0$ (заметим, что знаменатель основной дроби не равен нулю ни при каком значении x).
Найдем односторонние пределы $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to-0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{-\infty}}=\frac{5}{1-0}=5;$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{5}{1-3^{\frac{1}{x}}}=\frac{5}{1-3^{+\infty}}=\frac{5}{-\infty}=0\neq 5.$$

Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 1-го рода.
3) Функция

$$f(x)=\frac{1}{(x-5)^2}$$

не определена при $x = 5$.

$$\lim_{x\to5}\frac{1}{(x-5)^2}=\infty,$$

следовательно, точка $x = 5$ – точка разрыва 2-го рода.
4) Функция

$$f(x)=\frac{|2x+1|}{2x+1}$$

не определена при $x = -0{,}5$. При этом

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{2x+1}=1, & x>-0{,}5;\\ -\dfrac{2x+1}{2x+1}=-1, & x<-0{,}5.\end{cases}$$

Таким образом, односторонние пределы в точке $x = -0{,}5$ равны соответственно 1 и -1, то есть эта точка – точка разрыва 1-го рода.
Ответ: 2,4.

1.2. ПРОИЗВОДНЫЕ

1.2.1. *Производная и дифференциал*

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную в окрестности точки x_0.
Если существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то он называется **производной** функции f в точке x_0.
Обозначение:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Разность

$$\Delta x = x - x_0$$

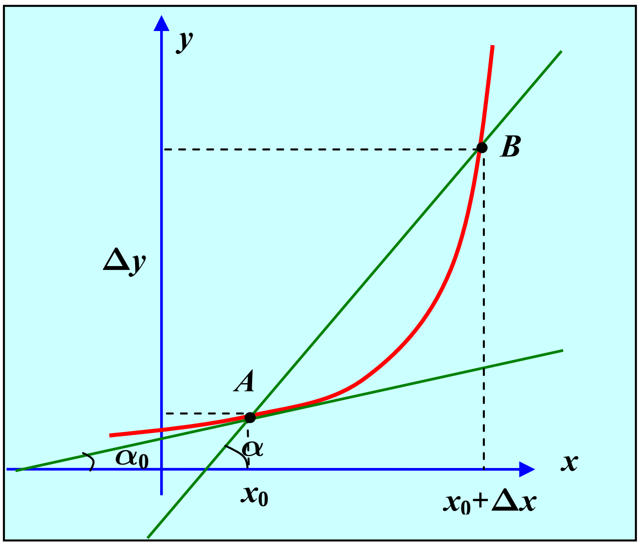
называется **приращением аргумента**, а

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) -$$

приращением функции. Таким образом, можно определить производную как

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной



Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и проведем секущую через точки A с абсциссой x_0 и B с абсциссой $x_0+\Delta x$. Если обозначить разность ординат этих точек Δy, то тангенс угла α, образованного секущей с осью Ox, можно представить так:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0,$ точка B перемещается по кривой, приближаясь к точке A, и секущая при совпадении точек B и A превращается в касательную к графику функции, образующую с осью Ox угол α_0. При этом

$$tg\alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, **значение производной при данном значении *x* равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением *x* с положительным направлением оси *Ox*.**

Механический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение тела, для которого пройденное расстояние есть функция от времени: $s=f(t)$. Среднюю скорость за время Δt можно определить по формуле:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Для определения мгновенной скорости тела в данный момент времени устремим Δt к нулю. Получим:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} = s'(t_0).$$

Таким образом, производная от расстояния в данный момент времени равна мгновенной скорости движения в этот момент. Соответственно **производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом *x*.**

Уравнение касательной к графику функции

Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ при $x = x_0$. Эта прямая должна проходить через точку с координатами (x_0, y_0), лежащую на графике функции, где $y_0 = f(x_0)$, и иметь угловой коэффициент, равный производной $f(x)$ при $x = x_0$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом, получим: $y = f`(x_0)x + b$, причем $y_0 = f`(x_0)x_0 + b$, то есть $b = y_0 - f`(x_0)x_0$. Тогда уравнение касательной можно записать в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или}$$
$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Дифференцируемость функции

Определение. Если приращение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где A = const, то $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** при $x = x_0$, а $A\Delta x$ называется **главной линейной частью** приращения или **дифференциалом** функции.

Обозначение: $dy = A\Delta x$.

Замечание. Так как при $y = x$ получаем $dx = 1\cdot\Delta x$, можно обозначать $\Delta x = dx$.

Теорема 1. Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.

Доказательство.

1) Если для $y=f(x)$ существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{то} \quad f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x - \beta(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ дифференцируема при $x = x_0$, причем $A = f`(x_0)$.

2) Пусть $y=f(x)$ дифференцируема при $x=x_0$, то есть ее приращение имеет вид

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}) = A = f'(x_0)..$$

Таким образом, $f(x)$ имеет производную в точке x_0, равную A.

Следствие. Дифференциал функции можно представить в виде

$$dy = f'(x_0)dx,$$

а производную – в виде

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Теорема 2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Из формулы

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

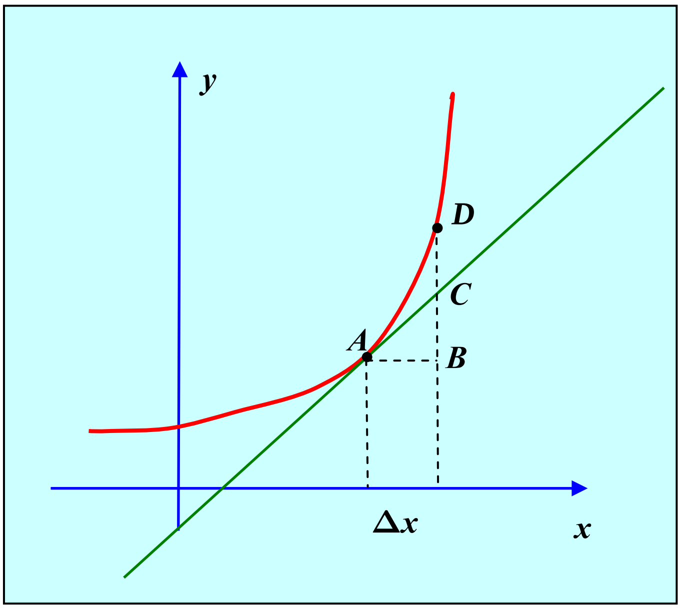
следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

что и означает непрерывность $f(x)$ при $x = x_0$.

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Например, $y = |x|$ непрерывна при $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала



Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и проведем касательную к нему при $x=x_0$. Тогда при приращении аргумента Δx приращение функции Δy равно длине отрезка BD, а приращение ординаты касательной

$$f'(x_0)\Delta x = dy$$

равно длине отрезка CD. Следовательно, **дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.**

Линеаризация функции

Так как истинное значение приращения функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, при приближенных вычислениях можно заменять Δy на dy, то есть считать, что

$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

При этом функция $f(x)$ для значений x, близких к x_0, приближенно заменяется линейной функцией. Эта операция называется **линеаризацией** функции.

Пример.

Найдем приближенное значение $\sqrt{1{,}02}$. Пусть

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}02.$$

Тогда

$$f(1+0{,}02) \approx f(1) + f'(1)\cdot 0{,}02 =$$

$$= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot 0{,}02 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Производная и дифференциал*»

Задача 1.
Найти приращение функции

$$y = 2x^2 - 5$$

в точке x_0 = -3, если приращение независимой переменной Δx = 0,3.

Указание

Найдите разность значений y (-3+0,3) и y (-3).

Решение

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x) = y(-3 + 0,3) - y(-3) =$$

$$= y(-2,7) - y(-3) = \ 2 \cdot (-2,7)^2 - 5 \ - \ 2 \cdot (-3)^2 - 5 \ =$$

$$= 2 \ \ 2,7^2 - 3^2 \ \ = 2(7,29 - 9) = -3,42.$$

Ответ: -3,42.

Задача 2.

Найти приращение независимой переменной Δx, для которого приращение функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

в точке x_0 = 4 равно $\frac{1}{18}$.

Указание

Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}.$$

Решение

По определению приращения функции

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x}} - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, Δx можно найти из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x}} = \frac{5}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + \Delta x = \frac{81}{25} = 3,24 \Rightarrow \Delta x = 3,24 - 4 = -0,76.$$

Ответ: -0,76.

Задача 3.
Вычислить значение производной функции
$$y = x^2 + 3x + 5$$
в точке x_0 = -1.

Указание

По определению производной
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Решение

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1+\Delta x)^2 + 3(-1+\Delta x) + 5 - (1-3+5)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(1+\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(1+\Delta x) = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 4.
Найти угловой коэффициент касательной к графику функции
$$y = 2\sin 3x - 1 \quad \textit{в} \quad \textit{точке} \quad x_0 = \frac{\pi}{9}.$$

Указание

Угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной функции в точке касания.

Решение

Найдем производную данной функции в точке касания:
$$y'\left(\frac{\pi}{9}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3\Delta x\right) - 1 - 2\sin\frac{\pi}{3} + 1}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 3\Delta x - \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 3\Delta x + \frac{\pi}{3}}{2}}{\Delta x} =$$
$$= 4\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\Delta x\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}\Delta x\right) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной к графику функции при $x_0 = \frac{\pi}{9}$ равен 3.

Ответ: 3.

Задача 5.
Составить уравнение касательной к графику функции

$$y = \sqrt{2x+3}$$

в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Указание

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Решение

$$f(3) = \sqrt{2\cdot 3+3} = 3;$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{2(3+\Delta x)+3} - \sqrt{2\cdot 3+3}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{2(3+\Delta x)+3} - \sqrt{2\cdot 3+3})(\sqrt{2(3+\Delta x)+3} + \sqrt{2\cdot 3+3})}{\Delta x(\sqrt{2(3+\Delta x)+3} + \sqrt{2\cdot 3+3})} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2(3+\Delta x)+3} + \sqrt{2\cdot 3+3})} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид:

$$y = 3 + \frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow x - 3y + 6 = 0.$$

Ответ: $x - 3y + 6 = 0$.

Задача 6.
Найти угол, под которым пересекаются кривые

$$y = \frac{1}{x} \quad и \quad y = \sqrt{x}.$$

Указание

Угол между кривыми в точке их пересечения определяется как угол между касательными к ним, проведенными в этой точке.

Решение

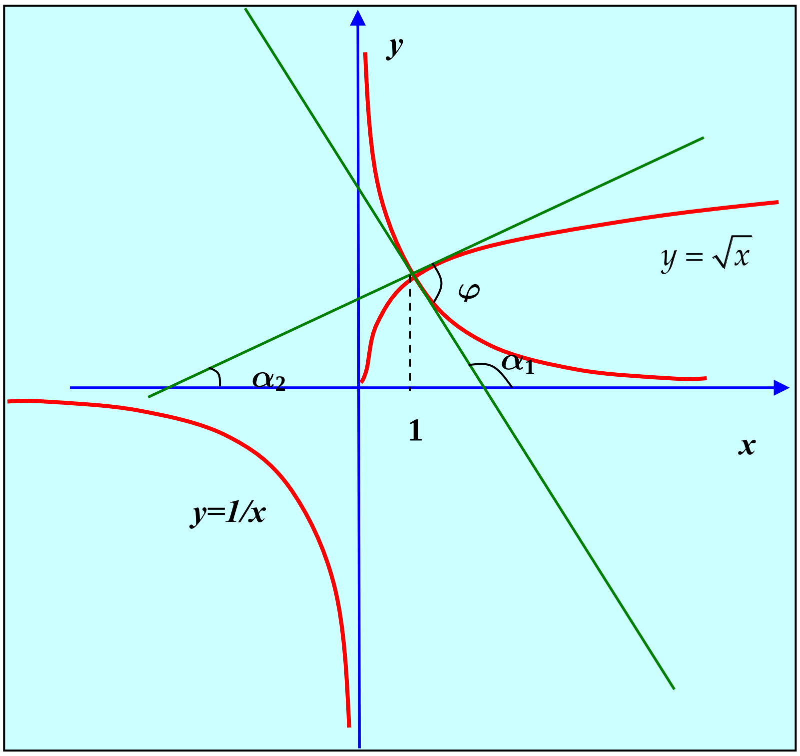
Найдем абсциссу точки пересечения кривых:

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Вычислим их производные при $x = 1$:

1) $$\left(\frac{1}{x}\right)'_{x=1} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)} = -1;$$

2) $$\sqrt{x}\ '_{x=1} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \frac{1}{2}.$$



Если α_1 и α_2 – углы, образованные касательными к графикам данных функций при $x = 1$ с осью Ox, то тангенс угла φ между касательными (и соответственно между кривыми) можно найти по формуле тангенса разности:

$$tg\varphi = \left|\frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}\right| = \left|\frac{-1-\dfrac{1}{2}}{1-1\cdot\dfrac{1}{2}}\right| = \left|\frac{-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{2}}\right| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = arctg3.$$

Ответ: arctg 3.

1.2.2. *Свойства производной. Таблица производных*

Правила дифференцирования

Пусть при рассматриваемых значениях x существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть эти функции являются дифференцируемыми при данных значениях аргумента. Сформулируем и докажем некоторые свойства производных.

1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$

Доказательство.

$$(f(x)+g(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f+g+\Delta g)-(f+g)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=f'+g'.$$

2) $(kf(x))'=kf'(x),\quad где\quad k=const.$

Доказательство.

$$(kf(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(kf+\Delta kf)-kf}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta kf}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta f}{\Delta x}=kf'(x).$$

3) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$

Доказательство.

$$(f(x)\cdot g(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\Delta f+f\Delta g+\Delta f\Delta g}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}g+f\frac{\Delta g}{\Delta x}+\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g\right)=f'g+fg'+f'\cdot 0,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g=0$ в силу непрерывности *g(x)*.

4) $Если\quad g(x)\neq 0, то\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

Доказательство.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}-\frac{f}{g}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg+g\Delta f-f\Delta g-fg)}{\Delta x\cdot g(g+\Delta g)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g+\Delta g)}=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Производная сложной функции

Если функция $u=\varphi(x)$ имеет при некотором значении x производную $u_x'=\varphi'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y_u'=f'(u)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ тоже имеет при данном значении x производную, равную

$$y'(x)=f'(u)\cdot u'(x).$$

Доказательство.

Так как

$$\lim_{\Delta u\to o}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'(u),$$

то по третьему определению предела можно представить

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u) + \alpha, \quad где \quad \alpha \to 0 \quad при \quad \Delta u \to 0.$$

Тогда

$$\Delta y = y'(u)\Delta u + \alpha\Delta u.$$

Разделив обе части равенства на Δx, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0,$ получаем:

$$y'(x) = f'(u)u'(x),$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$

Производная обратной функции

Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=\varphi(y)$, которая в некоторой точке y имеет производную $\varphi'(y)\neq 0$, то в соответствующей точке x функция $f(x)$ тоже имеет производную, причем

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Так как $\varphi(y)$ непрерывна,

$$\Delta x \to 0 \quad при \quad \Delta y \to 0,$$

и при переходе к пределу при $\Delta y \to 0$ получаем:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Инвариантность формы дифференциала

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, то есть $y=f(\varphi(x))$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x),$$

следовательно,

$$dy = f'(u)\varphi'(x)dx.$$

Но

$$\varphi'(x)dx = du, \quad поэтому \quad dy = f'(u)du.$$

Таким образом, **форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого**

аргумента. Это свойство называется свойством неизменности, или **инвариантности**, дифференциала.

Производные основных элементарных функций

Используя полученные формулы и свойства производных, найдем производные основных элементарных функций.

1. Если $f(x)=C=\text{const}$, то $\Delta C=0$, поэтому $C'=0$.
2. $y=x^n$, где n – натуральное число. Тогда по формуле бинома Ньютона можно представить

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n =$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x).$$

Следовательно, $y' = nx^{n-1}$.

3. $y = \sin x$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$$
$$= 2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x = \cos x.$$

4. $y = \cos x$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} =$$
$$= -\lim_{\Delta x\to 0}2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\sin(x+\Delta x) = -2\cdot\frac{1}{2}\sin x = -\sin x.$$

5. $y = \text{tg}\, x$,

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. Аналогично можно получить формулу

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. $(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a$

(см. 2-е следствие из второго замечательного предела).

8. $(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$

(см. 1-е следствие из второго замечательного предела).

9. $$sh x' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch x.$$

Таким же образом можно найти производные остальных гиперболических функций.

10. По формуле производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(arcctgx)' = (\frac{\pi}{2} - arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

11. Если α – произвольное действительное число, то

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

В результате получена **таблица основных производных**:

№	*f(x)*	*f′(x)*	№	*f(x)*	*f′(x)*
1	C	0	9	ctg$x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	10	sh$x$	ch$x$
3	a^x	$a^x \ln a$	11	ch$x$	sh$x$
4	e^x	e^x	12	th$x$	$\frac{1}{ch^2 x}$
5	ln$x$	$\frac{1}{x}$	13	cth$x$	$\frac{1}{sh^2 x}$
6	sin$x$	cos$x$	14	arcsin$x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	cos$x$	-sin$x$	15	arccos$x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	tg$x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	16	arctg$x$	$\frac{1}{1+x^2}$
			17	arcctg$x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Логарифмическое дифференцирование

Иногда полезно использовать так называемую формулу логарифмического дифференцирования. Пусть *f(x)*>0 на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),$$

откуда

$$\boxed{f'(x) = f(x)\ \ \ln f(x)\ \ '.}$$

Эту формулу удобно использовать в тех случаях, когда производную натурального логарифма данной функции найти проще, чем производную самой функции.

Примеры.

1. $(x^x)' = x^x(\ln x^x)' = x^x(x\ln x)' =$

$= x^x(\ln x + x\dfrac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$

2. $\left(\dfrac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\right)' = \dfrac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\ \ 7\ln(2x+5\ \ +\dfrac{1}{5}\ln(3x-7) -$

$-8\ln(4x-1) - 7\ln\sin x)' =$

$= \dfrac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(\dfrac{14}{2x+5} + \dfrac{3}{5(3x-7)} - \dfrac{32}{4x-1} - 7ctgx\right).$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция $y = f(x)$ задана в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)' \end{cases}$$

причем функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, то $y = \psi(\Phi(x))$, и

$$y'(x) = \psi'(t)\Phi'(x) = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости y от x.

Пример.

$x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t - \sin t)$ – параметрические уравнения кривой, называемой циклоидой. Найдем $y'(x)$:

$$x'(t) = a\sin t, \quad y'(t) = a(1-\cos t),$$
$$y'(x) = \frac{a(1-\cos t)}{a\sin t} = \frac{1-\cos t}{\sin t}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Свойства производной. Таблица производных*»

Задача 1.
Вычислить производную функции
$$y = 3\sin x - 2\ln x.$$

Указание

Примените таблицу основных производных и формулу производной линейной комбинации функций.

Решение

$$y' = 3(\sin x)' - 2(\ln x)' = 3\cos x - \frac{2}{x}.$$

Ответ: $3\cos x - \frac{2}{x}.$

Задача 2.
Вычислить производную функции
$$y = \sqrt[5]{x}\cdot tgx.$$

Указание

Примените таблицу основных производных и формулу производной произведения функций.

Решение

$$y' = (\sqrt[5]{x})'\cdot tgx + \sqrt[5]{x}\cdot(tgx)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)'\cdot tgx + \sqrt[5]{x}\cdot(tgx)' =$$
$$= \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\cdot tgx + \sqrt[5]{x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{tgx}{5x^{\frac{4}{5}}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $\frac{tgx}{5x^{\frac{4}{5}}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos^2 x}.$

Задача 3.
Вычислить производную функции
$$y = \frac{x+e^x}{x\cos x}.$$

Указание

Примените таблицу основных производных и формулы производных линейной комбинации и отношения функций.

Решение

$$y' = \frac{(x+e^x)'x\cos x - (x+e^x)(x\cos x)'}{(x\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(1+e^x)x\cos x - (x+e^x)(\cos x + x(-\sin x))}{x^2\cos x^2} =$$

$$= \frac{x\cos x + e^x x\cos x - x\cos x - e^x\cos x + x\sin x(x+e^x)}{x^2\cos x^2} =$$

$$= \frac{e^x\cos x(x-1) + (x+e^x)x\sin x}{x^2\cos^2 x}.$$

Ответ: $\dfrac{e^x\cos x(x-1) + (x+e^x)x\sin x}{x^2\cos^2 x}.$

Задача 4.

Вычислить производную функции

$$y = \cos\ln(3x^2 - 2).$$

Указание

Примените таблицу основных производных и формулу производной сложной функции.

Решение

$$y = -\sin\ln(3x^2-2)\cdot(\ln(3x^2-2))' =$$

$$= -\sin\ln(3x^2-2)\cdot\frac{1}{3x^2-2}(3x^2-2)' =$$

$$= -\sin\ln(3x^2-2)\cdot\frac{6x}{3x^2-2}.$$

Задача 5.

Вычислить производную функции

$$y = (\arcsin x)^{\cos x}.$$

Указание

Примените таблицу основных производных и формулу логарифмического дифференцирования:

$$f'(x) = f(x)\cdot\ \ln f(x)\ '.$$

Решение

$$y' = (\arcsin x)^{\cos x} \cdot \ \ln(\arcsin x)^{\cos x} \ \ ' =$$

$$= (\arcsin x)^{\cos x} \cdot \ \cos x \cdot \ln(\arcsin x) \ \ ' =$$

$$= (\arcsin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\arcsin x) + \cos x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \right).$$

Ответ: $(\arcsin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\arcsin x) + \cos x \cdot \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} \right).$

Задача 6.

