Н.Д.Выск

Математический анализ
Часть 3. Числовые и функциональные ряды. Кратные интегралы. Теория поля.

учебное пособие

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского
Кафедра «Высшая математика»
2011

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания

Начинайте каждое занятие с изучения лекции. При этом:

- ✓ вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- ✓ затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- ✓ разберите доказательства теорем и выводы формул
- ✓ в завершение работы прочтите всю лекцию еще раз, чтобы убедиться, что теоретический материал освоен.

Следующий этап работы – выполнение заданий практикума.

- ✓ каждую задачу попробуйте решить самостоятельно
- ✓ в случае неудачи посмотрите указание и вновь повторите попытку
- ✓ в случае повторной неудачи внимательно разберите приведенное решение
- ✓ если вы решили задачу самостоятельно (во всяком случае, ваш ответ оказался верным), все равно обязательно прочтите решение, данное в учебном курсе – это поможет вам проверить правильность примененного метода решения
- ✓ закончив решение всех задач практикума, обязательно вернитесь к тем из них, которые не получились в первый раз, и попробуйте вновь самостоятельно решить их.

При выполнении домашнего задания используйте материал лекции и практикума.

1. РЯДЫ

1.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1.1. *Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Примеры. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Остаток ряда. Ряды с неотрицательными членами, критерий сходимости*

Бесконечная сумма чисел

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \text{ (или } \sum_{n=1}^{\infty} u_n\text{)}, \quad (1)$$

где каждое число u_n можно вычислить, зная его номер n, называется **числовым рядом**.

При этом формула $u_n = f(n)$, позволяющая найти каждый член ряда, называется формулой **общего члена** ряда.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется **частичной суммой ряда**:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Если существует конечный предел частичных сумм ряда:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

то говорят, что **ряд сходится**, а число s называется **суммой ряда**. Если конечный $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Замечание. Таким образом, свойства числовых рядов во многом определяются свойствами числовых последовательностей $\{s_n\}$.

Пример 1.

Ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

сходится, так как представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q = \frac{1}{2}, \quad |q| < 1,$$

сумму которой можно найти по формуле

$$s=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Пример 2.
Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...$$

Представим общий член ряда в виде:

$$u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Тогда частичная сумма s_n будет выглядеть так:

$$s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 3.
Ряд 1+1+1+…+1+… расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Пример 4.
Ряд 1-1+1-1+…+(-1)$^{n+1}$+… тоже расходится, так как последовательность его частичных сумм имеет вид: s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0 и т.д., а такая последовательность предела не имеет.

Простейшие свойства сходящихся рядов

Теорема 1. Исключение или добавление конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.
Доказательство.
Исключим из ряда (1) произвольные k членов и выберем значение n, при котором все отброшенные члены содержатся в частичной сумме s_n. Тогда s_n = c_k + S_{n-k} , где c_k – сумма отброшенных членов ряда, а S_{n-k} – сумма членов, входящих в s_n, но не входящих в c_k . Тогда

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}c_k+\lim_{n\to\infty}S_{n-k}=c_k+\lim_{n\to\infty}S_{n-k},$$

так как c_k – постоянная величина, не зависящая от n. Следовательно, конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-k}$ существуют или не существуют одновременно, что и доказывает утверждение теоремы.

Теорема 2. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ и его сумма равна s, то сходится и ряд $cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots$, сумма которого равна cs.
Доказательство.
Обозначим частичную сумму второго ряда c_n . Тогда

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c\lim_{n\to\infty} s_n = cs,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если ряды

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (2)$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \quad (3)$$

сходятся и их суммы соответственно равны s_a и s_b, то ряды

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots \quad (4)$$

и

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \quad (5)$$

тоже сходятся, и их суммы равны $s_a + s_b$ и $s_a - s_b$.
Доказательство.
Пусть σ_n – частичная сумма ряда (4), а $(s_a)_n$ и $(s_b)_n$ – частичные суммы из того же числа слагаемых рядов (2) и (3). Тогда $\sigma_n = (s_a)_n + (s_b)_n$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \left((s_a)_n + (s_b)_n\right) = s_a + s_b.$$

Следовательно, ряд (4) сходится, и его сумма равна $s_a + s_b$. Аналогичным образом доказывается сходимость ряда (5).