Вычислить производную функции

$$y = \frac{(3x+7)^5 \cdot \sqrt{2x-11}}{ctg^3 x \cdot \sqrt[6]{\cos x}}.$$

Указание

Примените таблицу основных производных и формулу логарифмического дифференцирования:

$$f'(x) = f(x) \cdot \ \ln f(x) \ \ '.$$

Решение

Применим формулу логарифмического дифференцирования и воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a \ b^p \ = p \log_a b.$$

Получим:

$$y' = \frac{(3x+7)^5 \cdot \sqrt{2x-11}}{ctg^3 x \cdot \sqrt[6]{\cos x}} \cdot \left(\ln \frac{(3x+7)^5 \cdot \sqrt{2x-11}}{ctg^3 x \cdot \sqrt[6]{\cos x}} \right)' =$$

$$= \frac{(3x+7)^5 \cdot \sqrt{2x-11}}{ctg^3 x \cdot \sqrt[6]{\cos x}} \cdot (\ln(3x+7)^5 + \ln \sqrt{2x-11} -$$

$$- \ln ctg^3 x - \ln \sqrt[6]{\cos x})' = \frac{(3x+7)^5 \cdot \sqrt{2x-11}}{ctg^3 x \cdot \sqrt[6]{\cos x}} \cdot$$

$$\cdot (5\ln(3x+7) + \frac{1}{2}\ln(2x-11) - 3\ln ctgx - \frac{1}{6}\ln\cos x)' =$$

$$=\frac{(3x+7)^5\cdot\sqrt{2x-11}}{ctg^3x\cdot\sqrt[6]{\cos x}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{5\cdot 3}{3x+7}+\frac{2}{2(2x-11)}-\frac{3}{ctgx(-\sin^2 x)}-\frac{1}{6\cos x(-\sin x)}\right)=$$

$$=\frac{(3x+7)^5\cdot\sqrt{2x-11}}{ctg^3x\cdot\sqrt[6]{\cos x}}\cdot\left(\frac{15}{3x+7}+\frac{1}{2x-11}+\frac{3\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{3\sin 2x}\right).$$

Ответ: $\frac{(3x+7)^5\cdot\sqrt{2x-11}}{ctg^3x\cdot\sqrt[6]{\cos x}}\cdot\left(\frac{15}{3x+7}+\frac{1}{2x-11}+\frac{3\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{3\sin 2x}\right).$

Задача 6.

Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=t\sin t \\ y=e^{t^2-2t} \end{cases}.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Решение

$$y'(t)=e^{t^2-2t}\cdot(t^2-2t)'=e^{t^2-2t}\cdot(2t-2);$$

$$x'(t)=1\cdot\sin t+t\cos t=\sin t+t\cos t;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{t^2-2t}\cdot(2t-2)}{\sin t+t\cos t}.$$

Ответ: $\frac{e^{t^2-2t}\cdot(2t-2)}{\sin t+t\cos t}.$

1.2.3. *Производные высших порядков. Экстремумы*

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на некотором отрезке [*ab*]. В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию *x*. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции *f(x)*. Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом *f ‘(x)* будем называть производной первого порядка.

Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной) от функции *f(x)* называется производная (первого порядка) от ее (*n*-1)-й производной.

Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y'''..

Примеры.

1) Найдем производную 3-го порядка от функции $y=x^3-5x^2+3x+12$.

$$y'=3x^2-10x+3,\quad y''=\left(y'\right)'=6x-10,\quad y'''=\left(y''\right)'=6.$$

2) Получим общую формулу для производной *n*-го порядка функции $y=a^{bx}$.

$$y'=a^{bx}\ln a\cdot b,\quad y''=\ln a\cdot b\left(a^{bx}\right)'=a^{bx}\ln^2 a\cdot b^2,\ldots,$$
$$y^{(n)}=a^{bx}\ln^n a\cdot b^n.$$

Свойства производных высших порядков

Основные свойства производных высших порядков следуют из соответствующих свойств первой производной:

1. $(cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$.
2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$.
3. Для $y=x^m$ $y^{(n)}=n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{m-n}$. Если *m* – натуральное число, то при $n>m$ $y^{(n)}=0$.
4. Можно вывести так называемую **формулу Лейбница**, позволяющую найти производную *n*-го порядка от произведения функций *f(x)g(x)*:

$$\left(fg\right)^{(n)}=f^{(n)}g+nf^{(n-1)}g'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{(n-2)}g''+\ldots+fg^{(n)}.$$

Заметим, что коэффициенты в этой формуле совпадают с соответствующими коэффициентами формулы бинома Ньютона, если заменить производные данного порядка той же степенью переменной. Для *n*=1 эта формула была получена при изучении первой производной, для производных высших порядков ее справедливость можно доказать с помощью метода математической индукции.

5. Получим формулу для второй производной функции, заданной параметрически. Пусть $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0\le t\le T$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}:\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции называется ее **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка**.

Обозначение: $d^2y=d(dy)$.

При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель.

Итак,

$$d^2y=d\;\;dy\;\;=d\;\;f'(x)dx\;\;=\;\;f'(x)dx\;\;'\,dx=$$

$$=\;\;f'(x)\;\;'\;\;dx\;\;^2=f''(x)dx^2.$$

Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции:

$$d^3y=d\;\;d^2y\;\;=f'''(x)dx$$

и дифференциалы более высоких порядков.

Дифференциалом *n*-го порядка называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка:

$$d^ny=d\;\;d^{n-1}y\;\;=\;\;f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\;\;'=f^{(n)}(x)dx^n.$$

1. Производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\ f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

2. Дифференциалы высших порядков **не обладают свойством инвариантности**.

Покажем это на примере второго дифференциала. Если $y=F(\varphi(x))=F(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $d^2y=d(F'(u)du)$. Но $du=\varphi'(x)dx$ зависит от x, поэтому

$$d^2y = d\;F'(u)\;du + F'(u)d\;du\; = F''_{uu}(u)\;du\;^2 + F'_u(u)d^2u,$$

где

$$d^2u = \varphi''(x)dx^2.$$

Таким образом, форма второго дифференциала изменилась при переходе к аргументу u.

Точки экстремума функции

Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $y=f(x)$, если

$$f(x) \le f(x_0) \qquad f(x) \ge f(x_0)$$

для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0

Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**.

Примеры.

1. $y=x^2$ имеет минимум при $x=0$.

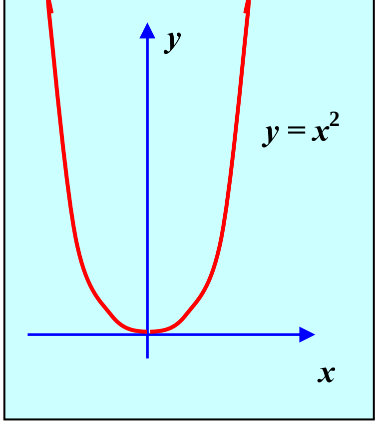


Рис. 1

2. $y=-|x-3|$ имеет максимум при $x=3$.

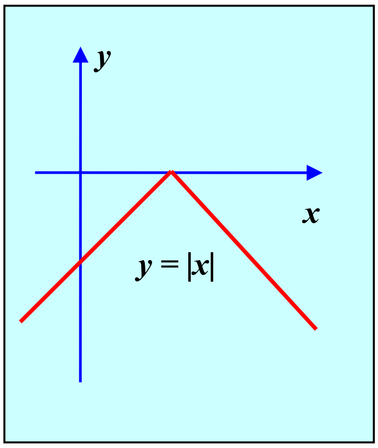


Рис. 2

3. $y=\sin x$ имеет минимумы при

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

и максимумы при

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$$

Теорема 1 (теорема Ферма). Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке x_0 производную, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство.

Пусть $f(x_0)$ – наибольшее значение функции, то есть для любой точки выбранной окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,$$

а если $x > x_0$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$$

Переходя к пределу в полученных неравенствах, находим, что из первого из них следует, что $f'(x_0) \ge 0$, а из второго – что $f'(x_0) \le 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

Замечание. В теореме Ферма важно, что x_0 – внутренняя точка для данного промежутка. Например, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке [0;1], принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно при $x = 1$ и $x = 0$, но ее производная в этих точках в ноль не обращается.

Теорема 2 (теорема Ролля). Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[ab]$;
2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$,

то внутри интервала (ab) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

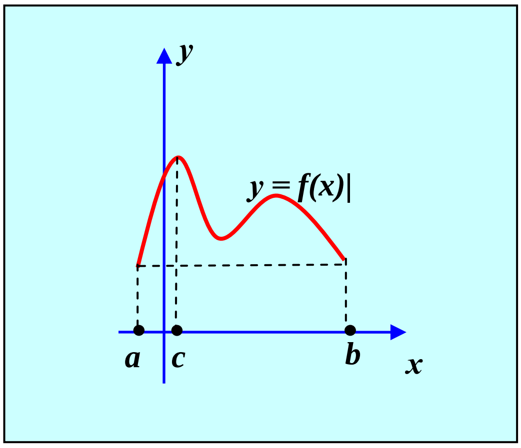


Рис. 3

Доказательство.

Пусть M и m – наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[ab]$. Тогда, если $m = M$, то $f(x) = m = M$ – постоянная функция, и $f'(x)=0$ для любой точки отрезка $[ab]$. Если же $m<M$, то по свойству функции, непрерывной на отрезке, хотя бы одно из значений m или M достигается во внутренней точке c отрезка $[ab]$ (так как на концах отрезка функция принимает равные значения). Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Замечание 1. В теореме Ролля существенно выполнение всех трех условий. Приведем примеры функций, для каждой из которых не выполняется только одно из условий теоремы, и в результате не существует такой точки, в которой производная функции равна нулю.

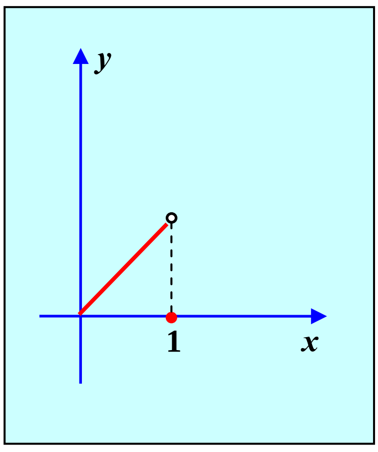


Рис. 4

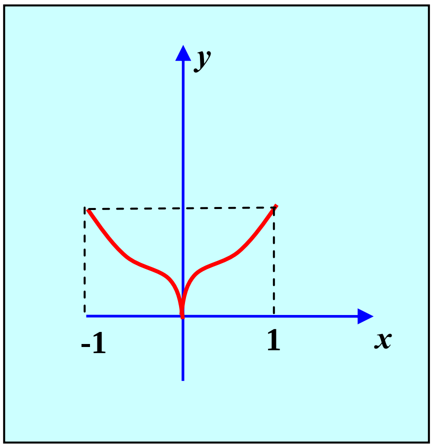


Рис. 5

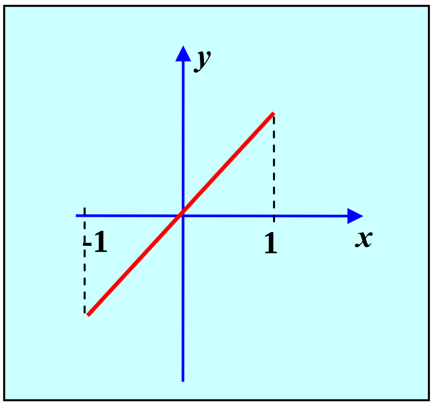


Рис. 6

Действительно, у функции, график которой изображен на рис. 4, $f(0)=f(1)=0$, но $x=1$ – точка разрыва, то есть не выполнено первое условие теоремы Ролля. Функция, график которой представлен на рис.5, не дифференцируема при $x = 0$, а для третьей функции $f(-1)$ не равно $f(1)$.

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

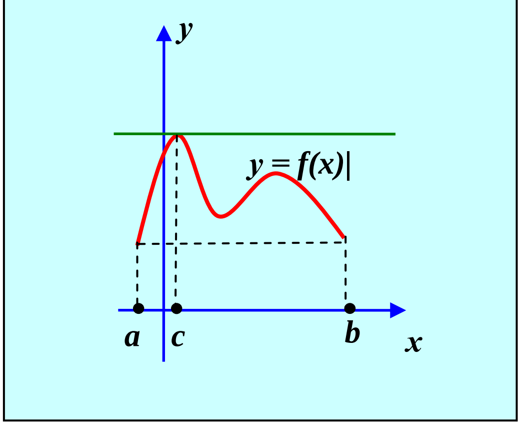


Рис. 7

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Производные высших порядков*»

Задача 1.
Найти вторую производную от функции
$$y=\sqrt{3-x^2}.$$

Указание
Найдите вначале первую производную данной функции, а затем воспользуйтесь тем, что
$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'.$$

Решение
$$y'=\left(\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right)=-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}};$$
$$y''=-\left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\right)'=-\frac{\sqrt{3-x^2}-\dfrac{x(-2x)}{2\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2}=$$
$$=-\frac{3-x^2+x^2}{\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}}=-\frac{3}{\sqrt{\left(3-x^2\right)^3}}.$$

Ответ: $-\dfrac{3}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$.

Задача 2.
Найти вторую производную от функции
$$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
при $x = 1$.

Указание
Найдите вторую производную по формуле
$$f''(x)=\left(f'(x)\right)',$$
а затем вычислите ее значение при $x = 1$.

Решение
$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y''=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}};\quad y''(1)=-\frac{1}{\sqrt{2^3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 3.

Найти производную 4-го порядка от функции

$$y=\left(3x^3-2x^2+x+5\right)\ln x.$$

Указание

Воспользуйтесь тем, что

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Решение

$$y'=(9x^2-4x+1)\ln x+(3x^3+2x^2+x+5)\frac{1}{x}=$$

$$=(9x^2-4x+1)\ln x+3x^2+2x+1+\frac{5}{x};$$

$$y''=(18x-4)\ln x+(9x^2-4x+1)\frac{1}{x}+6x+2-\frac{5}{x^2}=$$

$$=(18x-4)\ln x+9x-4+\frac{1}{x}+6x+2-\frac{5}{x^2}=$$

$$=(18x-4)\ln x+15x-2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2};$$

$$y'''=18\ln x+(18x-4)\frac{1}{x}+15-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}=$$

$$=18\ln x+23-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3};$$

$$y^{(4)}=\frac{18}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^4}=\frac{2(9x^3+2x^2+x-15)}{x^4}.$$

Ответ: $\frac{2(9x^3+2x^2+x-15)}{x^4}$.

Задача 4.

Найдите общее выражение для производной порядка n от функции

$$y = \frac{1}{x^2 - 9x + 20}.$$

Указание

Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}.$$

Решение

Вычислим подряд производные 1-го, 2-го, … порядка от данной функции и попробуем определить вид зависимости выражения для n-й производной от ее порядка.

$$y' = \left(\frac{1}{x^2 - 9x + 20}\right)' = \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}\right)' =$$

$$= \left((x-5)^{-1}\right)' - \left((x-4)^{-1}\right)' = -1 \cdot (x-5)^{-2} - (-1)(x-4)^{-2};$$

$$y'' = (-1)(-2)(x-5)^{-3} - (-1)(-2)(x-4)^{-3};$$

……………………………………………………………

$$y^{(n)} = (-1)(-2)...(-n)(x-5)^{-(n+1)} - (-1)(-2)...(-n)(x-4)^{-(n+1)} =$$

$$= (-1)^n \cdot n!\left(\frac{1}{(x-5)^{n+1}} - \frac{1}{(x-4)^{n+1}}\right).$$

Ответ: $(-1)^n \cdot n!\left(\frac{1}{(x-5)^{n+1}} - \frac{1}{(x-4)^{n+1}}\right).$

Задача 5.

Найдите общее выражение для производной порядка n от функции

$$y = \cos 5x.$$

Указание

Для упрощения воспользуйтесь формулами приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha; \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha; \qquad \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha.$$

Решение

$$y' = -5\sin 5x = 5(-\sin 5x) = 5\cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} + 5x\right);$$

$$y'' = -5^2 \cos 5x = 5^2 \quad -\cos 5x \quad = 5^2 \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} + 5x\right);$$

$$y''' = 5^3 \sin 5x = 5^3 \cos\left(\frac{\pi \cdot 3}{2} + 5x\right);$$

$$y^{(4)} = 5^4 \cos 5x = 5^4 \cos\left(\frac{\pi \cdot 4}{2} + 5x\right);$$

....

$$y^{(n)} = 5^n \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 5x\right).$$

Ответ: $5^n \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 5x\right)$.

Задача 6.

Найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Решение

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -3\cos t;$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -3\sin t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3\sin t(-3\sin t) - 3\cos t(-3\cos t)}{-3\sin t \quad ^3} =$$

$$= \frac{-9}{27\sin^3 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3\sin^3 t}$.

Задача 7.

Найти d^3y для функции $y = x^5$.

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Решение

$$y' = 5x^4, \quad y'' = 5\cdot 4x^3 = 20x^3, \quad y''' = 20\cdot 3x^2 = 60x^2;$$

$$d^3y = y'''\cdot dx^3 = 60x^2dx^3.$$

Ответ: $60x^2dx^3$.

Задача 8.

Вычислите производную:

$$2x^2-3\ \cos x\ ^{(10)}.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой Лейбница:

$$fg\ ^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{(n-2)}g'' + \ldots + fg^{(n)}.$$

Решение

Пусть

$$f(x) = 2x^2-3, \quad g(x) = \cos x, \quad n = 10.$$

Тогда

$$f'(x) = 4x, \quad f''(x) = 4, \quad f''' = \ldots = f^{(10)} = 0;$$

$$g^{(8)}(x) = \cos x, \quad g^{(9)}(x) = -\sin x, \quad g^{(10)}(x) = -\cos x.$$

Применяя формулу Лейбница, получим:

$$fg\ ^{(10)} = f''g^{(8)} + f'g^{(9)} + f\cdot g^{(10)} =$$

$$= 4\cos x - 4x\sin x - (2x^2-3)\cos x.$$

Ответ: $4\cos x - 4x\sin x - (2x^2-3)\cos x$.

Задача 9.

Рассматриваются функции

1) $y = x^3-3x^2+x+4 \quad$ *на* $\quad$ *отрезке* $\quad [0,1]$
2) $y = \sqrt{x^2-2x+1} \quad$ *на* $\quad$ *отрезке* $\quad [0,2]$
3) $y = \dfrac{5+x^4}{x^2} \quad$ *на* $\quad$ *отрезке* $\quad [-1,1]$
4) $y = \ln\cos x \quad$ *на* $\quad$ *отрезке* $\quad \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$

$$5) \quad y=\begin{cases} x, x\in[0,1) \\ 0, \quad x=1 \end{cases} \quad \text{на} \quad \text{отрезке} \quad [0,1]$$

Для какой из них выполнены все условия теоремы Ролля?

Указание

По условию теоремы Ролля функция $y = f(x)$

4) непрерывна на отрезке $[ab]$;
5) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
6) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$.

Решение

Проверим выполнение условий теоремы Ролля для каждой из функций:

1) $y(0)=4, \quad y(1)=3\neq y(0)$ –

не выполнено 3-е условие теоремы Ролля;

2) $y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases} x-1, x\geq 0 \\ -x+1, x<0 \end{cases}.$

Эта функция не дифференцируема при $x = 1$, то есть не выполнено 2-е условие теоремы Ролля;

3) $x = 0$ – точка разрыва данной функции, то есть не выполнено 1-е условие теоремы Ролля;

4) $\text{при} \quad x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right] \quad \cos x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\Rightarrow$

функция $y = \ln\cos x$ определена и непрерывна на заданном отрезке;

$$y'=-\frac{\sin x}{\cos x}=-tgx$$

существует на всем отрезке;

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, все условия теоремы Ролля выполнены.

5) $\lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1-0} x=1\neq y(1)=0$ –

функция не является непрерывной в точке $x = 1$, не выполнено 1-е условие теоремы Ролля.

Ответ: 4.

1.2.4. *Теоремы Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя*

Теорема 1 (теорема Лагранжа). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[ab]$ найдется хотя бы одна точка c, $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

Доказательство.
Обозначим

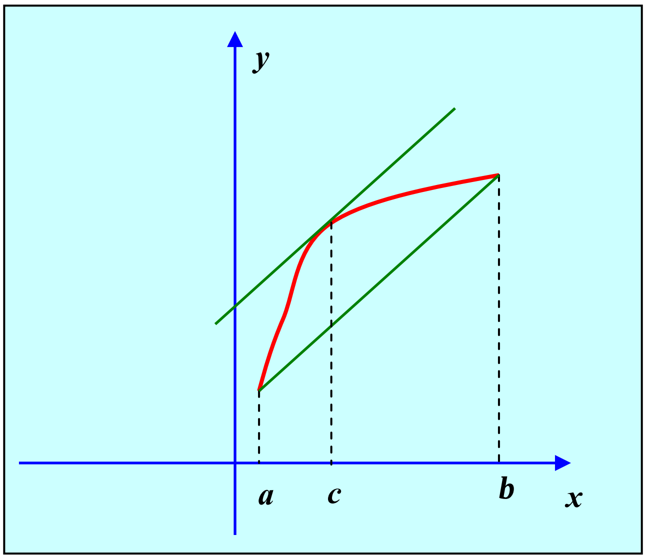
$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[ab]$, дифференцируема на (ab) и $F(a)=F(b)=0$. Следовательно, на интервале (ab) есть точка c, в которой $F'(c)=0$. Но $F'(x)=f'(x) - Q$, то есть $F'(c) = f'(c) - Q$. Подставив в это равенство значение Q, получим

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Замечание. Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами a и b.



Теорема 2 (теорема Коши). Если $f(x)$ и $g(x)$ – функции, непрерывные на $[ab]$ и дифференцируемые на (ab), и $g'(x)\neq 0$ на (ab), то на (ab) найдется такая точка $x=c$, $a<c<b$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.
Обозначим

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

При этом $g(b)-g(a)$ не равно нулю, иначе по теореме Ролля нашлась бы точка внутри отрезка $[ab]$, в которой $g'(x)=0$, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-Q\cdot\ g(x)-g(a)\ ,$$

для которой выполнены все условия теоремы Ролля (в частности, *F(a)*=*F(b)*=0). Следовательно, внутри отрезка [*ab*] существует точка *x*=*c*, в которой *F'(c)*=0. Но

$$F'(x) = f'(x) - Qg'(x), \quad \textit{поэтому} \quad f'(c) - Qg'(c) = 0,$$

$$\textit{откуда} \quad Q = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Подставляя в это равенство значение *Q*, получаем доказательство утверждения теоремы.

Раскрытие неопределенностей

Если функции *f(x)* и *g(x)* удовлетворяют на некотором отрезке [*ab*] условиям теоремы Коши и *f(a)* = *g(a)* = 0, то отношение *f(x)/g(x)* не определено при *x*=*a*, но определено при остальных значениях *x*. Поэтому можно поставить задачу вычисления предела этого отношения при $x \to a$. Вычисление таких пределов называют обычно «раскрытием неопределенностей вида {0/0}».

Теорема 3 (правило Лопиталя). Пусть функции *f(x)* и *g(x)* удовлетворяют на отрезке [*ab*] условиям теоремы Коши и *f(a)=g(a)=0.* Тогда, если существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство.

Выберем

$$x \in [ab], \quad x \neq a.$$

Из теоремы Коши следует, что

$$\exists \xi : a < \xi < x, \quad \textit{такое, что} \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

По условию теоремы *f(a)*=*g(a)*=0, поэтому

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

При $x \to a$ $\xi \to a$. При этом, если существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

то существует и

$$\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Теорема доказана.

Пример.
При $a>0$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(a^x-x^a)'}{(x-a)'}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^x\ln a-ax^{a-1}}{1}=a^a\ln a-a^a=a^a(\ln a-1).$$

Замечание 1. Если *f(x)* или *g(x)* не определены при *x=a*, можно доопределить их в этой точке значениями *f(a)=g(a)*=0. Тогда обе функции будут непрерывными в точке *a*, и к этому случаю можно применить теорему 3.

Замечание 2. Если *f'(a)=g'(a)*=0 и *f'(x)* и *g'(x)* удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 3 на *f(x)* и *g(x),* к отношению $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ можно еще раз применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

и так далее.
Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xctgx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ctgx-\frac{x}{\sin^2 x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{2x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{2\sin^2 x+2x\cdot 2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x(\sin x+2x\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x+2x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{3}.$$

Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то есть для вычисления предела отношения двух функций, стремящихся к бесконечности при $x\to a$.

Теорема 4. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны и дифференцируемы при $x\neq a$ в окрестности точки *a*, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

и существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

то существует и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Доказательство.

Выберем в рассматриваемой окрестности точки a точки α и x так, чтобы $\alpha < x < a$ (или $a < x < \alpha$). Тогда по теореме Коши существует точка c ($a < c < x$) такая, что

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Так как

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}},$$

получаем:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}},\quad \textit{откуда}\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}..$$

Так как

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

можно для любого малого ε выбрать α настолько близким к a, что для любого c будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon,\quad \textit{или}\quad A-\varepsilon<\frac{f'(c)}{g'(c)}<A+\varepsilon.$$

Для этого же значения ε из условия теоремы следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}=1\quad \textit{так как}\ \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty\ ,$$

поэтому

$$\left|\frac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon, \quad или \quad 1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<1+\varepsilon.$$

Перемножим два полученных неравенства:

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

или

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{g(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Поскольку ε – произвольно малое число, отсюда следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Теорема 4 верна и при $A=\infty$. В этом случае

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

Тогда и

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

Замечание 2. Теоремы 3 и 4 можно доказать и для случая, когда $x\to\infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=-2\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Правило Лопиталя*»

Задача 1.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}.$$

Указание

Для того чтобы избавиться от неопределенности, примените правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \textit{если}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0.$$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-arctgx)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{3x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 2.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{6e^x-x^3-3x^2-6x-6}{2\cos x+x^2-2}.$$

Указание

Для того чтобы избавиться от неопределенности, примените правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \textit{если}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0.$$

Если в результате вновь получится неопределенность, можно применять правило Лопиталя несколько раз.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{6e^x-x^3-3x^2-6x-6}{2\cos x+x^2-2}=\lim_{x\to 0}\frac{(6e^x-x^3-3x^2-6x-6)'}{(2\cos x+x^2-2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6e^x-3x^2-6x-6}{-2\sin x+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(6e^x-3x^2-6x-6)'}{(-2\sin x+2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6(e^x-x-1)}{-2(\cos x-1)}=-3\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{-\sin x}=3\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 3.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}\ .$$

Указание

Для того чтобы избавиться от неопределенности, примените правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \textit{если}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty.$$

Если в результате вновь получится неопределенность, можно применять правило Лопиталя несколько раз.

Решение

$$\lim_{x\to+\infty}\ x^3e^{-x}\ =\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Ответ: 0.

Задача 4.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}x^{tgx}.$$

Указание

Преобразуйте функцию к виду

$$x^{tgx}=e^{\ln\, x^{tgx}}=e^{tgx\cdot\ln x}=e^{\frac{\ln x}{ctgx}}.$$

Тогда предел показателя степени можно вычислить по правилу Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x\to 0}x^{tgx}=\lim_{x\to 0}x^{tgx}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\, x^{tgx}}=\lim_{x\to 0}e^{tgx\cdot\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln x}{ctgx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}:\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot(-\sin x)}=e^{1\cdot 0}=1.$$

Ответ: 1.

Задача 5.

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right).$$

Указание

Преобразуйте функцию, стоящую под знаком предела:

$$\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{\ln(1+x)^{1+x}-x}{x^2}=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Решение

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+1-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.2.5. *Формула Тейлора*

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, имеющую в окрестности точки $x=a$ все производные до порядка $(n+1)$ включительно, и поставим задачу: найти многочлен $y=P_n(x)$ степени не выше n, для которого его значение в точке a, а также значения его производных по n-й порядок равны значениям при $x=a$ выбранной функции и ее производных соответствующего порядка:

$$P_n(a)=f(a),\,P_n'(a)=f'(a),\,P_n''(a)=f''(a),\ldots,P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a).$$

Пусть искомый многочлен имеет вид:

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\ldots+C_n(x-a)^n.$$

При этом

$$P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+\ldots+nC_n(x-a)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot C_2+3\cdot 2\cdot C_3(x-a)+\ldots+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},$$

....,

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot C_n.$$

Тогда

$$P_n(a)=C_0=f(a),\,P_n'(a)=C_1=f'(a),$$

$$P_n''(a)=2C_2=f''(a),\,P_n'''(a)=3\cdot 2C_3=f'''(a),\ldots,$$

$$P_n^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n=f^{(n)}(a).$$

Из формул (21.3) можно выразить коэффициенты C_i через значения производных данной функции в точке a.

> Произведение последовательных натуральных чисел $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n$ называется **факториалом числа *n*** и обозначается
> $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n$.

Дополнительно вводится $0!=1$.

Используя это обозначение, получим:

$$C_0=f(a),\,C_1=f'(a),\,C_2=\frac{1}{2!}f''(a),\ldots,C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Таким образом, искомый многочлен имеет вид:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, откуда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ или

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots \\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \end{aligned}}$$

Полученное представление функции называется **формулой Тейлора**, а $R_n(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора. Для тех значений x, для которых $R_n(x)$ мало, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$. Следовательно, формула Тейлора дает возможность заменить функцию $y = f(x)$ многочленом $y = P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Формы остаточного члена в формуле Тейлора

Покажем, что $R_n(x) = o(x-a)^n$. Из выбора многочлена $P_n(x)$ следует, что $R_n'(a)=R_n''(a)=\ldots=R_n^{(n)}(a)=0$. Применив для вычисления предела

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$$

n раз правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}=\frac{R_n^{(n)}(a)}{n!}=0.$$

Утверждение доказано. Представление остаточного члена в виде $R_n = o(x-a)^n$ называется записью остаточного члена **в форме Пеано**.

Найдем еще один вид записи $R_n(x)$. Представим его в виде

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x)$$

и определим вид функции $Q(x)$. Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x).$$

Пусть при заданных значениях x и a $Q(x)=Q$. Рассмотрим вспомогательную функцию от t ($a < t < x$):

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\ldots$$
$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

При этом предполагается, что a и x приняли фиксированные значения. Тогда

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)-\ldots$$
$$-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-$$
$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q,$$

то есть $F(t)$ дифференцируема в окрестности точки a. Из предыдущих выкладок следует, что $F(x) = F(a) = 0$, поэтому к функции $F(t)$ можно применить теорему Ролля: существует $t = \xi$ ($a < \xi < x$) такое, что $F'(\xi) = 0$. Тогда

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}Q=0,$$

откуда $Q = f^{(n+1)}(\xi)$. Используя это выражение, получим запись остаточного члена **в форме Лагранжа**:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Так как $a < \xi < x$, можно представить $\xi = a + \theta(x - a)$, где $0 < \theta < 1$. При этом

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)).$$

Замечание. Если в формуле Тейлора принять $a = 0$, этот частный случай называют **формулой Маклорена**:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta\, x).$$

Разложение по формуле Тейлора некоторых элементарных функций

Найдем разложения по формуле Тейлора при $a = 0$ (точнее, по формуле Маклорена) функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \ln(1 + x)$, $y = (1 + x)^m$.

1) $f(x) = e^x$.

$f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$, следовательно, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$.

Подставляя эти результаты в формулу Маклорена, получим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},$$
$$0 < \theta < 1.$$

Отметим, что для любого x
$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

2) $f(x) = \sin x$.

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),\ f'(0) = 1,$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),\ f''(0) = 0,$

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}),\ f'''(0) = -1,$

....

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}),\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2},$

$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2}),\ f^{(n+1)}(\xi) = \sin(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}).$

Разложение по формуле Маклорена имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2} +$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

В этом случае, как и в предыдущем, при всех значениях x
$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Можно предложить еще один вариант этой формулы:
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

3) $f(x) = \cos x$.

Таким же образом, как и для синуса, можно получить разложение по формуле Тейлора:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}) =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

4) $f(x) = \ln(1 + x)$. Тогда

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f''(x) = (-1)(1+x)^{-1}, \ldots,$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)!(1+x)^{-n},$

$f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!, f(0) = 0.$

Следовательно,

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}).$$

5) $f(x) = (1 + x)^m$. При этом $f^{(n)}(x) = m(m - 1)\ldots(m - n + 1)(1 + x)^{m-n}$, $f^{(n)}(0) = m(m - 1)\ldots(m - n + 1)$. Тогда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1}).$$

Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений

Заменяя какую-либо функцию, для которой известно разложение по формуле Тейлора, многочленом Тейлора, степень которого выбирается так, чтобы величина остаточного члена не превысила выбранное значение погрешности, можно находить приближенные значения функции с заданной точностью.

Найдем приближенное значение числа e, вычислив значение многочлена Тейлора при n=8:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$$

При этом

$$R_8 < \frac{1}{9!} \cdot 3 < 10^{-5}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«Формула Тейлора»

Задача 1.

Разложить многочлен

$$x^5 + 2x^4 + 6x^3 + x^2 - 5x + 7$$

по степеням двучлена $x + 3$.

1) $(x+3)^5 + 2(x+3)^4 + 6(x+3)^3 + (x+3)^2 - 5(x+3) + 7$

2) $(x+3)^5 - (x+3)^4 + 32(x+3)^3 - 200(x+3)^2 + 716(x+3) - 252$

3) $(x+3)^5 - 38(x+3)^4 + 92(x+3)^3 - 156(x+3)^2 + 627(x+3) - 404$

4) $(x+3)^5 + 5(x+3)^4 - 33(x+3)^3 + 117(x+3)^2 + 2209(x+3) - 2$

5)! $(x+3)^5 - 13(x+3)^4 + 72(x+3)^3 - 215(x+3)^2 + 1636(x+3) - 212$

Указание

Для вычисления коэффициентов разложения примените формулу Тейлора:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(-3)}{n!}.$$

Решение

Вычислим коэффициенты многочлена Тейлора:

$f(-3) = -243 + 162 - 162 + 9 + 15 + 7 = -212 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = \dfrac{f(-3)}{0!} = \dfrac{-212}{1} = -212;$

$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 2x - 5,$

$f'(-3) = 405 - 216 + 1458 - 6 - 5 = 1636 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = \dfrac{f'(-3)}{1!} = \dfrac{1636}{1} = 1636;$

$f''(x) = 20x^3 + 24x^2 + 36x + 2,$

$f''(-3) = -540 + 216 - 108 + 2 = -430 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 = \dfrac{f''(-3)}{2!} = \dfrac{-430}{2} = -215;$

$f'''(x) = 60x^2 + 48x + 36, \quad f'''(-3) = 540 - 144 + 36 = 432 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 = \dfrac{f'''(-3)}{3!} = \dfrac{432}{6} = 72;$

$$f^{(4)}(x)=120x+48,\quad f^{(4)}(-3)=-360+48=-312\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4=\frac{f^{(4)}(-3)}{4!}=\frac{-312}{24}=-13;$$

$$f^{(5)}(x)=f^{(5)}(-3)=120\Rightarrow a_5=\frac{f^{(5)}(-3)}{5!}=\frac{120}{120}=1;$$

$$f^{(6)}(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=0\quad \textit{при}\quad n\ge 6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n=0\quad \textit{при}\quad n\ge 6.$$

Следовательно, разложение данного многочлена по степеням (x + 3) имеет вид:

$$x^5+2x^4+6x^3+x^2-5x+7=$$
$$=(x+3)^5-13(x+3)^4+72(x+3)^3-215(x+3)^2+$$
$$+1636(x+3)-212.$$

Задача 2.

Разложить функцию

$$f(x)=\ \ x^2+2x-5\ \ ^3$$

по степеням x, пользуясь формулой Тейлора.

Указание

Вычислите $a_0 - a_6$ по формуле

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Решение

$$f(0)=(-5)^3=-125\Rightarrow a_0=-125;$$

$$f'(x)=3(x^2+2x-5)^2(2x+2),\quad f'(0)=150\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{150}{1!}=150;$$

$$f''(x)=6\ \ 4(x^2+2x-5)(x+1)^2+(x^2+2x-5)^2\ \ ,$$

$$f''(0)=30\Rightarrow a_2=\frac{30}{2!}=15;$$

$$f'''(x) = 6 \quad x^2 + 2x - 5 \quad 5x^2 + 10x - 1 \quad ' =$$

$$= 6 \;\; (2x+2) \;\; 5x^2 + 10x - 1 \;\; + (10x + 10) \;\; x^2 + 2x - 5 \quad =$$

$$= 12(x+1)(10x^2 + 10x - 26), \quad f'''(0) = -12 \cdot 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{-12 \cdot 26}{3!} = -52;$$

$$f^{(4)}(x) = 24(15x^2 + 30x - 13), \quad f^{(4)}(0) = -72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{-72}{4!} = -3;$$

$$f^{(5)}(x) = 24(30x + 30), \quad {}^{(5)}(x) = 24(30720 \Rightarrow a_5 = \frac{720}{5!} = 6;$$

$$f^{(6)}(x) = f^{(6)}(0) = 24 \cdot 30 = 720 \Rightarrow a_6 = \frac{720}{6!} = 1;$$

$$f^{(7)}(x) = \ldots = 0 \Rightarrow a_7 = \ldots = 0.$$

В результате получаем:

$$f(x) = \quad x^2 + 2x - 5 \quad ^3 =$$

$$= x^6 + 6x^5 - 3x^4 - 52x^3 + 15x^2 + 150x - 125.$$

Ответ: $x^6 + 6x^5 - 3x^4 - 52x^3 + 15x^2 + 150x - 125.$

Задача 3.

Получить многочлен Тейлора 2-й степени для функции

$$y = arctgx \quad при \quad x_0 = 0.$$

Указание

Требуется найти

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0) \quad и \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

Решение

$$a_0 = arctg0 = 0;$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)_{x=0} = 1;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad 1 + x^2 \quad ^{-1} \; ' \;\; _{x=0} = \frac{1}{2} \quad -2x(1+x^2)^{-2} \quad _{x=0} = 0.$$

Следовательно, arctg $x = x + o(x^2)$.

Ответ: x.

Задача 4.
Написать многочлен Тейлора n-го порядка для функции

$$y = x^2 \ln x \quad при \quad x_0 = 1.$$

Указание

Для решения задачи требуется найти общий вид производной n-го порядка от данной функции.

Решение

Найдем подряд производные нескольких порядков от данной функции, а затем попробуем получить общий вид $y^{(n)}(1)$:

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \;\; 2\ln x + 1 \;\;, \quad y'(1) = 1;$$

$$y'' = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3, \quad y''(1) = 3;$$

$$y''' = \frac{2}{x} = 2x^{-1}, \quad y'''(1) = 2;$$

$$y^{(4)} = 2(-1)x^{-2} = \frac{(-1)^{4-1} \cdot 2 \cdot (4-3)!}{x^{4-2}}, \quad y^{(4)}(1) = (-1)^{4-1} \cdot 2 \cdot (4-3)!;$$

....

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (n-3)!}{x^{n-2}}, \quad y^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (n-3)!$$

Тогда коэффициенты Тейлора равны:

$$a_0 = y(1) = 0, \quad a_1 = y'(1) = 1,$$

$$a_2 = \frac{y''(1)}{2!} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{y'''(1)}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$при \quad n \ge 4 \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2(n-3)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{n(n-1)(n-2)}.$$

Следовательно,

$$x^2 \ln x = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 +$$

$$+\frac{(-1)\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2}(x-1)^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{n(n-1)(n-2)}(x-1)^n + o(x-1)^n.$$

Ответ:

$$x^2 \ln x = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 +$$

$$+\frac{(-1)\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2}(x-1)^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{n(n-1)(n-2)}(x-1)^n + o(x-1)^n.$$

Задача 5.
Написать многочлен Тейлора $2n$-го порядка для функции
$$y = \cos^2 x \quad \textit{при} \quad x_0 = 0.$$

Указание

Представьте функцию в виде
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$
и используйте стандартное разложение:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Решение

Если обозначить $\cos 2x = t$, то
$$\cos 2x = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n+1}) =$$
$$= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + o((2x)^{2n+1}).$$
Тогда
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + o((2x)^{2n+1}) =$$
$$= 1 - \frac{2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + o((2x)^{2n+1}).$$
Ответ: $\cos^2 x = 1 - \frac{2 \cdot x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + o((2x)^{2n+1}).$

Задача 6.
Вычислить приближенно $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

Указание

Воспользуйтесь формулой
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Решение

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27} = \frac{58}{81} \approx 0{,}716.$$
Ответ: 0,716.

1.2.6. *Монотонность и экстремумы*

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $[ab]$, если

$$\forall x_1, x_2 \in [ab] \quad \text{таких, что} \quad x_1 < x_2,$$
$$f(x_1) < f(x_2) \qquad f(x_1) > f(x_2) \;.$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$, дифференцируемая на $[ab]$, возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \geq 0$ на $[ab]$.
Если $f(x)$ непрерывна на $[ab]$ и дифференцируема на (ab), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[ab]$.
Доказательство.
1. Пусть $f(x)$ возрастает на $[ab]$. Тогда при $\Delta x > 0$

$$f(x+\Delta x) > f(x), \quad \text{то есть} \quad f(x+\Delta x) - f(x) > 0.$$

Если же $\Delta x < 0$,

$$f(x+\Delta x) < f(x), \quad \text{поэтому} \quad f(x+\Delta x) - f(x) < 0.$$

Следовательно, в обоих случаях

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Значит,

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.
2. Пусть

$$f'(x) > 0 \forall x \in [ab]. \quad \text{Выберем} \quad x_1, x_2 \in [ab] : x_1 < x_2.$$

По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), x_1 < \xi < x_2.$$

Но по условию

$$f'(\xi) > 0, \quad \text{поэтому} \quad f(x_2) > f(x_1),$$

следовательно, $f(x)$ – возрастающая функция.

Замечание 1. Аналогичную теорему можно доказать и для убывающей функции: если $f(x)$ убывает на $[ab]$, то $f'(x) \leq 0$ на $[ab]$. Если $f'(x) < 0$ на (ab), то $f(x)$ убывает на $[ab]$.

Замечание 2. Геометрический смысл доказанной теоремы: если функция возрастает на отрезке $[ab]$, то касательная к ее графику во всех точках на этом отрезке образует с осью Ox острый угол (или горизонтальна).

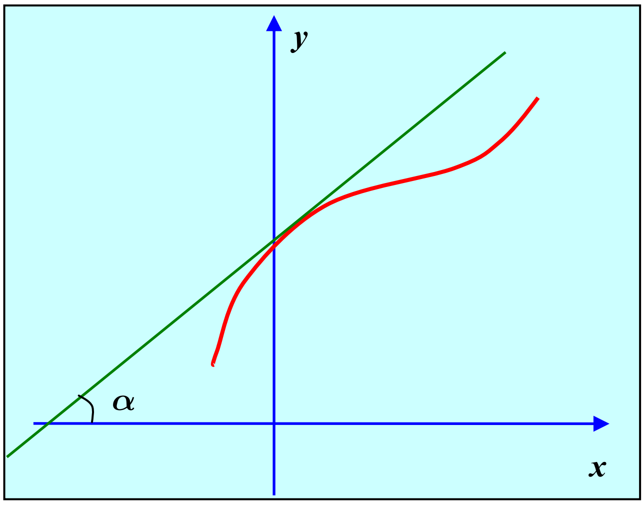


Рис. 1

Если же функция убывает на рассматриваемом отрезке, то касательная к графику этой функции образует с осью Ox тупой угол (или в некоторых точках параллельна оси Ox).

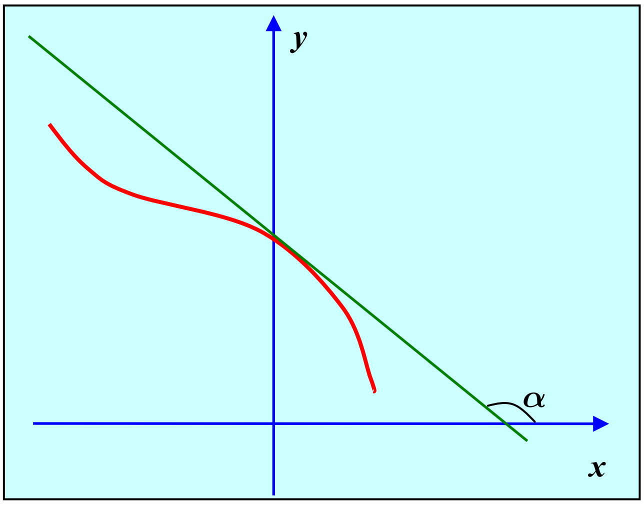


Рис. 2

Необходимое условие экстремума

Ранее было дано определение максимума и минимума функции.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 является точкой экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.
Доказательство.
Действительно, производная в точке x_0 либо существует, либо нет. Если она существует, то по теореме Ферма она равна нулю.
Примеры.
1. Функция $y = x^2$ имеет минимум при $x = 0$, причем $(x^2)' = 2x = 0$ при $x=0$.

2. Минимум функции $y = |x|$ достигается при $x = 0$, причем производная в этой точке не существует.

Замечание. Отметим еще раз, что теорема 2 дает **необходимое, но не достаточное** условие экстремума, то есть не во всех точках, в которых $f'(x) = 0$, функция достигает экстремума.

Пример. У функции $y = x^3$ $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, однако функция монотонно возрастает во всей области определения.

Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее производная в этой точке равна нулю или не существует, точка x_0 называется **критической точкой** функции.

Теорема 2 утверждает, что все точки экстремума находятся в множестве критических точек функции.

Достаточные условия экстремума

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой максимума;
2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой минимума;
3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке x_0, эта точка не является точкой экстремума.

Доказательство.