Необходимое условие сходимости ряда

Главным вопросом при исследовании числового ряда является вопрос о его сходимости или расходимости. Сформулируем необходимое условие сходимости ряда, то есть условие, при невыполнении которого ряд расходится.

Теорема 4. Если ряд (1) сходится, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0.}$$

Доказательство.
Представим u_n как разность частичных сумм $s_n - s_{n-1}$. Так как ряд (1) сходится,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Замечание. Это условие является необходимым, но не достаточным признаком сходимости, то есть из стремления общего члена ряда к нулю не обязательно следует сходимость ряда.

Остаток ряда

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется ***n*-м остатком** данного ряда.
Обозначим сумму остатка ряда (при условии, что он сходится) через $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$.. Тогда из теоремы 1 следует, что если ряд (1) сходится, то сходится и любой его остаток, и наоборот – из сходимости какого-либо остатка ряда следует сходимость ряда в целом.
Докажем еще одно свойство остатка сходящегося ряда:
Теорема 5. Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$
Доказательство.
Если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = s - s = 0,$$

что и требовалось доказать.

Ряды с неотрицательными членами

Пусть для всех членов ряда (1) выполнено условие $u_n \geq 0$.

Теорема 6 (критерий сходимости). Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.
Доказательство.
1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

но

$$s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n,$$

то есть последовательность частичных сумм является возрастающей. Следовательно,

$$s_n < s \quad \forall n,$$

то есть $\{s_n\}$ ограничена сверху числом s.

2) Пусть $\{s_n\}$ ограничена сверху. Обозначим через s верхнюю грань $\{s_n\}$. Тогда, так как $\{s_n\}$ возрастает,

$$\forall\varepsilon \quad \exists N: |s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n > N,$$

то есть число s является пределом $\{s_n\}$, следовательно, ряд сходится.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.
Найти сумму ряда

$$0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \ldots + 5 \cdot 0{,}1^n + \ldots$$

Указание

Воспользуйтесь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Решение

Заданный ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = 0{,}5$, а знаменатель $q = 0{,}1$. Тогда

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0{,}5}{1-0{,}1} = \frac{5}{9}.$$

Ответ: $\frac{5}{9}$.

Задача 2.
Найти сумму ряда

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \quad + \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3} = \ldots$$

Указание

Представьте общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}.$$

Решение

Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} = \frac{(A+B)n + (3A+2B)}{n+2 \quad n+3}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, \quad B=-1.$$

Следовательно, частичную сумму ряда можно записать в виде:

$$S_n = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

(все остальные слагаемые сокращаются при раскрытии скобок).
Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 3.
Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}.$$

Указание

Представьте общий член ряда в виде суммы:

$$\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}.$$

Решение

Представим общий член ряда в виде суммы:

$$\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}.$$

Тогда $S = S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 – суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Вычислим эти суммы, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S_1=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}, \quad S_2=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1, \quad S=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задача 4.
Какие из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{50n+63}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$$

сходятся?

Указание

Проверьте для каждого ряда выполнение необходимого условия сходимости.

Решение

Проверим для каждого ряда выполнение необходимого условия сходимости:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{50n+63}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{50+\dfrac{63}{n}}=\dfrac{1}{50}\neq 0$ –

ряд расходится, так как необходимое условие сходимости не выполнено.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=1\neq 0$ –

ряд расходится, так как необходимое условие сходимости не выполнено.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e^2}\neq 0$ –

ряд расходится, так как необходимое условие сходимости не выполнено.

Ответ: все расходятся.