Справедливость утверждения 3) следует из теоремы 1. Докажем утверждения 1) и 2). По формуле Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где x принадлежит окрестности точки x_0, а ξ лежит между x и x_0. Если $f'(\xi) > 0$ при $x < \xi < x_0$ и $f'(\xi) < 0$ при $x_0 < \xi < x$, приращение функции $f(x) - f(x_0) < 0$ по обе стороны x_0, то есть в рассматриваемой точке достигается максимум. Если же производная при $x = x_0$ меняет знак с «+» на «-», точка x_0 является точкой минимума. Следовательно, изменение знака производной в точке x_0 является необходимым и достаточным условием наличия экстремума в этой точке.

Теорема 4. Пусть $f\,'(x_0) = 0$ и у рассматриваемой функции существует непрерывная вторая производная в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 является точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, или точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Доказательство.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $f''(x_0) < 0$. Так как по условию $f''(x)$ непрерывна, существует окрестность точки x_0 , в которой $f''(x) < 0$. Вспомним, что $f''(x) = (f\,'(x))'$, и из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает в рассматриваемой окрестности. Поскольку $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда по теореме 3 точка x_0 является точкой максимума функции, что и требовалось доказать. Утверждение 2) доказывается аналогично.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1,2,\dots, n-1$, а $f^{(n)}(x_0)$ не равна нулю. Тогда, если n – четное число ($n = 2m$), функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$. Если же n – нечетное число ($n = 2m - 1$), то точка x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство.

Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

где ξ лежит между x и x_0.

а) Если $n = 2m$ – четное и $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то найдется окрестность точки x_0, в которой $f^{(2m)}(x) < 0$. Пусть x принадлежит этой окрестности, тогда ξ тоже ей принадлежит, то есть $f^{(2m)}(\xi) < 0$. Но $(x - x_0)^{2m} > 0$ при x, не равном x_0 , поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$ во всей рассматриваемой окрестности, следовательно, точка x_0 является точкой максимума.

б) Если $n = 2m$ – четное и $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то таким же образом доказывается, что x_0 – точка минимума.

в) Если $n = 2m - 1$ – нечетное, то $(x - x_0)^{2m-1}$ имеет разные знаки по разные стороны точки x_0. Поэтому в окрестности этой точки, в которой производная порядка $2m - 1$ сохраняет постоянный знак, приращение функции меняет знак при $x = x_0$. Следовательно, экстремум в этой точке не достигается.

Вывод: проверить наличие экстремума в критической точке можно тремя способами:

1) убедиться, что $f'(x)$ меняет знак при $x = x_0$;
2) определить знак $f''(x_0)$;
3) если $f''(x_0) = 0$, исследовать порядок и знак производной, не обращающейся в 0 в рассматриваемой точке.

Примеры.

1. Определим тип экстремума функции $y = x^3 - 3x + 7$ при $x = 1$. Точка $x = 1$ является критической, так как $y' = 3x^2 - 3x = 0$ при $x = 1$. Так как при $x < 1$ $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$, $x = 1$ – точка минимума. Можно было установить этот факт и с помощью второй производной: $y'' = 6x - 3 = 3 > 0$ при $x = 1$. Следовательно, функция в этой точке достигает минимума (теорема 4).

2. Исследуем на экстремум функцию $y = x^5 + x^3$. $y' = 5x^4 + 3x^2 = x^2(5x^2 + 3) = 0$ при $x = 0$. При этом $y'' = 20x^3 + 6x = 0$ при $x = 0$, $y''' = 60x^2 + 6 = 6 \neq 0$ при $x = 0$. Порядок первой ненулевой производной в точке $x = 0$ равен нечетному числу 3, следовательно, по теореме 5 функция не имеет экстремума в этой точке, а так как критическая точка единственна, функция вообще не имеет экстремумов.

Наибольшее и наименьшее значения функции,

дифференцируемой на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[ab]$. Тогда она непрерывна на нем, и по свойству функции, непрерывной на отрезке, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Если $f(x)$ имеет на $[ab]$ конечное число критических точек, то ее наибольшее значение будет либо одним из ее максимумов (а именно, наибольшим максимумом), либо будет достигаться в одной из конечных точек отрезка. То же можно сказать и о наименьшем значении. Из сказанного следует, что поиск наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на отрезке можно проводить по следующей схеме:

1) найти критические точки функции, принадлежащие данному отрезку;

2) вычислить значения функции в точках a и b, а также в найденных критических точках. Наименьшее из полученных чисел будет наименьшим значением функции на данном отрезке, а наибольшее – ее наибольшим значением на нем.

Пример.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 15$

на отрезке $[-4, 4]$. $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0$ при $x = -3$ и $x = 1$. При этом обе найденные критические точки принадлежат данному отрезку. Вычислим значения функции при $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$ и $x = 4$.

x	-4	-3	1	4
y	5	12	**-20**	**61**

Таким образом, наибольшее значение функции на рассматриваемом отрезке равно 61 и принимается на его правой границе, а наименьшее равно –20 и достигается в точке минимума внутри отрезка.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Монотонность и экстремумы*»

Задача 1.

Найти интервалы возрастания функции

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Указание

Найдите интервалы, принадлежащие области определения функции, на которых ее производная положительна.

Решение

Область определения функции:

$$x \in \ -\infty,-1 \ \cup \ -1,1 \ \cup \ 1,+\infty \ .$$

Найдем производную и исследуем ее знак.

$$y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

$$y' > 0 \quad при \quad x > 0 \Rightarrow$$

с учетом области определения интервалы возрастания:

$$0,1 \ \cup \ 1,+\infty \ .$$

Ответ: $0,1 \ \cup \ 1,+\infty$.

Задача 2.

Найти точку максимума функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 24x + 5.$$

Указание

Требуется найти критическую точку, в которой знак производной меняется с плюса на минус.

Решение

Область определения функции: $-\infty,+\infty$.

Найдем критические точки функции:

$$y' = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x^2 + 2x - 8),$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4, \quad x = 2 -$$

критические точки.

Исследуем знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:

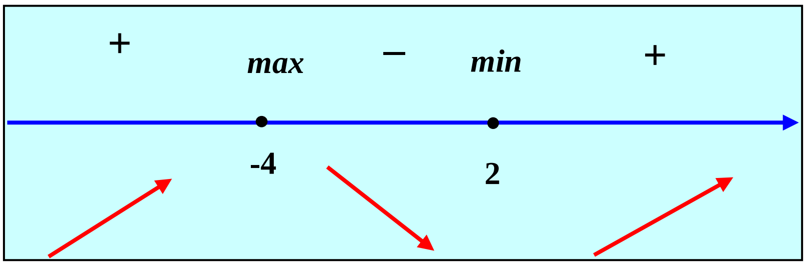


Рис. 3

Ответ: x = -4.

Задача 3.
Найти точку минимума функции

$$y = x + \sqrt[3]{x^2}.$$

Указание

Не забывайте, что критическими точками функции являются не только точки, в которых производная равна нулю, но и точки, в которых производная не существует (если сама функция определена в этой точке).

Решение

Область определения функции: $-\infty, +\infty$.

$$y' = 1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} + 2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Функция имеет две критические точки:

$$x = -\frac{8}{27}, \quad \text{где} \quad y' = 0, \quad \text{и} \quad x = 0, \quad \text{где} \quad y' \text{ не существует.}$$

Исследуем знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:

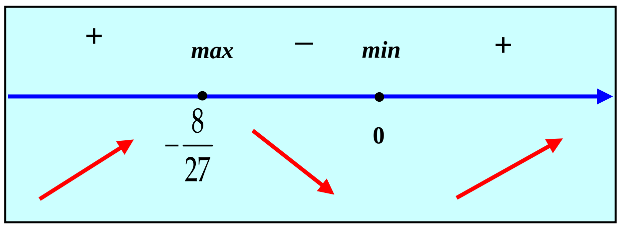


Рис. 4

При этом график функции имеет вид:

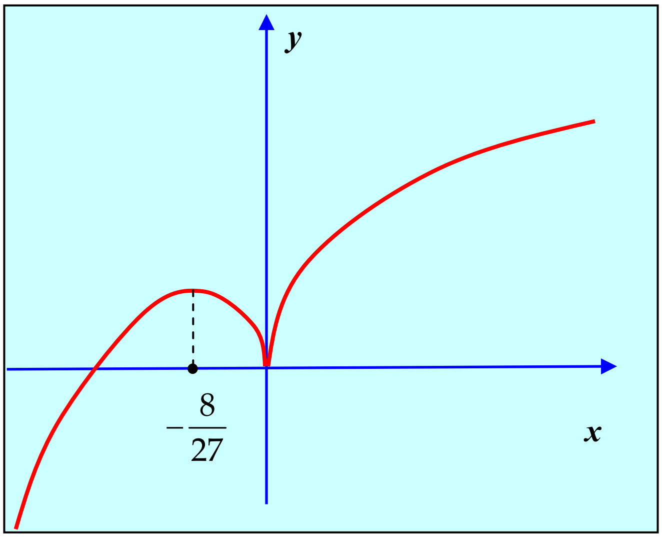


Рис. 5

Ответ: $x = 0$.

Задача 4.
Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{169 - x^2}$$

на отрезке [-5,12].

Указание

Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наименьшее значение либо на границе, либо в критической точке, расположенной внутри отрезка.

Решение

Область определения функции:

$$x \in \; -13,13 \; ,$$

то есть на отрезке [-5,12] функция определена и непрерывна.
Найдем критические точки:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{169 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{169 - x^2}}.$$

Единственная критическая точка на отрезке [-5,12]: $x = 0$.
Следовательно, наименьшее значение функции может достигаться в одной из трех точек: $x = -5$, $x = 0$ или $x = 12$.

$$y(-5) = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12;$$

$$y(0) = \sqrt{169} = 13;$$

$$y(12) = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

Итак, наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{169 - x^2}$$

на отрезке [-5,12] равно 5.
Ответ: 5.

Задача 5.
Число 12 разложить на два положительных множителя так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Указание

Найдите минимум функции

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2.$$

Решение

Пусть x – один из множителей, тогда второй: $\frac{12}{x}$, и требуется найти точку минимума функции

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2.$$

Область определения функции: $-\infty,0 \ \cup \ 0,+\infty$.

$$f'(x) = 2x + 144\cdot(-2)x^{-3} = 2\frac{x^4-144}{x^3}.$$

Следовательно, критические точки:

$$x = \sqrt[4]{144} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad и \quad x = -2\sqrt{3}.$$

По условию множители должны быть положительными, поэтому исследуем знак производной только при $x > 0$:

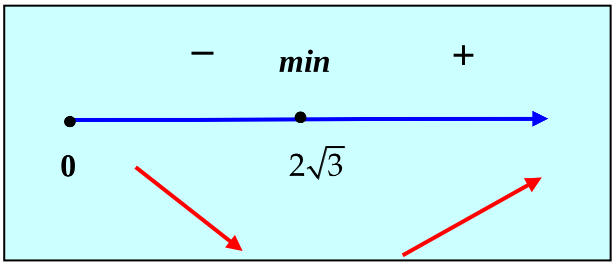


Рис. 6

Итак,

$$x = 2\sqrt{3}, \quad \frac{12}{x} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$ *и* $2\sqrt{3}$.

1.2.7. *Выпуклость. Асимптоты. Общая схема исследования функции*

Кривая называется **выпуклой (обращенной выпуклостью вверх)** на интервале (ab), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется **вогнутой (обращенной выпуклостью вниз)** на интервале (*ab*), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

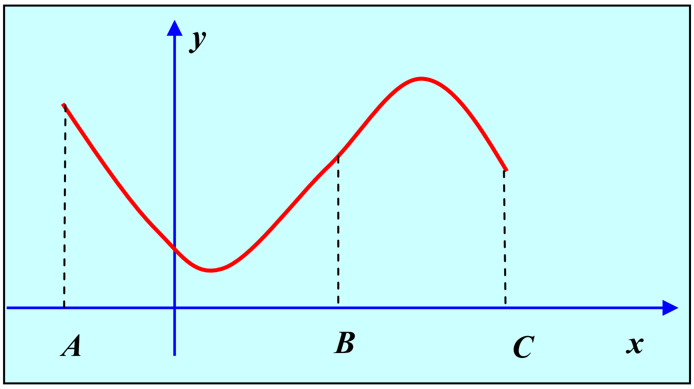


Рис. 1

Например, кривая, изображенная на рисунке, выпукла на интервале (*BC*) и вогнута на интервале (*AB*).

Теорема 1. Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (*ab*), то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (*ab)*, то кривая $y = f(x)$ вогнута на этом интервале.

Доказательство.
Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $f''(x) < 0$ на (*ab).*
Выберем на интервале (*ab*) произвольную точку $x = x_0$ и докажем, что все точки кривой на этом интервале лежат ниже проведенной в точке с абсциссой x_0 касательной, то есть ордината любой точки кривой на рассматриваемом интервале меньше ординаты касательной.

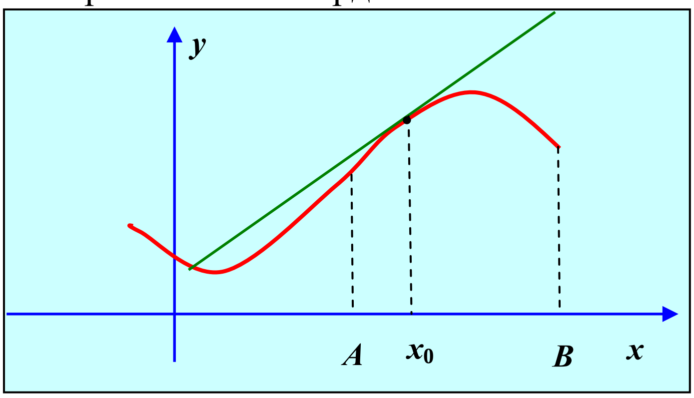


Рис. 2

Уравнение кривой имеет вид $y = f(x)$, а уравнение касательной при $x = x_0$:

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применив теорему Лагранжа, получим:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где c лежит между x и x_0. Применим к первому множителю правой части полученного равенства еще раз теорему Лагранжа:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$$

(здесь c_1 – между x_0 и c). Пусть $x > x_0$.

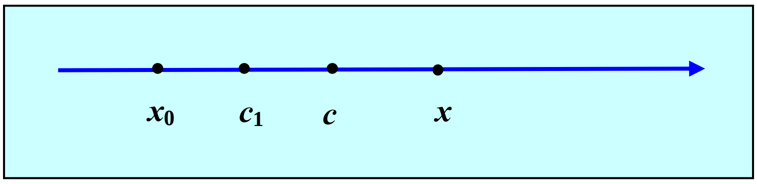


Рис. 3

Тогда

$$x_0 < c_1 < c < x, \quad \text{то есть} \quad c - x_0 > 0, \quad x - x_0 > 0, \quad f''(c_1) < 0,$$

поэтому

$$y - \bar{y} < 0.$$

Если же $x < x_0$, то

$$x < c < c_1 < x_0, \quad \text{поэтому} \quad c - x_0 < 0, \quad x - x_0 < 0, \quad f''(c_1) < 0.$$

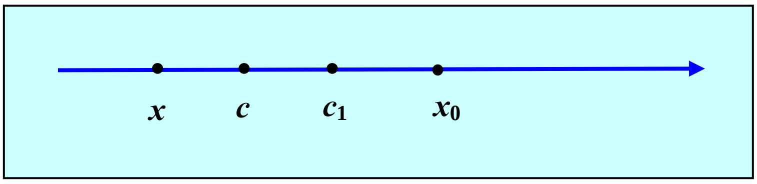


Рис. 4

Но при этом по-прежнему

$$y - \bar{y} < 0.$$

Таким образом, любая точка кривой на данном интервале лежит ниже касательной в точке с абсциссой x_0. Следовательно, кривая является выпуклой.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогичным образом.

Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Замечание. Если в точке перегиба существует касательная к кривой, то в этой точке она пересекает кривую, потому что по одну сторону от данной точки кривая проходит выше касательной, а по другую – ниже.

Теорема 2 (необходимое условие точки перегиба). Если в точке x_0 перегиба кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$.
Доказательство.
Так как при $x = x_0$

$$y = \bar{y} = f(x_0), y' = \bar{y}' = f'(x_0),$$

по формуле Тейлора получаем:

$$y - \bar{y} = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2.$$

Если бы $f''(x_0) \neq 0$, разность $y - \bar{y}$ сохраняла бы постоянный знак в некоторой окрестности точки x_0 , в то время как в точке перегиба эта разность должна менять знак. Следовательно, $f''(x_0) = 0$.

Теорема 3 (достаточное условие точек перегиба). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и $f''(x)$ меняет знак при $x = x_0$, то x_0 – точка перегиба.
Доказательство.
В теореме 1 показано, что знак разности $y - \bar{y}$ определяется знаком $f''(c_1)$, так как $(c - x_0)(x - x_0) > 0$ по обе стороны точки x_0. Следовательно, $y - \bar{y}$ меняет знак при $x = x_0$, то есть x_0 – точка перегиба.

Замечание. Можно доказать, что если в условиях теоремы 5 из лекции 10 критическая точка не является точкой экстремума, то она является точкой перегиба.
Пример. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции

$$x^3 - 6x^2 + x - 12.$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 1, \quad y'' = 6x - 12, \quad y'' = 0 \quad при \quad x = 2,$$

$$y'' < 0 \quad при \quad x < 2, \quad y'' > 0 \quad при \quad x > 2.$$

Таким образом, график функции является выпуклым при $x < 2$, вогнутым при $x > 2$, а $x = 2$ – точка его перегиба.

Асимптоты

Определение 23.4. Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменой точки этого графика до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Рассмотрим три вида асимптот и определим способы их нахождения.

1. Вертикальные асимптоты – прямые, задаваемые уравнениями вида $x = a$. В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a бесконечен.

Пример. Вертикальной асимптотой графика функции

$$y = \frac{1}{x-1}$$

является прямая $x = 1$.

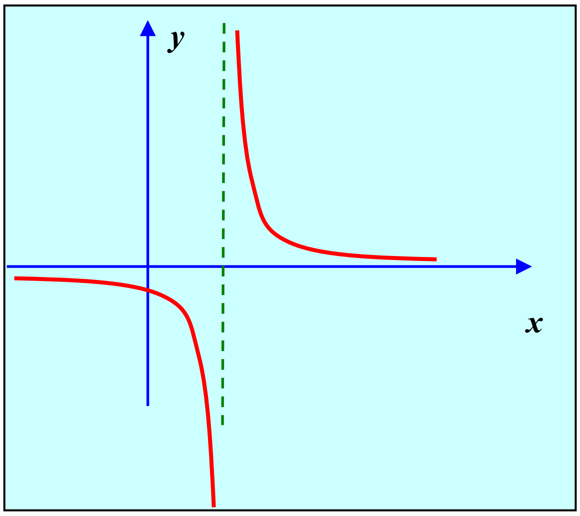


Рис. 5

2. Горизонтальные асимптоты – прямые вида $y = a$. Такие асимптоты имеет график функции, предел которой при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ конечен, т.е.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a.$$

Пример. Горизонтальными асимптотами функции y = arctg x являются

$$y = \frac{\pi}{2} \quad (при \quad x \to +\infty) \quad и \quad y = -\frac{\pi}{2} \quad (при \quad x \to -\infty).$$

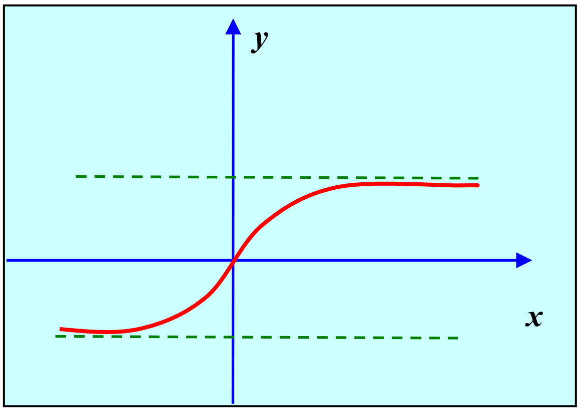


Рис. 6

3. Наклонные асимптоты – прямые вида $y = kx + b$. Найдем k и b. Поскольку

$$\text{при} \quad x \to \infty \quad f(x) \approx kx + b, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

если этот предел существует, конечен и не равен нулю. Однако даже при выполнении этих условий наклонная асимптота может не существовать. Для ее существования требуется, чтобы имелся конечный предел при $x \to \infty$ разности $f(x) - kx$. Этот предел будет равен b , так как

$$\text{при} \quad x \to \infty \quad f(x) - kx \approx b.$$

Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Пример.

Функция

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

имеет бесконечный разрыв при $x = 1$, то есть $x = 1$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to\infty} y = \infty,$$

поэтому горизонтальных асимптот график не имеет. Проверим наличие наклонных асимптот. Для этого вычислим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = 1 = k.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1 = b.$$

Заметим, что оба предела не зависят от знака бесконечности, поэтому прямая $y = x + 1$ является асимптотой графика на обоих концах оси Ox.

Общая схема исследования функции

Результаты, полученные при изучении различных аспектов поведения функции, позволяют сформулировать общую схему ее исследования с целью построения качественного графика, отражающего характерные особенности поведения данной функции. Для этого требуется определить:

1) область определения функции и ее поведение на границах области определения (найти соответствующие односторонние пределы или пределы на бесконечности);

2) четность и периодичность функции;

3) интервалы непрерывности и точки разрыва (указав при этом тип разрыва);

4) нули функции (т.е. значения x, при которых $f(x) = 0$) и области постоянства знака;

5) интервалы монотонности и экстремумы;

6) интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба;

7) асимптоты графика функции.

Заметим, что подробный ответ на первый вопрос фактически содержит ответы на второй и отчасти на седьмой вопросы. Действительно, если в область определения не входят отдельно расположенные точки и найдены односторонние пределы функции в этих точках, то тем самым указан характер разрывов. В частности, если какой-либо из этих односторонних пределов бесконечен, через точку разрыва (или через соответствующую границу области определения) проходит вертикальная асимптота. Если область определения функции не ограничена слева или справа и на бесконечности соответствующего знака существует конечный предел функции, то график имеет на указанном конце оси Ox горизонтальную асимптоту.

Пример. Исследуем функцию

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}$$

и построим ее график.

1. Область определения функции:

$$x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty).$$

Поведение на границах:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

2.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} \neq \pm f(x),$$

следовательно, функция не является четной или нечетной (в этом случае говорят, что рассматриваемая функция общего типа). Функция не является периодической, так как периодическая функция, не равная константе, не может иметь предела на бесконечности.

3. Так как функция является элементарной, она непрерывна во всей области определения, т.е. промежутки непрерывности

$$x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty).$$

Из ответа на первый вопрос следует, что $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода (так как односторонние пределы в этой точке бесконечны).

4. $f(x) \neq 0$ ни при каких значениях x (следовательно, график функции не пересекает ось Ox). $f(x) < 0$ при $x < 1$, $f(x) > 0$ при $x > 1$.

5. Для ответа на этот вопрос найдем производную данной функции.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \quad при \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$f'(x) < 0 \quad при \quad x \in (1-\sqrt{2};1) \cup (1;1+\sqrt{2}) -$$

интервалы убывания функции;

$$f'(x) > 0 \quad при \quad x \in (-\infty;1-\sqrt{2}) \in (1+\sqrt{2};+\infty) -$$

интервалы возрастания функции. При $x = 1-\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x = 1-\sqrt{2}$ - точка максимума. При $x = 1+\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», следовательно, $x = 1+\sqrt{2}$ - точка минимума.

6. $$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$$

ни при каких значениях x. Следовательно, функция не имеет точек перегиба.

$$f''(x) < 0 \quad при \quad x < 1, \quad f''(x) > 0 \quad при \quad x > 1,$$

поэтому на интервале $(-\infty;1)$ функция выпукла, а на интервале $(1;+\infty)$ - вогнута.

7. При ответе на первый вопрос показано, что $x = 1$ – вертикальная асимптота графика функции. Там же выяснено, что при $x \to \infty$ функция не имеет конечного предела, следовательно, не имеет и горизонтальных асимптот. Наклонная асимптота $y = x + 1$ найдена в примере 2 настоящей лекции.

Построим график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ на основе результатов проведенного исследования.

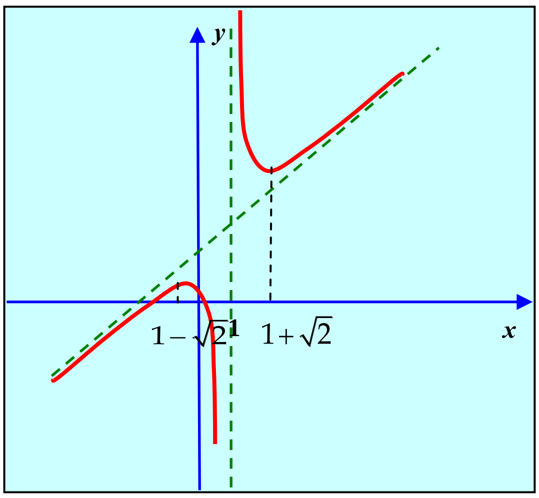


Рис. 7

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«*Выпуклость. Асимптоты*»

Задача 1.
Найти интервалы выпуклости функции

$$y=(x-5)^7+4x-7.$$

Указание

Функция выпукла при условии

$$f''(x)<0.$$

Решение

Область определения функции: $-\infty,+\infty$.

$$y'=5(x-5)^4+4,\quad y''=20(x-5)<0\Rightarrow x<5.$$

Ответ: $-\infty,5$.

Задача 2.
Найти интервалы вогнутости функции

$$y=\frac{x^2}{9}-\sqrt[3]{x-2}.$$

Указание

Границами интервалов выпуклости и вогнутости могут быть не только точки, в которых вторая производная равна нулю, но и точки, в которых она не существует.

Решение

Область определения функции: $-\infty,+\infty$.

$$y'=\frac{2}{9}x-\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y''=\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x-2)^{-\frac{5}{3}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

Представим вторую производную в виде:

$$y''=\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{5}{3}}+1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$$

и исследуем знак полученного выражения. Корень знаменателя: $x = 2$. Найдем корень числителя.

$$(x-2)^{\frac{5}{3}}=-1,\quad x-2=(-1)^{\frac{3}{5}}=-1,\quad x=1.$$

Знак второй производной:

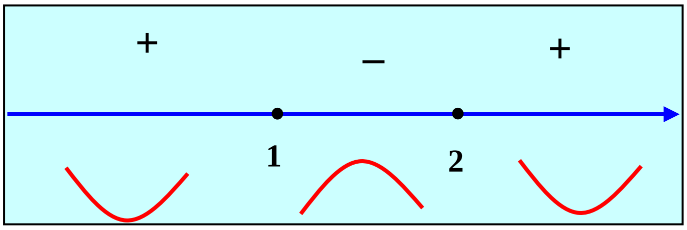


Рис. 8

Следовательно, интервалы вогнутости: $(-\infty,1),\ (2,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,1),\ (2,+\infty)$.

Задача 3.

Найти точки перегиба функции

$$y=\ln(1+x^2).$$

Указание

В точках перегиба вторая производная меняет знак, то есть требуется найти точки, в которых $y''=0$ или не существует.

Решение

Область определения функции: $(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\frac{2x}{1+x^2},\quad y''=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$y''=0\Rightarrow 1-x^2=0,\quad x=\pm 1.$$

Проверим, меняется ли знак второй производной в найденных точках.

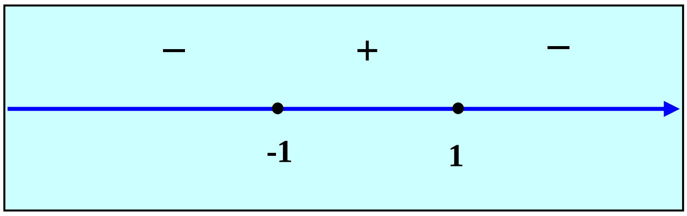


Рис. 9

Значит, $x=\pm 1$ – точки перегиба.

Ответ: $x=\pm 1$.

Задача 4.

При каких значениях a и b точка (-2,0) служит точкой перегиба линии

$$y=ax^3+bx^2+5x-6?$$

Указание

Для определения a и b требуется решить систему

$$\begin{cases} y''(-2)=0 \\ y(-2)=0 \end{cases}.$$

Решение

$$y' = 3ax^2 + 2bx + 5, \quad y'' = 6ax + 2b.$$

Для того чтобы (-2,0) была точкой перегиба, нужно, чтобы *y''*(-2)=0.

$$6a(-2) + 2b = 0, \quad b = 6a.$$

При этом точка (-2,0) лежит на кривой, то есть *y*(-2)=0. Подставим в это равенство $b = 6a$:

$$-8a + 24a - 10 - 6 = 0, \quad 16a - 16 = 0, \quad a = 1, \quad b = 6.$$

Ответ: $a = 1$, $b = 6$.

Задача 5.

Сколько асимптот имеет график функции

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} \ ?$$

Указание

График имеет вертикальные асимптоты, если

$$\exists\, x_0 : \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A.$$

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad |k| < \infty \ , \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx \ = b \quad |b| < \infty \ .$$

Решение

Исследуем функцию на наличие асимптот разных видов.

1) $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода, поэтому прямые $x = \pm 1$ – горизонтальные асимптоты графика.

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 < \infty.$$

Следовательно, прямая $y = 2$ – горизонтальная асимптота графика на обоих концах оси Ox. При этом наклонных асимптот у функции быть не может.

Итак, график имеет 3 асимптоты (две вертикальных и одну горизонтальную).

Ответ: 3.

Задача 6.

Асимптоты какого вида имеет график функции

$$y = xe^{\frac{2}{x}} + 1\,?$$

Указание

График имеет вертикальные асимптоты, если

$$\exists\, x_0 : \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A.$$

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad (|k| < \infty), \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b \quad (|b| < \infty).$$

Решение

1)Точка разрыва функции: $x = 0$. При этом

$$\lim_{x\to+0}\left(xe^{\frac{2}{x}} + 1\right) = 1 + \lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{t\to\infty}\frac{e^{2t}}{t} =$$

$$= 1 + \lim_{t\to\infty}\frac{(e^{2t})'}{t'} = 1 + \lim_{t\to\infty}\frac{2e^{2t}}{1} = \infty.$$

Если хотя бы один из односторонних пределов в данной точке бесконечен, через точку проходит вертикальная асимптота. Значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{2}{x}} + 1\right) = \infty \cdot 1 + 1 = \infty,$

следовательно, горизонтальных асимптот нет.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{2}{x}} + 1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{2}{x}} + \dfrac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1;$

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 1\right) = \lim_{t\to0}\left(\frac{e^{2t} - 1}{t} + 1\right) = 2 + 1 = 3.$$

Значит, прямая $y = x + 3$ – наклонная асимптота графика.

Ответ: график имеет вертикальную и наклонную асимптоту.

2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. ПРОИЗВОДНЫЕ

2.1.1. *Предел и непрерывность. Частные производные*

Переменная z (с областью изменения Z) называется **функцией двух независимых переменных** x,y в множестве M, если каждой паре (x,y) из множества M по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение z из Z.
Множество M, в котором заданы переменные $x,y,$ называется **областью определения функции**, а сами x,y – ее **аргументами**.
Обозначения: $z = f(x,y)$, $z = z(x,y)$.
Примеры.
1. $z = xy$, $z = x^2 + y^2$ - функции, определенные для любых действительных значений x,y.
2. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ –
функция, областью определения которой являются решения неравенства

$$x^2 + y^2 \le 1.$$

Замечание. Так как пару чисел (x,y) можно считать координатами некоторой точки на плоскости, будем впоследствии использовать термин «точка» для пары аргументов функции двух переменных, а также для упорядоченного набора чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, являющихся аргументами функции нескольких переменных.

Переменная z (с областью изменения Z) называется **функцией нескольких независимых переменных** $x_1,x_2,\ldots,x_n$ в множестве M, если каждому набору чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из множества M по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение z из Z. Понятия аргументов и области определения вводятся так же, как для функции двух переменных.
Обозначения:

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad z = z(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Геометрическое изображение функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, определенную в некоторой области M на плоскости Oxy. Тогда множество точек трехмерного пространства с координатами (x,y,z), где

$$x, y \in M, z = f(x, y),$$

является графиком функции двух переменных. Поскольку уравнение $z = f(x,y)$ определяет некоторую поверхность в трехмерном пространстве, она и будет геометрическим изображением рассматриваемой функции.

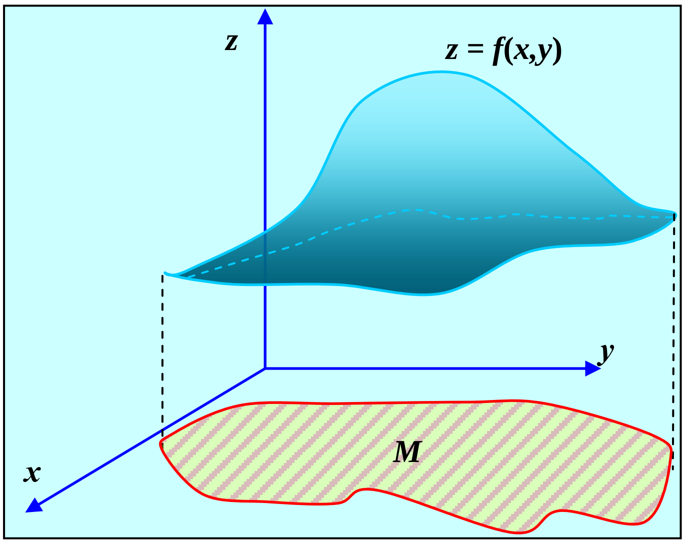


Рис. 1

Примерами могут служить уравнения плоскости

$$z = ax + by + c$$

и поверхностей второго порядка:

$$z = x^2 + y^2 \text{ (параболоид вращения),}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (конус) и т.д.}$$

Замечание. Для функции трех и более переменных будем пользоваться термином «поверхность в n-мерном пространстве», хотя изобразить подобную поверхность невозможно.

Линии и поверхности уровня

Для функции двух переменных, заданной уравнением $z = f(x,y)$, можно рассмотреть множество точек (x,y) плоскости Oxy, для которых z принимает одно и то же постоянное значение, то есть $z = \text{const}$. Эти точки образуют на плоскости линию, называемую **линией уровня**.

Пример.

Найдем линии уровня для поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$. Их уравнения имеют вид $x^2 + y^2 = 4 - c$ (c=const) – уравнения концентрических окружностей с центром в начале координат и с радиусами $\sqrt{4-c}$. Например, при c=0 получаем окружность $x^2 + y^2 = 4$.

Для функции трех переменных $u = u\,(x, y, z)$ уравнение $u\,(x, y, z) = c$ определяет поверхность в трехмерном пространстве, которую называют **поверхностью уровня**.

Пример.
Для функции $u = 3x + 5y - 7z - 12$ поверхностями уровня будет семейство параллельных плоскостей, задаваемых уравнениями $3x + 5y - 7z - 12 + c = 0$.

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Введем понятие ***δ*-окрестности** точки M_0 (x_0, y_0) на плоскости Oxy как круга радиуса δ с центром в данной точке. Аналогично можно определить δ-окрестность в трехмерном пространстве как шар радиуса δ с центром в точке M_0 (x_0, y_0, z_0). Для n-мерного пространства будем называть δ-окрестностью точки M_0 множество точек M с координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющими условию

$$\rho(MM_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2} < \delta,$$

где $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ –

координаты точки M_0. Иногда это множество называют «шаром» в n-мерном пространстве.

Число А называется **пределом** функции нескольких переменных
$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$
в точке M_0, если
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$
такое, что $|f(M) - A| < \varepsilon$ для любой точки M из δ-окрестности M_0.

Обозначения:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Необходимо учитывать, что при этом точка M может приближаться к M_0, условно говоря, по любой траектории внутри δ-окрестности точки M_0.

Поэтому следует отличать предел функции нескольких переменных в общем смысле от так называемых **повторных пределов**, получаемых последовательными предельными переходами по каждому аргументу в отдельности.

Примеры.

1. Покажем, что функция

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

не имеет предела при M, стремящемся к $O(0,0)$. Действительно, если в качестве линии, по которой точка M приближается к началу координат, выбрать прямую $y = x$, то на этой прямой

$$z = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Если же траекторией движения считать прямую $y = 2x$, то

$$z = \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

Следовательно, предел в точке (0,0) не существует.

2. Найдем повторные пределы функции

$$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \quad при \quad x \to 0, y \to 0:$$

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \frac{-y + y^2}{y} = y - 1,$$

$$\lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1.$$

Если же произвести предельные переходы в обратном порядке, получим:

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{x + x^2}{x} = x + 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \psi(x) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1.$$

Таким образом, повторные пределы оказались различными (откуда следует, конечно, что функция не имеет в точке (0,0) предела в обычном смысле).

Замечание. Можно доказать, что из существования предела в данной точке в обычном смысле и существования в этой точке пределов по отдельным аргументам следует существование и равенство повторных пределов. Обратное утверждение неверно.

Функция
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
называется **непрерывной** в точке
$M_0\, M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$,
если

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1\to x_1^0 \\ x_2\to x_2^0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M_0).$$

Если ввести обозначения

$$\Delta f = f(M) - f(M_0), \quad \Delta x_i = x_i - x_i^0,$$
$$\Delta\rho = \sqrt{(\Delta\, x_1)^2 + (\Delta\, x_2)^2 + \ldots + (\Delta\, x_n)^2},$$

то это условие можно переписать в форме

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta f = 0.$$

Внутренняя точка M_0 области определения функции $z = f(M)$ называется **точкой разрыва** функции, если в этой точке не выполняется условие

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta f = 0.$$

Замечание. Множество точек разрыва может образовывать на плоскости или в пространстве **линии** или **поверхности разрыва**.

Примеры.

1. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в любой точке плоскости Оxy. Действительно,

$$\Delta z = ((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2) =$$
$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

2. Единственной точкой разрыва функции

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

является точка (0,0).

3. Для функции

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

линией разрыва является прямая $x + y = 0$.

Свойства пределов и непрерывных функций

Так как определения предела и непрерывности для функции нескольких переменных практически совпадает с соответствующими определениями для функции одной переменной, то для функций нескольких переменных сохраняются все свойства пределов и непрерывных функций, доказанные в первой части курса, а именно:

1) Если существуют

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \quad \lim_{M \to M_0} g(M) = B,$$

то существуют и

$$\lim_{M\to M_0}(f(M)+g(M))=A+B,$$
$$\lim_{M\to M_0} kf(M)=kA,$$
$$\lim_{M\to M_0} f(M)\cdot g(M)=AB,$$
$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{A}{B} \quad (если \quad B\neq 0).$$

2) Если
$$f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n), \quad а \quad x_i(P)=\varphi_i(t_1,t_2,...,t_m),$$
и для любого i существуют пределы
$$\lim_{P\to P_0}\varphi_i(P)=x_i^0$$
и существует
$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A, \quad где \quad M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0),$$
то существует и предел сложной функции
$$f(x_1(t_1,t_2,...,t_m),x_2(t_1,t_2,...,t_m),...,x_n(t_1,t_2,...,t_m))$$
$$при \quad t_j\to t_j^0, \quad где \quad (t_1^0,t_2^0,...,t_m^0) -$$
координаты точки P_0.

3) Если функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке M_0, то в этой точке непрерывны и функции $f(M) + g(M)$, $kf(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$ (если $g(M_0)$ не равно нулю).

4) Если функции
$$x_i(P)=\varphi_i(t_1,t_2,...,t_m)$$
непрерывны в точке
$$P_0(t_1^0,t_2^0,...,t_m^0),$$
а функция
$$f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$$
непрерывна в точке
$$M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0), \quad где \quad x_i^0=\varphi_i(P_0),$$
то сложная функция
$$f(x_1(t_1,t_2,...,t_m),x_2(t_1,t_2,...,t_m),...,x_n(t_1,t_2,...,t_m))$$
непрерывна в точке P_0.

5) Функция
$$f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n),$$
непрерывная в замкнутой ограниченной области D, принимает в этой области свое наибольшее и наименьшее значения.

6) Если функция
$$f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n),$$
непрерывная в замкнутой ограниченной области D, принимает в этой области значения A и B, то она принимает в области D и любое промежуточное значение, лежащее между A и B.

7) Если функция

$$f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

непрерывная в замкнутой ограниченной области D, принимает в этой области значения разных знаков, то найдется по крайней мере одна точка из области D, в которой $f = 0$.

Частные производные

Рассмотрим изменение функции

$$f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

при задании приращения только одному из ее аргументов – x_i , и назовем его $\Delta_{x_i} f$.

Частной производной функции

$$f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

по аргументу x_i называется

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначения:

$$f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется фактически как производная функции *одной переменной* – x_i. Поэтому для нее справедливы все свойства производных, доказанные для функции одной переменной.

Замечание. При практическом вычислении частных производных пользуемся обычными правилами дифференцирования функции одной переменной, полагая аргумент, по которому ведется дифференцирование, переменным, а остальные аргументы – постоянными.

Примеры.

1. $z = 2x^2 + 3xy - 12y^2 + 5x - 4y + 2,$

$z'_x = 4x + 3y + 5, \quad z'_y = 3x - 24y - 4.$

2. $z = x^y, \quad z'_x = y \cdot x^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$

3. $u = xyz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy.$

Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных

Рассмотрим уравнение поверхности $z = f(x,y)$ и проведем плоскость x = const. Выберем на линии пересечения плоскости с поверхностью точку $M (x,y)$.

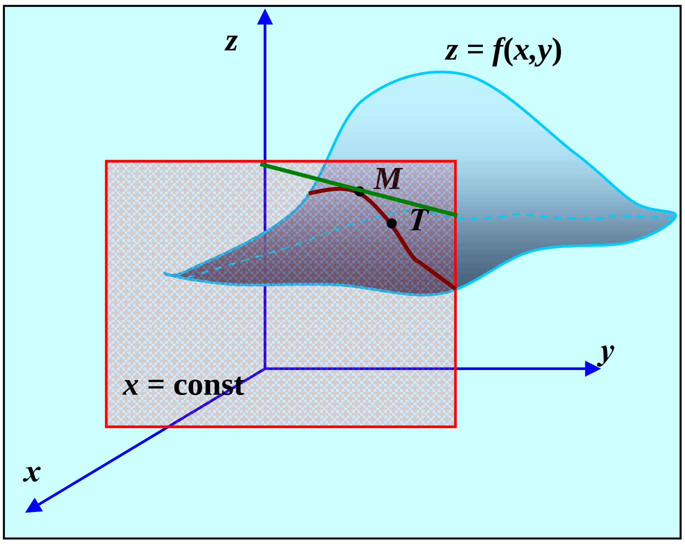


Рис. 2

Если задать аргументу y приращение Δy и рассмотреть точку T на кривой с координатами (x, $y+\Delta y$, $z+\Delta_y z$), то тангенс угла, образованного секущей MT с положительным направлением оси Oy, будет равен $\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$. Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$, получим, что частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ равна тангенсу угла, образованного касательной к полученной кривой в точке M с положительным направлением оси Oy. Соответственно частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ равна тангенсу угла с осью Ox касательной к кривой, полученной в результате сечения поверхности $z = f(x,y)$ плоскостью y = const.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«*Предел и непрерывность. Частные производные*»

Задача 1.

Определить вид линий уровня функции

$$z = x^2 - y^2.$$

Указание

Уравнения линий уровня:

$$f(x,y) = C \qquad C = const \; .$$

Решение

Определим вид линий, задаваемых уравнениями

$$x^2 - y^2 = C, \quad \frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1 - \textit{гиперболы}.$$

Ответ: гиперболы.

Задача 2.
Дана область:

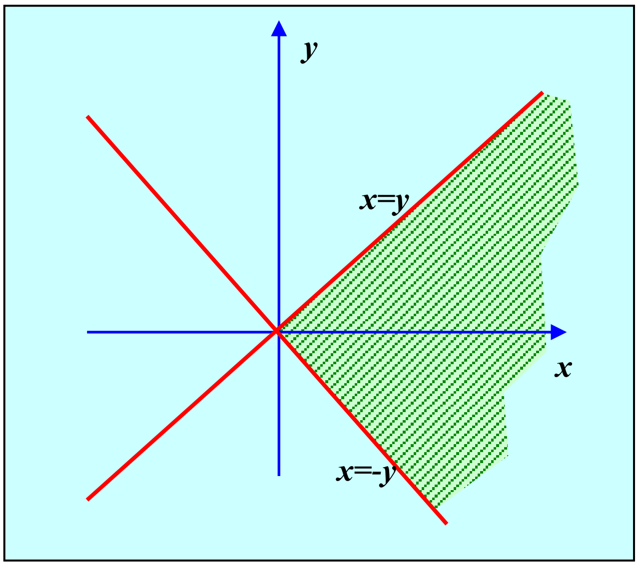


Рис. 3

и функции:

1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ 2) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$ 3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$

4) $z=\ln xy$ 5) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$.

Для какой из них данная область является областью определения?

Указание

Найдите область определения каждой из данных функций, учитывая соответствующие ограничения (подкоренные выражения должны быть неотрицательными, логарифмируемые выражения – положительными, знаменатели дробей – не равными нулю, а аргумент арксинуса может принимать значения только из отрезка [0,1]).

Решение

Найдем область определения каждой из данных функций:

1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$.

Эта система неравенств задает первую четверть координатной плоскости:

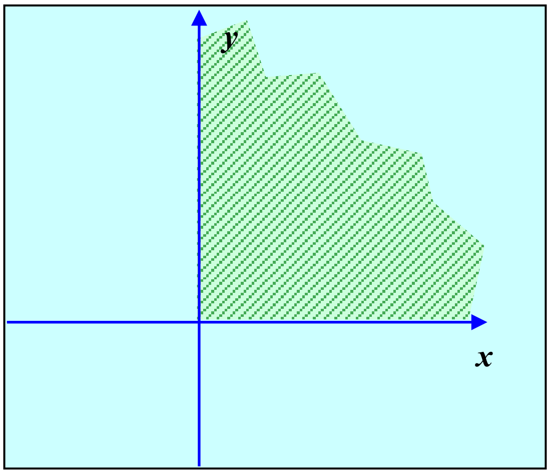


Рис. 4

то есть не совпадает с приведенным рисунком.

2) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -y \\ x\ge y \end{cases}$.

Именно эта область приведена на рисунке.

3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$: $\begin{cases} y\ge 0 \\ x-\sqrt{y}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ y\le x^2 \end{cases}$ –

область, ограниченная снизу осью Ox, а сверху – параболой $y = x^2$:

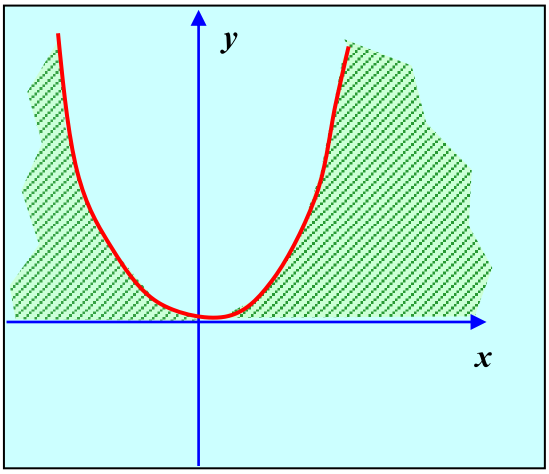


Рис. 5

4) $z=\ln xy$: $xy>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right.$ –

точки, лежащие в первой и третьей координатных четвертях:

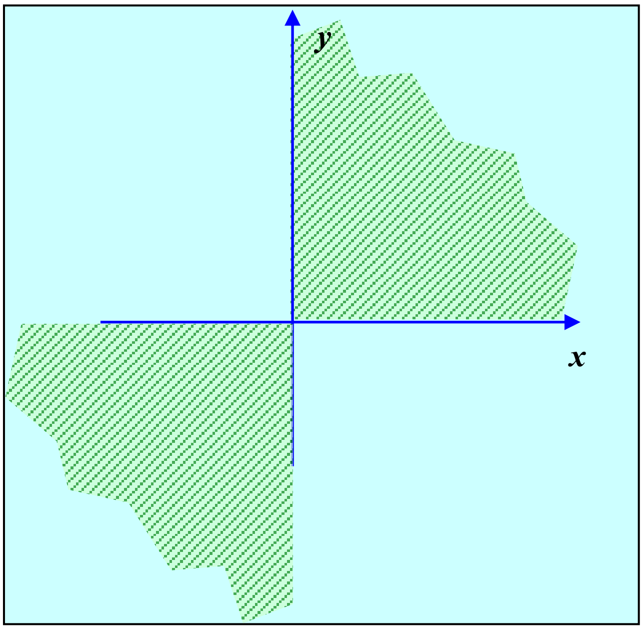


Рис. 6

5) $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$: $\quad -1 \le \dfrac{y-1}{x} \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \le 1+x \\ y \ge 1-x \end{cases} \quad при \quad x>0, \qquad \begin{cases} y \ge 1+x \\ y \le 1-x \end{cases} \quad при \quad x<0.$$

Соответствующая область выглядит так:

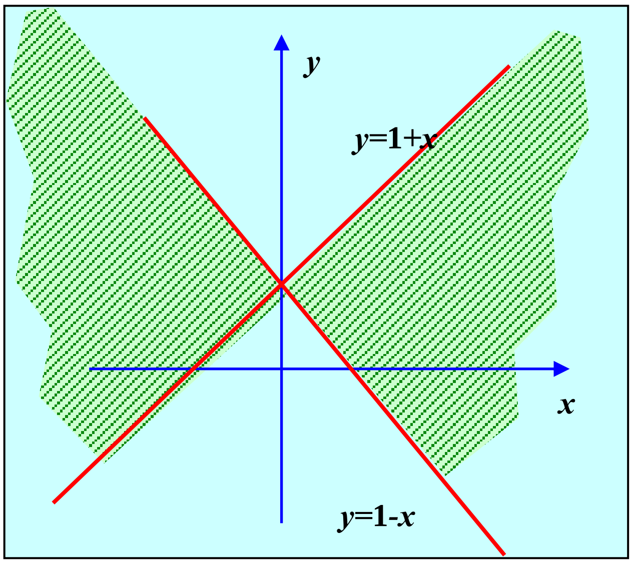


Рис. 7

Ответ: приведена область определения функции

$$z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}.$$

Задача 3.

Найти повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) \quad и \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Указание

При вычислении предела по одному из аргументов остальные аргументы выступают как параметры.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)=2;$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2}\right)=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=2,\quad \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=1.$

Задача 4.

Найти частные производные функции

$$z=x^2-5xy+3y^2+6x-3y+12$$

в точке (1,1).

Указание

При дифференцировании функции нескольких переменных по одному из аргументов остальные аргументы выступают как параметры.

Решение

$$z'_x=2x-5y+6;\quad z'_x(1,1)=2-5+6=3;$$

$$z'_y=-5x+6y-3;\quad z'_y(1,1)=-5+6-3=-2.$$

Ответ: $z'_x=3,\quad z'_y=-2.$

Задача 5.

Найти частную производную по *y* функции

$$z=(1+xy)^y.$$

Указание

Поскольку и основание степени, и показатель зависят от *y*, нужно применить формулу логарифмического дифференцирования.

Решение

$$z'_y=(1+xy)^y\left(\ln(1+xy)^y\right)'_y=(1+xy)^y\left(y\ln(1+xy)\right)'_y=$$

$$=(1+xy)^y\left(1\cdot\ln(1+xy)+y\cdot\frac{1}{1+xy}(1+xy)'_y\right)=$$

$$= \ 1+xy\ ^{y}\left(\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right).$$

Ответ: $z'_y = \ 1+xy\ ^{y}\left(\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right).$

Задача 6.
Для функции

$$u=\ln\ x^3+y^2+z+1$$

найти

$$u'_x+u'_y+u'_z \quad при \quad x=y=z=1.$$

Указание

При дифференцировании функции нескольких переменных по одному из аргументов остальные аргументы выступают как параметры.

Решение

$$u'_x=\frac{1}{x^3+y^2+z+1}\cdot\ x^3+y^2+z+1\ '_x=\frac{3x^2}{x^3+y^2+z+1},$$

$$u'_x(1,1,1)=\frac{3}{4};$$

$$u'_y=\frac{1}{x^3+y^2+z+1}\cdot\ x^3+y^2+z+1\ '_y=\frac{2y}{x^3+y^2+z+1},$$

$$u'_y(1,1,1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

$$u'_z=\frac{1}{x^3+y^2+z+1}\cdot\ x^3+y^2+z+1\ '_z=\frac{1}{x^3+y^2+z+1},$$

$$u'_z(1,1,1)=\frac{1}{4};\quad u'_x+u'_y+u'_z=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1,5.$$

Ответ: 1,5.

2.1.2. *Дифференциал. Производные сложных функций*

При исследовании вопросов, связанных с дифференцируемостью, ограничимся случаем функции трех переменных, поскольку все доказательства для большего количества переменных проводятся так же.

Полным приращением функции $u = f(x, y, z)$ называется

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z).$$

Теорема 1. Если частные производные

$$f'_x,\ f'_y,\ f'_z$$

существуют в точке (x_0 , y_0 , z_0) и в некоторой ее окрестности и непрерывны в точке (x_0 , y_0 , z_0) , то

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y +$$
$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y + \gamma\cdot\Delta z,$$

где α, β, γ – бесконечно малые, зависящие от Δx, Δy, Δz.

Доказательство.

Представим полное приращение Δu в виде:

$$\Delta u = (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)) +$$
$$+(f(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)) +$$
$$+(f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)),$$

где каждая разность представляет собой частное приращение функции только по одной из переменных. Из условия теоремы следует, что к этим разностям можно применить теорему Лагранжа. При этом получим:

$$\Delta u = f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z)\cdot\Delta y +$$
$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z)\cdot\Delta z,$$

Так как по условию теоремы частные производные непрерывны в точке (x_0 , y_0 , z_0), можно представить их в виде:

$$f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f'_x(x_0, y_0, z_0) + \alpha,$$
$$f'_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y, z_0+\Delta z) = f'_y(x_0, y_0, z_0) + \beta,$$
$$f'_z(x_0, y_0, z_0+\theta_2\Delta z) = f'_z(x_0, y_0, z_0) + \gamma,$$
$$\text{где}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha = \lim_{\Delta y\to 0}\beta = \lim_{\Delta z\to 0}\gamma = 0.$$

Теорема доказана.

Можно показать, что

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = o(\Delta\rho),$$

где

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Действительно, α, β и γ – бесконечно малые при $\rho \to 0$, а

$$\frac{\Delta x}{\Delta\rho}, \frac{\Delta y}{\Delta\rho}, \frac{\Delta z}{\Delta\rho} -$$

ограниченные (т.к. их модули не превышают 1).

Тогда приращение функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, можно представить в виде:

$$\Delta u = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + C\cdot\Delta z + o(\Delta\rho),$$
$$\text{где}$$
$$A = f'_x(x_0, y_0, z_0),$$
$$B = f'_y(x_0, y_0, z_0),$$
$$C = f'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Если приращение функции $u = f(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) можно представить в виде

$$\Delta u = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\Delta\rho),$$

то функция называется **дифференцируемой** в этой точке, а выражение

$$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z -$$

главной линейной частью приращения или **полным дифференциалом** рассматриваемой функции.

Обозначения: du, $df(x_0, y_0, z_0)$.

Так же, как в случае функции одной переменной, дифференциалами независимых переменных считаются их произвольные приращения, поэтому

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

Замечание 1. Итак, утверждение «функция дифференцируема» не равнозначно утверждению «функция имеет частные производные» - для дифференцируемости требуется еще и непрерывность этих производных в рассматриваемой точке.

Замечание 2. Если в последней формуле считать

$$d_x u = u'_x \cdot dx, \quad d_y u = u'_y \cdot dy \quad и \quad d_z u = u'_z \cdot dz$$

частными дифференциалами данной функции (как функции одного из аргументов), то можно сказать, что полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u.$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

По аналогии с линеаризацией функции одной переменной можно при приближенном вычислении значений функции нескольких переменных, дифференцируемой в некоторой точке, заменять ее приращение дифференциалом. Таким образом, можно находить приближенное значение функции нескольких (например, двух) переменных по формуле:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y,$$

где

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0.$$

Пример.

Вычислить приближенное значение

$$\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

и выберем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Тогда $\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$; $\Delta y = 1{,}97 - 2 = -0{,}03$. Найдем

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{3{x_0}^2}{2\sqrt{{x_0}^3 + {y_0}^3}} = \frac{3 \cdot 1}{2\sqrt{1+8}} = \frac{1}{2},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{3y_0^2}{2\sqrt{x_0^3 + y_0^3}} = \frac{3 \cdot 4}{2\sqrt{1+8}} = 2.$$

Следовательно, учитывая, что $f\,(1,\,2) = 3$, получим:

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 2,95.$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть аргументы функции $z = f\,(x,\,y)$ являются, в свою очередь, функциями переменных u и v: $x = x\,(u,\,v)$, $y = y\,(u,\,v)$. Тогда функция f тоже есть функция от u и v. Выясним, как найти ее частные производные по аргументам u и v, не делая непосредственной подстановки
$z = f\,(\,x(u,\,v),\,y(u,\,v))$. При этом будем предполагать, что все рассматриваемые функции имеют частные производные по всем своим аргументам.

Зададим аргументу u приращение Δu, не изменяя аргумент v. Тогда

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta_u x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta_u y + \alpha \cdot \Delta_u x + \beta \cdot \Delta_u y.$$

Если же задать приращение только аргументу v, получим:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta_v x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta_v y + \alpha \cdot \Delta_v x + \beta \cdot \Delta_v y.$$

Разделим обе части первого равенства на Δu, а второго – на Δv и перейдем к пределу соответственно при

$$\Delta u \to 0 \quad и \quad \Delta v \to 0.$$

Учтем при этом, что в силу непрерывности функций x и y

$$\lim_{\Delta u \to 0} \Delta_u x = \lim_{\Delta u \to 0} \Delta_u y = \lim_{\Delta v \to 0} \Delta_v x = \lim_{\Delta v \to 0} \Delta_v y = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $f\,(x,y)$ является фактически функцией одной переменной t, и можно, используя полученные формулы и заменяя в них частные производные x и y по u и v на обычные производные по t (разумеется, при условии дифференцируемости функций $x(t)$ и $y(t)$), получить выражение для $\dfrac{df}{dt}$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Предположим теперь, что в качестве t выступает переменная x, то есть x и y связаны соотношением $y = y\ (x)$. При этом, как и в предыдущем случае, функция f является функцией одной переменной x. Используя предыдущую формулу при $t = x$ и учитывая, что

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

получим, что

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Обратим внимание на то, что в этой формуле присутствуют две производные функции f по аргументу x: слева стоит так называемая **полная производная**, в отличие от частной, стоящей справа.

Примеры.

1. Пусть $z = xy$, где $x = u^2 + v$, $y = uv^2$. Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. Для этого предварительно вычислим частные производные трех заданных функций по каждому из своих аргументов:

$$z'_x = y,\quad z'_y = x,\quad x'_u = 2u,$$

$$x'_v = 1,\quad y'_u = v^2,\quad y'_v = 2uv.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = y \cdot 2u + x \cdot v^2 = uv^2 \cdot 2u + (u^2 + v)v^2 = 3u^2v^2 + v^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = y \cdot 1 + x \cdot 2uv = uv^2 + (u^2 + v)2uv = 2u^2v + 3uv^2.$$

(В окончательный результат подставляем выражения для x и y как функций u и v).

2. Найдем полную производную функции $z = \sin\,(x + y^2)$, где $y = \cos x$.

$$\frac{dz}{dx} = \cos(x + y^2) + \cos(x + y^2) \cdot 2y \cdot (-\sin x) =$$

$$= \cos(x + \cos^2 x)(1 - 2\sin x \cos x) =$$

$$= \cos(x + \cos^2 x)(1 - \sin 2x).$$

Инвариантность формы дифференциала

Воспользовавшись формулами для частных производных сложной функции, выразим полный дифференциал функции $z = f\ (x,\ y)$, где $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, через дифференциалы переменных u и v:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv) =$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u})du + (\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v})dv = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Следовательно, форма записи дифференциала сохраняется для аргументов u и v такой же, как и для функций этих аргументов x и y, то есть является **инвариантной** (неизменной).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«*Дифференциал. Производные сложной функции*»

Задача 1.

Найти частный дифференциал функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

по переменной y при $x = -3$, $y = 4$, $z = 0$, $\Delta y = 0{,}1$.

Указание

Частный дифференциал

$$d_y u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y.$$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(-3, 4, 0) = \frac{4}{\sqrt{9 + 16 + 0}} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$$

$$d_y u(-3, 4, 0) = 0{,}8 \cdot \Delta y = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08.$$

Ответ: 0,08.

Задача 2.

Найти полный дифференциал функции

$$z = arctg\,\frac{x}{y}.$$

Указание

Полный дифференциал функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

Ответ: $dz=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$.

Задача 3.
Вычислить приближенно $(0{,}98)^{2{,}03}$.

Указание

Рассмотрите функцию $z = x^y$ и воспользуйтесь формулой

$$f\;\;x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\;\;\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0).$$

Решение

Рассмотрим функцию $z = x^y$. Найдем ее частные производные:

$$z'_x=y\cdot x^{y-1},\quad z'_y=x^y\ln x.$$

Пусть

$$x_0=1,\quad y_0=2,\quad \Delta x=-0{,}02,\quad \Delta y=0{,}03.$$

Тогда

$$(0{,}98)^{2{,}03}\approx 1^2+z'_x(1,2)\Delta x+z'_y(1,2)\Delta y=$$
$$=1+2\cdot1\cdot(-0{,}02)+1\cdot0\cdot0{,}03=1-0{,}04=0{,}96.$$

Ответ: 0,96.

Задача 4.
Найти $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z=x^2\ln y,\quad x=\frac{v}{u},\quad y=u+5v.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Решение

Найдем частные производные, которые используются при вычислении $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 5.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\ln y\frac{1}{u} + \frac{x^2}{y}\cdot 5.$$

Остается подставить в эту формулу выражения для x и y через u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2\frac{v}{u}\ln(u+5v)\frac{1}{u} + \frac{v^2}{u^2}\cdot\frac{1}{u+5v}\cdot 5 =$$

$$= \frac{2v}{u^2}\ln(u+5v) + \frac{5v^2}{u^2(u+5v)} =$$

$$= \frac{v}{u^2}\left(2\ln(u+5v) + \frac{5v}{u+5v}\right).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v}{u^2}\left(2\ln(u+5v) + \frac{5v}{u+5v}\right).$

Задача 5.

Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = arctg(xy), \quad x = 5\cos t, \quad y = 5\sin t.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2y^2}\cdot y = \frac{y}{1+x^2y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2y^2}\cdot x = \frac{x}{1+x^2y^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = -5\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 5\cos t.$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{y}{1+x^2y^2}\cdot(-5\sin t)+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot 5\cos t=$$

$$=\frac{5\sin t(-5\sin t)+5\cos t\cdot 5\cos t}{1+x^2y^2}=$$

$$=\frac{25(\cos^2 t-\sin^2 t)}{1+25\cos^2 t\cdot 25\sin^2 t}=\frac{100\cos 2t}{625\sin^2 2t+4}.$$

Ответ: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{100\cos 2t}{625\sin^2 2t+4}$.

Задача 6.

Найти полную производную $\dfrac{dz}{dx}$ при $x=2$, если

$$z=\arcsin\frac{x}{y},\quad y=\sqrt{x^2+1}.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{x}{y^2}=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{y\sqrt{x^2+1}-x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot 1\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x^2+1};$$

$$\frac{dz}{dx}(2)=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{5}$.

2.1.3. *Неявные функции. Производные высших порядков*

Функция y от x, определяемая уравнением
$F(x, y) = 0$,
называется **неявной функцией**.

Конечно, далеко не каждое уравнение подобного вида определяет y как однозначную (и, тем более, непрерывную) функцию от x. Например, уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

задает y как двузначную функцию от x:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{для} \quad x \in [-a, a].$$

Условия существования однозначной и непрерывной неявной функции определяются следующей теоремой:

Теорема 1 (без доказательства). Пусть:

1) функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в некотором прямоугольнике
$$x_0 - \Delta \le x \le x_0 + \Delta, \quad y_0 - \Delta' \le y \le y_0 + \Delta'$$
с центром в точке (x_0, y_0);
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) при постоянном x $F(x,y)$ монотонно возрастает (или убывает) с возрастанием y.

Тогда

а) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение
$$F(x, y) = 0$$
определяет y как однозначную функцию от x: $y = f(x)$;

б) при $x = x_0$ эта функция принимает значение y_0: $f(x_0) = y_0$;

в) функция $f(x)$ непрерывна.

Найдем при выполнении указанных условий производную функции $y = f(x)$ по x.

Теорема 2. Пусть функция y от x задается неявно уравнением
$$F(x, y) = 0,$$
где функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть, кроме того,
$$F'_x(x, y), \quad F'_y(x, y) -$$
непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x,y), координаты которой удовлетворяют уравнению
$$F(x, y) = 0,$$
причем в этой точке
$$F'_y(x, y) \ne 0.$$

Тогда функция y от x имеет производную

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Доказательство.
Выберем некоторое значение x и соответствующее ему значение y. Зададим x приращение Δx, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy. При этом $F(x,y) = 0$, $F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$, поэтому $F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = 0$. Слева в этом равенстве стоит полное приращение функции $F(x,y)$, которое можно представить в виде:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0.$$

Разделив обе части полученного равенства на Δx, выразим из него $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}.$$

В пределе при $\Delta x \to 0$, учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}\beta = 0 \quad и \quad F'_y \neq 0,$$

получим:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Теорема доказана.
Пример. Найдем y'_x, если

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\frac{y}{x}.$$

Найдем

$$F'_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F'_y = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y}.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные функции $z = f(x,y)$ являются, в свою очередь, функциями переменных x и y. Следовательно, можно найти их частные производные по этим переменным. Обозначим их так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = (f'_x(x,y))'_x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = (f'_y(x,y))'_x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y) = (f'_y(x,y))'_y.$$

Таким образом, получены четыре частные производные 2-го порядка. Каждую из них можно вновь продифференцировать по x и по y и получить восемь частных производных 3-го порядка и т.д. Определим производные высших порядков так:

Частной производной *n*-го порядка функции нескольких переменных называется первая производная от производной (n – 1)-го порядка.

Частные производные обладают важным свойством: результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования (например, $f''_{xy} = f''_{yx}$). Докажем это утверждение.

Теорема 3. Если функция $z = f(x,y)$ и ее частные производные

$$f'_x,\ f'_y,\ f''_{xy},\ f''_{yx}$$

определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Доказательство.

Рассмотрим выражение

$$A = (f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)) - (f(x, y+\Delta y) - f(x,y))$$

и введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Тогда

$$A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Из условия теоремы следует, что $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке $[x, x+\Delta x]$, поэтому к ней можно применить теорему Лагранжа:

$$A = \Delta x \cdot \varphi'(\bar{x}), \quad где \quad \bar{x} \in [x, x+\Delta x].$$

$$Но \quad \varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Так как в окрестности точки M определена f''_{xy}, f'_x дифференцируема на отрезке $[y, y + \Delta y]$, поэтому к полученной разности вновь можно применить теорему Лагранжа:

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}), \quad где \quad \bar{y} \in [y, y+\Delta y].$$

Тогда

$$A = \Delta x \cdot \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Изменим порядок слагаемых в выражении для A:

$$A = (f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)) - (f(x+\Delta x, y) - f(x, y))$$

и введем другую вспомогательную функцию

$$\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y), \quad тогда \quad A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y).$$

Проведя те же преобразования, что и для $\varphi(x)$, получим, что

$$A = \Delta y \cdot \Delta x \cdot f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}), \quad где \quad \bar{\bar{x}} \in [x, x+\Delta x], \bar{\bar{y}} \in [y, y+\Delta y].$$

Следовательно,

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y \cdot \Delta x \cdot f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}), f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

В силу непрерывности f''_{xy} и f''_{yx}

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x, y), \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x, y).\,.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0,$ получаем, что

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Указанное свойство справедливо для производных любого порядка и для функций от любого числа переменных.

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка функции $u = f(x, y, z)$ называется

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

Аналогично можно определить дифференциалы 3-го и более высоких порядков:

Дифференциалом порядка *k* называется полный дифференциал от дифференциала порядка $(k-1)$: $d^k u = d(d^{k-1} u)$.

Свойства дифференциалов высших порядков

1. k-й дифференциал является однородным целым многочленом степени k относительно дифференциалов независимых переменных, коэффициентами при которых служат частные производные k-го порядка, умноженные на

целочисленные постоянные (такие же, как при обычном возведении в степень):

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{\{k\}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. Дифференциалы порядка выше первого не инвариантны относительно выбора переменных.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Неявные функции. Производные высших порядков*»

Задача 1.

Найти $\frac{dy}{dx}$ в точке (1,0), если

$$xe^y + ye^x - e^{xy} = 0.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad где \quad F(x,y) = 0 -$$

уравнение, задающее неявную функцию.

Решение

$$F'_x = e^y + ye^x - ye^{xy}; \quad F'_x(1,0) = 1 + 0 - 0 = 1;$$

$$F'_y = xe^y + e^x - xe^{xy}; \quad F'_y(1,0) = 1 + e - 1 = e.$$

$$\frac{dy}{dx}(1,0) = -\frac{1}{e}.$$

Ответ: $-\frac{1}{e}$.

Задача 2.

Функция $z = z(x,y)$ задана неявно:

$$3x^2 + y^2 - 2z^2 + xyz - 2x - 5y - 6z + 12 = 0.$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Указание

Если x, y – независимые переменные, а функция $z = z(x,y)$ задана неявно:

$$F(x,y,z) = 0,$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Решение

Найдем полную производную функции F по переменной x, считая y независимой переменной, z – неизвестной функцией от x, и учитывая то, что функция F тождественно равна нулю, следовательно, и любая ее производная тоже равна нулю.

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}.$$

$$F'_x=6x+yz-2,\quad F'_z=-4z+xy-6,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{6x+yz-2}{-4z+xy-6}=\frac{6x+yz-2}{4z-xy+6}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{6x+yz-2}{4z-xy+6}.$

Задача 3.

$$z=\ln\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}\ \ . \quad \textit{Найти} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}\ \ {}'_x=$$

$$=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Упростим полученное выражение:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}\ \ \ y+\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{x\ \ y+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\ \ y^2-x^2-y^2}=-\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}.$$

Теперь найдем частную производную этой функции по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\left(-\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}\right)'_y=$$

$$=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=-\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=$$

$$=-\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Задача 4.

$$u=e^{xyz}.\quad \textit{Найти}\quad \frac{\partial^5 u}{\partial x dy dz^3}.$$

Указание

Продифференцируйте функцию по x, затем полученное выражение – по y, а затем результат – три раза по z.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xyz}(xyz)'_x=yze^{xyz};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z\left(ye^{xyz}\right)'_y=z\left(e^{xyz}+y\cdot xze^{xyz}\right)=e^{xyz}\left(z+xyz^2\right);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=xye^{xyz}\left(z+xyz^2\right)+e^{xyz}\left(1+2xyz\right)=$$

$$=e^{xyz}\left(xyz+x^2y^2z^2+1+2xyz\right)=e^{xyz}\left(3xyz+x^2y^2z^2+1\right);$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z^2}=xye^{xyz}\left(3xyz+x^2y^2z^2+1\right)+e^{xyz}\left(3xy+2x^2y^2z\right)=$$

$$=e^{xyz}\left(3x^2y^2z+x^3y^3z^2+xy+3xy+2x^2y^2z\right)=$$

$$=e^{xyz}\left(5x^2y^2z+x^3y^3z^2+4xy\right);$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x\partial y\partial z^3}=xye^{xyz}\left(5x^2y^2z+x^3y^3z^2+4xy\right)+e^{xyz}\left(5x^2y^2+2x^3y^3z\right)=$$

$$=e^{xyz}\left(5x^3y^3z+x^4y^4z^2+4x^2y^2+5x^2y^2+2x^3y^3z\right)=$$

$$=x^2y^2e^{xyz}\left(x^2y^2z^2+7xyz+9\right).$$

Ответ: $x^2y^2e^{xyz}\quad x^2y^2z^2+7xyz+9\quad.$

Задача 5.
Найти значение параметра a, при котором функция

$$z = e^x \quad x\cos y + ay\sin y$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Указание

Найдите соответствующие производные 2-го порядка, а затем определите значения a, при которых указанное равенство выполняется в какой-либо конкретной точке (например, при $x = y = 0$).

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x \quad x\cos y + ay\sin y \quad + e^x\cos y =$$

$$= e^x \quad (x+1)\cos y + ay\sin y \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x \quad (x+1)\cos y + ay\sin y \quad + e^x\cos y =$$

$$= e^x \quad (x+2)\cos y + ay\sin y \quad .$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x \quad -x\sin y + a\sin y + ay\cos y \quad ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^x \quad -x\cos y + a\cos y + a\cos y - ay\sin y \quad =$$

$$= e^x \quad (2a-x)\cos y - ay\sin y \quad .$$

Поскольку условие

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

должно выполняться при любых значениях x и y, положим $x = y = 0$. Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=1\cdot \quad 2\cdot 1+0 \quad =2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=1\cdot \quad 2a\cdot 1-0 \quad =2a;$$

$$2+2a=0 \Rightarrow a=-1.$$

Следовательно, либо указанное равенство выполняется для *всех* значений x, y при a = -1, либо задача не имеет решений. Найдем значение выражения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

при a = -1:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x \; (x+2)\cos y - y\sin y \; ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^x \; y\sin y-(x+2)\cos y \; ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^x \; (x+2)\cos y - y\sin y + y\sin y-(x+2)\cos y \; =0.$$

Итак, при a = -1 функция

$$z=e^x \; x\cos y + ay\sin y$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

при всех x, y.

Ответ: a = -1.

Задача 6.

Найти дифференциал 2-го порядка от функции

$$z=xy^3+x^3y.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^3+3x^2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3xy^2+x^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3y^2+3x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy.$$

$$dz=6xydx^2+2 \; 3y^2+3x^2 \; dxdy+6xydy^2=$$

$$=6 \; xy(dx^2+dy^2)+ \; y^2+x^2 \; dxdy \; .$$

Ответ: $dz=6 \; xy(dx^2+dy^2)+ \; y^2+x^2 \; dxdy \; .$

2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

2.2.1. *Формула Тейлора. Производная по направлению*

Пусть функция $z = f(x, y)$ является дифференцируемой в окрестности точки $M(x_0, y_0)$. Тогда ее частные производные

$$f'_x(x_0, y_0) \quad и \quad f'_y(x_0, y_0)$$

являются угловыми коэффициентами касательных к линиям пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, которые будут касательными и к самой поверхности $z = f(x, y)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через эти прямые. Направляющие векторы касательных имеют вид

$$1, 0, f'_x(x_0, y_0) \quad и \quad 0, 1, f'_y(x_0, y_0) \ ,$$

поэтому нормаль к плоскости можно представить в виде их векторного произведения:

$$\mathbf{n} = \ -f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1 \ .$$

Следовательно, уравнение плоскости можно записать так:

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

$$где \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Плоскость, определяемая этим уравнением, называется **касательной плоскостью** к графику функции $z = f(x, y)$ в точке с координатами (x_0, y_0, z_0).

Из определения дифференцируемой функции следует, что приращение функции f в окрестности точки M можно представить в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \quad или$$

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho).$$

Следовательно, разность между аппликатами графика функции и касательной плоскости является бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ, при $\rho \to 0$.

При этом дифференциал функции f имеет вид:

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

что соответствует **приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции**. В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

Ненулевой вектор, перпендикулярный касательной плоскости в точке $M\ (x_0\ , y_0)$ поверхности $z = f\ (x, y)$, называется **нормалью** к поверхности в этой точке.

В качестве нормали к рассматриваемой поверхности удобно принять вектор

$$-\mathbf{n} = \ f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\ \ .$$

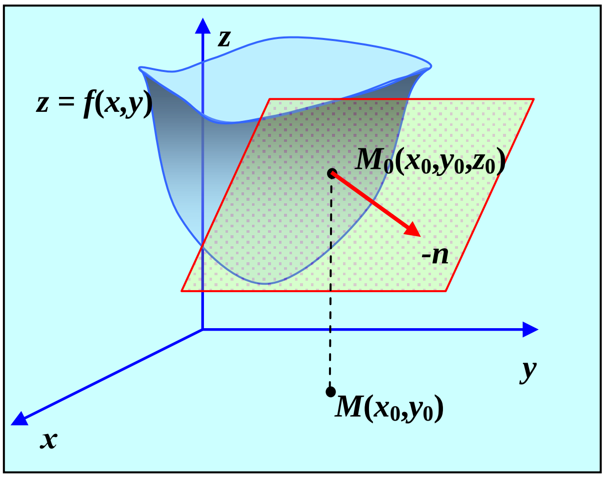


Рис. 1

Пример.

Составим уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy$ в точке M (1; 1). При $x_0 = y_0 = 1\ \ z_0 = 1$;

$$z'_x(1;1) = 1; z'_y(1;1) = 1.$$

Следовательно, касательная плоскость задается уравнением: $z = 1 + (x - 1) + (y - 1)$, или $x + y - z - 1 = 0$. При этом вектор нормали в данной точке поверхности имеет вид: $\boldsymbol{n} = \{1; 1; -1\}$.

Найдем приращение аппликат графика функции и касательной плоскости при переходе от точки M к точке $N(1{,}01; 1{,}01)$.

$\Delta z = 1{,}01^2 - 1 = 0{,}0201$; $\Delta z_{кас} = (1{,}01 + 1{,}01 - 1) - (1 + 1 - 1) = 0{,}02$. Следовательно,

$dz = \Delta z_{кас} = 0{,}02$. При этом $\Delta z - dz = 0{,}0001$.

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Как известно, функцию $F(t)$ при условии существования ее производных по порядок n+1 можно разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Запишем эту формулу в дифференциальной форме:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_o + \theta \cdot \Delta t),$$

$$где \quad t - t_0 = \Delta t = dt, F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0), 0 < \theta < 1.$$

В этой форме формулу Тейлора можно распространить на случай функции нескольких переменных.

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$, имеющую в окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные производные по $(n + 1)$-й порядок включительно. Зададим аргументам x и y некоторые приращения Δx и Δy и рассмотрим новую независимую переменную t:

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x, y = y_0 + t \cdot \Delta y \qquad 0 \le t \le 1 \ .$$

Эти формулы задают прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Тогда вместо приращения $\Delta f(x_0,y_0)$ можно рассматривать приращение вспомогательной функции

$$F(t) = f(x_0+t\,\Delta x, y_0+t\Delta y),$$

равное $\Delta F(0) = F(1) - F(0)$. Но $F(t)$ является функцией одной переменной t, следовательно, к ней применима формула, приведенная в начале раздела. Получаем:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \dots$$
$$+\frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta).$$

Отметим, что при *линейной* замене переменных дифференциалы высших порядков обладают свойством инвариантности, то есть

$$dF(0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy = df(x_0,y_0),$$
$$d^2F(0) = f''_{xx}(x_0,y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)dxdy +$$
$$+f''_{yy}(x_0,y_0)dy^2 = d^2f(x_0,y_0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).$$

Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим **формулу Тейлора для функции двух переменных**:

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \dots +$$
$$+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y),$$
$$\text{где} \quad 0 < \theta < 1.$$

Замечание. В дифференциальной форме формула Тейлора для случая нескольких переменных выглядит достаточно просто, однако в развернутом виде она весьма громоздка. Например, даже для функции двух переменных первые ее члена выглядят так:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+$$
$$+2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2]+$$
$$+\frac{1}{3!}[f'''_{xxx}(x_0,y_0)\Delta x^3+3f'''_{xxy}(x_0,y_0)\Delta x^2\Delta y+$$
$$+3f'''_{xyy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y^2+f'''_{yyy}(x_0,y_0)\Delta y^3]+\ldots$$

Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $u = f\,(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку $M(x,y,z)$ и проведем из нее вектор $\boldsymbol{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторе $\boldsymbol{S}$ на расстоянии Δs от его начала найдем точку $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, где

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$

Представим полное приращение функции f в виде:

$$\Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\delta\Delta x+\varepsilon\Delta y+\lambda\Delta z,$$

$$где\quad \lim_{\Delta s\to 0}\delta=\lim_{\Delta s\to 0}\varepsilon=\lim_{\Delta s\to 0}\lambda=0.$$

После деления на Δs получаем:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}+\delta\frac{\Delta x}{\Delta s}+\varepsilon\frac{\Delta y}{\Delta s}+\lambda\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Поскольку

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma,$$

предыдущее равенство можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma+\delta\cos\alpha+\varepsilon\cos\beta+\lambda\cos\gamma.$$

Предел отношения

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}\quad при\quad \Delta s\to 0$$

называется **производной от функции $\boldsymbol{u = f\,(x, y, z)}$ по направлению вектора $\boldsymbol{S}$** и обозначается

$$\frac{\partial u}{\partial s}.$$

При этом

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Замечание 1. Частные производные являются частным случаем производной по направлению. Например, при

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Замечание 2. Выше определялся геометрический смысл частных производных функции двух переменных как угловых коэффициентов касательных к линиям пересечения поверхности, являющейся графиком функции, с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Аналогичным образом можно рассматривать производную этой функции по направлению l в точке $M(x_0, y_0)$ как угловой коэффициент линии пересечения данной поверхности и плоскости, проходящей через точку M параллельно оси Oz и прямой l.

Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ в этой точке, называется **градиентом** функции $u = f(x, y, z)$.

Обозначение:

$$grad\ u = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}.$$

Свойства градиента

1. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора $\boldsymbol{S}$ равняется проекции вектора grad u на вектор $\boldsymbol{S}$.

Доказательство.

Единичный вектор направления $\boldsymbol{S}$ имеет вид $\boldsymbol{e_S}$ ={cosα, cosβ, cosγ}, поэтому правая часть формулы (4.7) представляет собой скалярное произведение векторов grad u и $\boldsymbol{e_s}$, то есть указанную проекцию.

2. Производная в данной точке по направлению вектора $\boldsymbol{S}$ имеет наибольшее значение, равное |grad u |, если это направление совпадает с направлением градиента.

Доказательство.

Обозначим угол между векторами $\boldsymbol{S}$ и grad u через φ. Тогда из свойства 1 следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\,grad\ u\,| \cdot \cos\varphi,$$

следовательно, ее наибольшее значение достигается при φ=0 и равно |grad$u$|.

3. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору grad u , равна нулю.

Доказательство.

В этом случае

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\varphi = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

4. Если $z = f(x,y)$ – функция двух переменных, то

$$grad\ f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$$

направлен перпендикулярно к линии уровня $f(x,y) = c$, проходящей через данную точку.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«*Производная по направлению. Градиент*»

Задача 1.

Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$z = arctg\frac{x}{y} \quad в \quad точке \quad \left(2, -2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

Указание

Уравнение касательной плоскости к поверхности

$$z = f(x,y)$$

в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид:

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Решение

$$z'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad z'_x(2,-2) = -\frac{1}{4};$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}; \quad z'_y(2,-2) = -\frac{1}{4}.$$

Подставим эти значения в уравнение касательной плоскости:

$$z = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{4}(y+2);$$

$$4z = -\pi - x + 2 - y - 2;$$

$$x + y + 4z + \pi = 0.$$

Ответ: $x + y + 4z + \pi = 0.$

Задача 2.

Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$$

в точке (1,2,-1).

Указание

Найдите частные производные z по x и y как производные неявной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Решение

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0.$$

$$F'_x = 3x^2 + yz, \quad F'_x(1,2,-1) = 3 + 2(-1) = 1;$$

$$F'_y = 3y^2 + xz, \quad F'_y(1,2,-1) = 3\cdot 4 + 1(-1) = 11;$$

$$F'_z = 3z^2 + xy, \quad F'_z(1,2,-1) = 3 + 1\cdot 2 = 5.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2,-1) = -\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2,-1) = -\frac{11}{5}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z = -1 - \frac{1}{5}(x-1) - \frac{11}{5}(y-2),$$

$$5z = -5 - x + 1 - 11y + 22,$$

$$x + 11y + 5z - 18 = 0.$$

Ответ: $x + 11y + 5z - 18 = 0.$

Задача 3.
Составить уравнения нормали к поверхности
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$$
в точке (0,4,2).

Указание

Будем называть нормалью прямую, проходящую через данную точку перпендикулярно касательной плоскости, проведенной через эту точку. Тогда канонические уравнения нормали выглядят так:
$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Решение

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y, \quad z'_x(0,4) = \frac{0}{2} + 4 = 4;$$
$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x, \quad z'_y(0,4) = \frac{4}{2} + 0 = 2.$$

Следовательно, канонические уравнения нормали:
$$\frac{x}{4} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 2}{-1}.$$

Ответ: $\frac{x}{4} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 2}{-1}$.

Задача 4.
Найти производную функции
$$z = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x$$
и точке M(2,-4) по направлению вектора $\boldsymbol{MN}$, если N(-1,-8).

Указание

Производная функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению l, заданному вектором $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$, имеет вид:
$$\frac{\partial z}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta,$$
$$где \quad \cos\alpha = \frac{x_a}{|a|}, \cos\beta = \frac{y_a}{|a|} -$$
направляющие косинусы направления l.

Решение

$$z'_x = 6x - 2y + 2, \quad z'_x(2,-4) = 12 + 8 + 2 = 22;$$
$$z'_y = -2x + 6y, \quad z'_y(2,-4) = -4 - 24 = -28;$$

$$\overrightarrow{MN} = (-1-2, -8+4) = (-3, -4),$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5, \quad \cos\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\beta = -\frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 22 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 28 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-66+112}{5} = \frac{46}{5} = 9,2.$$

Ответ: 9,2.

Задача 5.

Найти производную функции

$$u = \ln(x + y^2 + z^3)$$

в точке (3,2,1) по направлению, образующему с координатными осями равные тупые углы.

Указание

$$\frac{\partial u}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Решение

$$u'_x = \frac{1}{x + y^2 + z^3}, \quad u'_x(3,2,1) = \frac{1}{8};$$

$$u'_y = \frac{2y}{x + y^2 + z^3}, \quad u'_y(3,2,1) = \frac{1}{2};$$

$$u'_z = \frac{3z^2}{x + y^2 + z^3}, \quad u'_z(3,2,1) = \frac{3}{8}.$$

Найдем направляющие косинусы направления l, используя свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \alpha = \beta = \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cos^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(поскольку косинус тупого угла отрицателен).

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l}(3,2,1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 6.

Найти градиент функции

$$u=\sqrt{4x^2+y^2-4z^2}$$

в точке $A(6,10,-5)$.

Указание

Воспользуйтесь формулой

$$grad\,u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+y^2-4z^2}}=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2-4z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(6,10,-5)=\frac{24}{\sqrt{144+100-100}}=\frac{24}{12}=2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2-4z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}(6,10,-5)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-4z}{\sqrt{4x^2+y^2-4z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}(6,10,-5)=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}.$$

$$grad\,u=\left(2,\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right).$$

Ответ: $grad\,u=\left(2,\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right).$

2.2.2. *Экстремумы*

Точка $M_0\ (x_0\,,\,y_0\,)$ называется **точкой максимума** функции $z=f\,(x,y)$, если $f\,(x_o\,,\,y_o)>f\,(x,y)$ для всех точек $(x,\,y)$ из некоторой окрестности точки M_0.

Точка $M_0\ (x_0\,,\,y_0\,)$ называется **точкой минимума** функции $z=f\,(x,y)$, если $f\,(x_o\,,\,y_o)<f\,(x,y)$ для всех точек $(x,\,y)$ из некоторой окрестности точки M_0.

Замечание 1. Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции нескольких переменных.
Замечание 2. Аналогичным образом определяется точка экстремума для функции от любого количества переменных.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если M_0 $(x_0\ ,\ y_0\ )$ – точка экстремума функции $z = f\ (x,\ y)$, то в этой точке частные производные первого порядка данной функции равны нулю или не существуют.
Доказательство.
Зафиксируем значение переменной y, считая $y = y_0$. Тогда функция $f\ (x,\ y_0)$ будет функцией одной переменной x, для которой $x = x_0$ является точкой экстремума. Следовательно, по теореме Ферма

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

или не существует. Аналогично доказывается такое же утверждение для

$$f'_y(x_0, y_0).$$

Точки, принадлежащие области определения функции нескольких переменных, в которых частные производные функции равны нулю или не существуют, называются **стационарными точками** этой функции.

Замечание. Таким образом, экстремум может достигаться только в стационарных точках, но не обязательно он наблюдается в каждой из них.
Примеры.
1. Найдем стационарную точку функции $z = x^2 + y^2$. Для этого решим систему уравнений

$$z'_x = 2x = 0,\quad z'_y = 2y = 0,$$

откуда $x_0 = y_0 = 0$. Очевидно, что в этой точке функция имеет минимум, так как при $x = y = 0$ $z = 0$, а при остальных значениях аргументов $z > 0$.
2. Для функции $z = xy$ стационарной точкой тоже является (0, 0), но экстремум в этой точке не достигается (z (0, 0) = 0, а в окрестности стационарной точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения).

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой окрестности точки M_0 $(x_0\ ,\ y_0\ )$, являющейся стационарной точкой функции $z = f\ (x,\ y)$, эта функция имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Обозначим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = C.$$

Тогда:
1) $f\ (x, y)$ имеет в точке M_0 максимум, если $AC - B^2 > 0$, $A < 0$;
2) $f\ (x, y)$ имеет в точке M_0 минимум, если $AC - B^2 > 0$, $A > 0$;
3) экстремум в стационарной точке отсутствует, если $AC - B^2 < 0$;
4) если $AC - B^2 = 0$, необходимо дополнительное исследование.

Доказательство.

Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции *f (x, y),* помня о том, что в стационарной точке частные производные первого порядка равны нулю:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + \alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

$$где \quad \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha_0 = 0.$$

Если угол между отрезком M_0M , где $M\ (x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, и осью O$x$ обозначить φ, то $\Delta x = \Delta\rho\cos\varphi$, $\Delta y = \Delta\rho\sin\varphi$. При этом формула Тейлора примет вид:

$$\Delta f = \frac{1}{2}\ \Delta\rho\ ^2(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + 2\alpha_0\Delta\rho).$$

Пусть $A \neq 0.$ Тогда можно разделить и умножить выражение в скобках на A. Получим:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha_0\Delta\rho\right).$$

Рассмотрим теперь четыре возможных случая:

1) $AC\text{-}B^2 > 0$, $A < 0$. Тогда

$$\left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A}\right) = -m^2 < 0,$$

$$и \quad \Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\ \ -m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho\ \ < 0$$

при достаточно малых $\Delta\rho$. Следовательно, в некоторой окрестности M_0 $f\,(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) < f\,(x_0\,,\ y_0)$, то есть M_0 – точка максимума.

2) Пусть $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. Тогда

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\ \ m^2 + 2\alpha_0\Delta\rho\ \ > 0,$$

и M_0 – точка минимума.

3) Пусть $AC\text{-}B^2 < 0$, $A > 0$. Рассмотрим приращение аргументов вдоль луча $\varphi = 0$. Тогда из ранее доказанного следует, что

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\ \ A + 2\alpha_0\Delta\rho\ \ > 0,$$

то есть при движении вдоль этого луча функция возрастает. Если же перемещаться вдоль луча $\varphi = \varphi_0$ такого, что tg $\varphi_0 = -A/B$, то

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left(\frac{AC - B^2}{A}\sin^2\varphi_0 + 2\alpha_0\Delta\rho\right) < 0,$$

следовательно, при движении вдоль этого луча функция убывает. Значит, точка M_0 не является точкой экстремума.

3`) При $AC - B^2 < 0$, $A < 0$ доказательство отсутствия экстремума проводится аналогично предыдущему.
3``) Если $AC - B^2 < 0$, $A = 0$, то $B \neq 0$. При этом

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \ \ \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + 2\alpha_0\Delta\rho \ .$$

Тогда при достаточно малых φ выражение $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ близко к $2B$, то есть сохраняет постоянный знак, а $\sin\varphi$ меняет знак в окрестности точки M_0. Значит, приращение функции меняет знак в окрестности стационарной точки, которая поэтому не является точкой экстремума.

4) Если $AC - B^2 = 0$, а $\varphi = arctg\left(-\frac{A}{B}\right)$, $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left(2\alpha_0\Delta\rho\right)$, то есть знак приращения определяется знаком $2\alpha_0$. При этом для выяснения вопроса о существовании экстремума необходимо дальнейшее исследование.

Пример. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$. Для поиска стационарных точек решим систему

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2y + 2 = 0 \\ z'_y = -2x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Итак, стационарная точка (-2,-1). При этом $A = 2$, $B = -2$, $C = 4$. Тогда $AC - B^2 = 4 > 0$, следовательно, в стационарной точке достигается экстремум, а именно минимум (так как $A > 0$).

Условный экстремум

Если аргументы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ связаны дополнительными условиями в виде m уравнений ($m < n$):

$$\varphi_1\ \ x_1, x_2, \dots, x_n\ \ = 0,$$
$$\varphi_2\ \ x_1, x_2, \dots, x_n\ \ = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_m\ \ x_1, x_2, \dots, x_n\ \ = 0,$$

где функции φ_i имеют непрерывные частные производные, то эти уравнения называются **уравнениями связи**.
Экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при выполнении уравнений связи называется **условным экстремумом**.
Замечание. Можно предложить следующее геометрическое истолкование условного экстремума функции двух переменных: пусть аргументы функции $f(x,y)$ связаны уравнением $\varphi(x,y) = 0$, задающим некоторую кривую в плоскости Oxy. Восставив из каждой точки этой кривой перпендикуляры к

плоскости O*xy* до пересечения с поверхностью $z = f(x,y)$, получим пространственную кривую, лежащую на поверхности над кривой $\varphi(x,y) = 0$. Задача состоит в поиске точек экстремума полученной кривой, которые, разумеется, в общем случае не совпадают с точками безусловного экстремума функции $f(x,y)$.

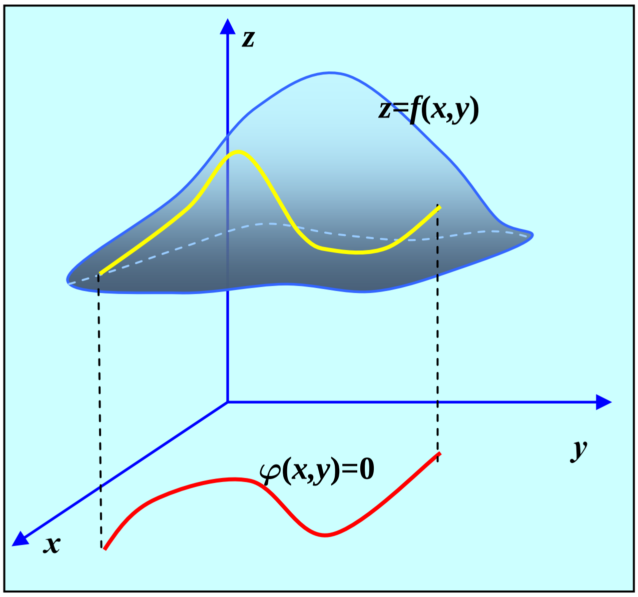


Рис. 1

Определим необходимые условия условного экстремума для функции двух переменных, введя предварительно следующее определение:

Функция

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$
$$+\lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где λ_i – некоторые постоянные, называется **функцией Лагранжа**, а числа λ_i – **неопределенными множителями Лагранжа**.

Теорема 3 (необходимые условия условного экстремума). Условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ может достигаться только в стационарных точках функции Лагранжа

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y).$$

Доказательство.

Уравнение связи задает неявную зависимость y от x, поэтому будем считать, что y есть функция от x: $y = y(x)$. Тогда z есть сложная функция от x, и ее критические точки определяются условием:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Из уравнения связи следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Умножим последнее равенство на некоторое число λ и сложим с предыдущим равенством. Получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \textit{или}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = L'_x + L'_y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Последнее равенство должно выполняться в стационарных точках, откуда следует:

$$\begin{cases} L'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ L'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \quad\varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Получена система трех уравнений относительно трех неизвестных: x, y и λ, причем первые два уравнения являются условиями стационарной точки функции Лагранжа. Исключая из системы (5.6) вспомогательное неизвестное λ, находим координаты точек, в которых исходная функция может иметь условный экстремум.

Замечание 1. Проверку наличия условного экстремума в найденной точке можно провести с помощью исследования частных производных второго порядка функции Лагранжа по аналогии с теоремой 2.

Замечание 2. Точки, в которых может достигаться условный экстремум функции $f\ (x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots,\ x_n)$ при выполнении уравнений связи, можно определить как решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + ... + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \\ \qquad \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}.$$

Пример. Найдем условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$. Составим функцию Лагранжа $L(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Система для определения стационарных точек при этом выглядит так:

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

откуда $-2\lambda=1$, $\lambda=-0,5$, $x = y = -\lambda = 0,5$. При этом $L(x, y)$ можно представить в виде

$$L(x, y) = -0,5\,(x - y)^2 + 0,5 \leq 0,5,$$

поэтому в найденной стационарной точке $L(x, y)$ имеет максимум, а $z = xy$ – условный максимум.

Нахождение наибольших и наименьших значений

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена и непрерывна в некотором ограниченном и замкнутом множестве D и имеет на этом множестве конечные частные производные (за исключением, быть может, отдельных точек). Тогда эта функция достигает на D своего наибольшего и наименьшего значения (см. свойства непрерывных функций). Если это значение достигается во внутренней точке множества, то, очевидно, эта точка должна быть стационарной; кроме того, наибольшее и наименьшее значение может достигаться на границе множества D. Поэтому для определения наибольшего и наименьшего значений функции на множестве D требуется:

1) найти стационарные точки функции, принадлежащие D, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти наибольшее и наименьшее значение, принимаемое функцией на границе множества D;
3) выбрать наименьшее и наибольшее из полученных чисел, которые и будут являться наименьшим и наибольшим значениями функции на всем множестве D.

Примеры.

1. Найдем наибольшее значение функции $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в треугольнике со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2\pi$. Стационарные точки определяются из решения системы

$$\begin{cases} z'_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ z'_y = \cos y - \cos(x+y) = 0' \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2\sin(x+\dfrac{y}{2})\sin\dfrac{y}{2} = 0 \\ 2\sin(\dfrac{x}{2}+y)\sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}.$$

Единственной внутренней точкой данного треугольника, являющейся решением полученной системы, будет

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \textit{в} \quad \textit{которой} \quad z = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Это значение оказывается наибольшим и на всем рассматриваемом множестве, так как на его границе $z = 0$.

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в области $x^2 + y^2 \le 25$.

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 12 = 0 \\ z'_y = 2y + 16 = 0' \end{cases}$$

откуда $x = 6$, $y = -8$ – точка, не лежащая в заданном круге. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данная функция принимает на границе области, то есть на окружности $x^2 + y^2 = 25$. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Ее стационарные точки найдем из системы

$$\begin{cases} 2x - 12 + \lambda x = 0 \\ 2y + 16 + \lambda y = 0. \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{6}{1+\lambda} \\ y = -\dfrac{8}{1+\lambda} \\ \dfrac{100}{(1+\lambda)^2} = 25 \end{cases},$$

откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Следовательно, стационарными точками являются (3, -4) и (-3, 4). В первой из них $z = -75$, во второй $z = 125$. Эти числа являются наименьшим и наибольшим значениями z в заданной области.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Экстремумы*»

Задача 1.
Найти стационарную точку функции

$$z = 4x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x + 24y.$$

Указание

В стационарной точке

$$z'_x = z'_y = 0.$$

Решение

$$z'_x = 8x - 4y - 16, \quad z'_y = -4x + 10y + 24.$$

Следовательно, координаты стационарной точки можно найти как решение системы

$$\begin{cases} 8x - 4y - 16 = 0 \\ -4x + 10y + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ -2x + 5y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Ответ: (1,-2).

Задача 2.
Найти точку минимума функции

$$z = xy - \ln x + 3y^2 - 5y.$$

Указание

Пусть M_0 – стационарная точка,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = C, \quad D = AC - B^2.$$

Тогда M_0 является точкой минимума, если $D > 0$, $A > 0$.

Решение

Найдем стационарные точки функции:

$$z'_x = y - \frac{1}{x}, \quad z'_y = x + 6y - 5.$$

$$\begin{cases} y - \dfrac{1}{x} = 0 \\ x + 6y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 6y \\ y = \dfrac{1}{5 - 6y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 6y \\ 6y^2 - 5y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Итак, стационарные точки функции –

$$\left(2,\frac{1}{2}\right) \quad и \quad \left(3,\frac{1}{3}\right).$$

Исследуем их на экстремум.

$$z''_{xx}=\frac{1}{x^2},\quad z''_{xy}=1,\quad z''_{yy}=6.$$

$$M_1\left(2,\frac{1}{2}\right):\quad A=\frac{1}{4}, B=1, C=6, D=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0,$$

$$A>0-\min,$$

$$M_2\left(3,\frac{1}{3}\right):\quad A=\frac{1}{9}, B=1, C=6, D=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}<0-$$

нет экстремума.

Ответ: $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

Задача 3.

Найти экстремум функции

$$z=xy$$

при условии $2x + 5y + 3 = 0$.

Указание

Найдите экстремум функции Лагранжа

$$L(x,y)=xy+\lambda(2x+5y+3).$$

Решение

Исследуем на экстремум функцию Лагранжа

$$L(x,y)=xy+\lambda(2x+5y+3):$$

$$L'_x=y+2\lambda,\quad L'_y=x+5\lambda.$$

$$\begin{cases} y+2\lambda=0 \\ x+5\lambda=0 \\ 2x+5y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2\lambda \\ x=-5\lambda \\ -10\lambda-10\lambda+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{3}{20} \\ x=-\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{3}{10} \end{cases}.$$

Исследуем найденную точку на экстремум:

$$\begin{cases} z=xy \\ x=-\dfrac{5y+3}{2} \end{cases} \Rightarrow z=-\frac{5y^2+3y}{2},\quad z''_{yy}=\left(-\frac{10y+3}{2}\right)'_y=-5<0.$$

Следовательно, $\left(-\frac{3}{4},-\frac{3}{10}\right)$ – точка условного максимума, и значение функции в этой точке равно

$$-\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{9}{40}.$$

Ответ: $\frac{9}{40}-\max.$

Задача 4.
На параболе

$$y=x^2$$

найти точку, ближайшую к прямой $x-y=2$.

Указание

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $x-y=2$ определяется по формуле

$$d=\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, требуется найти минимум функции

$$f(x,y)=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$$

при условии

$$y=x^2.$$

Решение

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $x-y=2$ определяется по формуле

$$d=\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, требуется найти минимум функции

$$f(x,y)=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$$

при условии

$$y=x^2.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y)=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}+\lambda\ \ x^2-y\ \ .$$

1) $x-y-2\ge 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow L(x,y)=\frac{x-y-2}{\sqrt{2}}+\lambda\ \ x^2-y\ \ ,$$

$$L'_x=\frac{1}{\sqrt{2}}+2\lambda x,\quad L'_y=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda;$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\lambda x=0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\lambda=0 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases} -$$

не выполнено условие на знак подмодульного выражения.

2) $x-y-2\le 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow L(x,y)=\frac{-x+y+2}{\sqrt{2}}+\lambda\;\; x^2-y\;\;,$$

$$L'_x=-\frac{1}{\sqrt{2}}+2\lambda x,\quad L'_y=\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda;$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\lambda x=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\lambda=0 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) -$$

стационарная точка. При этом

$A=L''_{xx}=2\lambda=\sqrt{2}>0, B=C=0, D=\sqrt{2}>0.$

Следовательно, найдена точка условного минимума.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

Задача 5.

Найти множество значений функции

$$z=xy \quad \textit{в} \quad \textit{области} \quad x^2+y^2\le 1.$$

Указание

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в данной области, которые могут достигаться либо на границе, либо в стационарной точке внутри области.

Решение

Найдем стационарные точки функции:

$$z'_x=y,\quad z'_y=x\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow(0,0) -$$

стационарная точка, $z(0,0) = 0$.

Для определения наибольшего и наименьшего значения функции на границе области найдем условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$
$$L'_x = y + 2\lambda x, \quad L'_y = x + 2\lambda y.$$
$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x(1 - 4\lambda^2) = 0 \\ x^2(1 + 4\lambda^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$
$$1) \quad \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 = 1, \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$
$$2) \quad \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 = 1, \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$
Итак, найдены четыре стационарные точки:
$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
При этом
$$z(M_1) = z(M_2) = -\frac{1}{2}, \quad z(M_3) = z(M_4) = \frac{1}{2}.$$
Следовательно, наименьшее и наибольшее значения достигаются на границе области, а так как функция непрерывна, она принимает внутри области все промежуточные значения между наименьшим и наибольшим, то есть множество ее значений в данной области – $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Основные элементарные функции

6. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
7. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
8. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
9. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.
10. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

Определение предела

Число A называется ***пределом*** *функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

такое, что

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

1-й замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Следствия из первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\dfrac{1}{\cos kx}=k\cdot 1=k.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin mx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\dfrac{x}{\sin mx}=k\dfrac{1}{m}=\dfrac{k}{m}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{tgmx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}\dfrac{x}{tgmx}=\dfrac{k}{m}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1,\quad где\quad y=\arcsin x.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{tgy}=1,\quad где\quad y=arctgx.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}.$

2-й замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Следствия из второго замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$

где $a>0,\quad y=a^x-1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$

Гиперболические функции

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Определение производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или}$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Правила дифференцирования

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

2) $(kf(x))' = kf'(x), \quad \text{где} \quad k = const$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\text{Если} \quad g(x) \neq 0, \text{то} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Таблица основных производных

№	f(x)	f′(x)	№	f(x)	f′(x)
1	C	0	9	ctg$x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	10	sh$x$	ch$x$
3	a^x	$a^x \ln a$	11	ch$x$	sh$x$
4	e^x	e^x	12	th$x$	$\frac{1}{ch^2 x}$
5	ln$x$	$\frac{1}{x}$	13	cth$x$	$\frac{1}{sh^2 x}$
6	sin$x$	cos$x$	14	arcsin$x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	cos$x$	-sin$x$	15	arccos$x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	tg$x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	16	arctg$x$	$\frac{1}{1+x^2}$
			17	arcctg$x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Логарифмическое дифференцирование

$$f'(x) = f(x)\ \ln f(x)\ '$$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad при\quad \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0(\infty)$$

Формула Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

Частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i}f}{\Delta x_i}=$$

$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{\Delta x_i}$$

ГЛОССАРИЙ

асимптота графика функции – прямая, расстояние от которой до переменной точки графика функции стремится к нулю при удалении точки в бесконечность

бесконечно большая функция при $x\to x_0$ – функция, предел которой при $x\to x_0$ равен бесконечности

бесконечно малая функция при $x\to x_0$ – функция, предел которой при $x\to x_0$ равен нулю

верхняя грань (супремум) множества, ограниченного сверху – наименьшее из чисел, ограничивающих его сверху

вогнутая кривая – кривая, все точки которой лежат выше любой ее касательной на рассматриваемом интервале

выпуклая кривая – кривая, все точки которой лежат ниже любой ее касательной на рассматриваемом интервале

гиперболические функции – рациональные функции от показательных функций

градиент функции – вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ в этой точке

дифференциал функции – главная линейная часть приращения

дифференцируемая функция – функция, приращение которой можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$

инвариантность - неизменность

инфинум – см. нижняя грань
касательная плоскость к поверхности – плоскость, проходящая через точку поверхности перпендикулярно нормали к поверхности, проведенной в этой точке
критические точки функции одной переменной – внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует
линеаризация функции – замена приращения функции дифференциалом
линия (поверхность) уровня – множество точек из области определения функции нескольких переменных, на которых функция принимает одно и то же постоянное значение
множество – аксиоматическое понятие, некоторая совокупность объектов
натуральный логарифм – логарифм с основанием е
неявная функция – функция y от x, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$
нижняя грань (инфинум) множества, ограниченного снизу – наибольшее из чисел, ограничивающих его снизу
обратная функция – функция $x = g(y)$, ставящая в соответствие каждому значению функции $y = f(x)$ значение ее аргумента x
отображение X на Y – задание соответствия между каждым элементом множества X и каким-либо элементом множества Y
повторный предел функции нескольких переменных – предел, получаемый последовательными предельными переходами по каждому аргументу в отдельности
полная производная функции нескольких переменных –
приращение аргумента – изменение аргумента (разность $x - x_0$)
приращение функции – изменение функции (разность $f(x) - f(x_0)$)
производная – предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю
пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента
сложная функция – функция, аргументом которой является функция
стационарные точки функции нескольких переменных – внутренние точки области определения, в которых все частные производные функции равны нулю или не существуют
супремум – см. верхняя грань
точка максимума функции f – точка, в которой функция принимает значение, большее ее значений для любой точки из некоторой окрестности данной точки
точка минимума функции f – точка, в которой функция принимает значение, меньшее ее значений для любой точки из некоторой окрестности данной точки
точка перегиба – точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой
точка разрыва – точка, в окрестности которой функция непрерывна, а в самой этой точке – нет
точка экстремума – точка максимума или минимума

уравнения связи – дополнительные соотношения, связывающие аргументы функции нескольких переменных
условный экстремум – экстремум функции нескольких переменных при наличии уравнений связи
факториал *n*! числа *n* – произведение последовательных натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$
функция– соответствие, при котором каждому числу из некоторого множества сопоставляется одно определенное число
функция, непрерывная в точке x_0 – функция, предел которой при $x \to x_0$ равен значению функции в точке x_0
функция. непрерывная на отрезке – функция, непрерывная в каждой точке отрезка
частная производная функции нескольких переменных – предел отношения приращения функции к приращению одного из аргументов, если приращение данного аргумента стремится к нулю
числа натуральные – целые положительные числа
числа рациональные – числа, представимые в виде бесконечной периодической десятичной дроби
число *e* ($\sim$ 2,7) – основание показательной функции, для которого $(e^x)' = e^x$
числовая последовательность – числовая функция, область определения которой – множество натуральных чисел
эквивалентные бесконечно малые – бесконечно малые, предел отношения которых равен единице
элементарная функция – функция, заданная с помощью основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций и взятия функции от функции

ОБОЗНАЧЕНИЯ

N	множество всех натуральных чисел
Z	множество всех целых чисел
R	множество всех рациональных чисел
$[a;\, b]$	замкнутый промежуток (отрезок) с концами a и b
$(a;\, b)$	открытый промежуток (интервал) с концами a и b
∞	бесконечность
$\lvert x \rvert$	абсолютная величина (модуль) числа x
$f(x)$	значение функции f в точке x
$D(f)$	область определения функции f
Δx	приращение аргумента x
Δf	приращение функции f
$f'(x)$	производная функции f в точке x
df	дифференциал функции
$f^{(n)}(x)$	производная n-го порядка
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	предел последовательности
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	предел функции в конечной точке
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	предел функции на бесконечности
$\operatorname{sh} x$	гиперболический синус
$\operatorname{ch} x$	гиперболический косинус
$\operatorname{th} x$	гиперболический тангенс

cth x	гиперболический котангенс
ln x	натуральный логарифм (логарифм с основанием e)
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, f'_{x_i}	частная производная функции нескольких переменных
$\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}$	частная производная n-го порядка
$\in$	знак принадлежности
$\Rightarrow$	знак следования
$\Leftrightarrow$	знак равносильности
$\cup$	знак объединения

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математический анализ. М.: Наука, 1999.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т.1. М.: Наука, 1965.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.1. М.: Наука, 1981.
6. Сборник задач по математике для втузов (под редекцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича). – Т.1. М.: Наука, 1981.
7. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