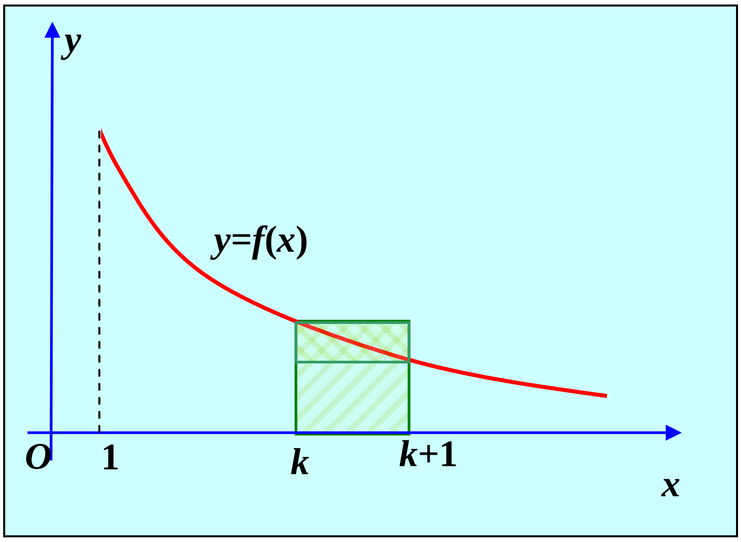
1.1.2. *Признаки сравнения. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши. Интегральный признак сходимости*

При исследовании числовых рядов на сходимость непосредственный поиск предела частичных сумм является в большинстве случаев весьма затруднительным. Вместо этого удобно использовать специальные признаки сходимости рядов. В частности, в этой лекции будут сформулированы и доказаны некоторые признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Интегральный признак Коши

Теорема 1. Если функция f неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство.



Выберем натуральное число k и рассмотрим значения x на отрезке $k \le x \le k + 1$.

Тогда в силу убывания функции f

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1).$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку единичной длины $[k, k + 1]$, получим:

$$f(k)\int_{k}^{k+1} dx \ge \int_{k}^{k+1} f(x)dx \ge f(k+1)\int_{k}^{k+1} dx,$$

откуда

$$f(k) \ge \int_{k}^{k+1} f(x)dx \ge f(k+1).$$

Складывая подобные неравенства, полученные при значениях k от 1 до n, приходим к неравенству:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

откуда

$$s_{n+1} - f(1) \le \int_{1}^{n+1} f(x)dx \le s_n, \qquad (1)$$

где

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится и сумма его равна s, то $s_n \le s$, следовательно,

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \le s,$$

поэтому $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится (соответствующее свойство определенного интеграла изучалось в курсе 2-го семестра).

Если же, наоборот, предположить, что сходится $\int_1^{+\infty} f(x)dx,$ то из (1) следует, что

$$s_{n+1} \le f(1) + \int_1^{n+1} f(x)dx \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Значит, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ограничена сверху и возрастает, следовательно, ряд сходится.

Пример 1.

Применим интегральный признак Коши к исследованию сходимости рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$ сравнивая их с интегралами $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$ Рассмотрим следующие возможные значения α:

а) $\alpha > 1.$ Тогда

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \frac{1}{\alpha-1}$$

(так как при $\alpha > 1$ $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$).

Следовательно, несобственный интеграл сходится, а значит, сходится и рассматриваемый ряд.

б) $\alpha = 1$. При этом

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\ln x \Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty \quad -$$

интеграл расходится, поэтому расходится и ряд.

в) $\alpha < 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \infty$$

(так как при $\alpha < 1$ $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{b^{\alpha-1}} = \infty$).

Из расходимости несобственного интеграла следует расходимость исследуемого ряда.

Замечание. Итак, ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ **сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.** Это свойство ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ будет часто использоваться в дальнейшем.

Признаки сравнения

Теорема 2 (1-й признак сравнения).

Если для двух рядов с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (2)$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \quad (3)$$

выполнено условие $u_n \leq v_n$, то:

а) если ряд (3) сходится, то сходится и ряд (2);

б) если ряд (2) расходится, то расходится и ряд (3).

Доказательство.

Пусть частичная сумма ряда (2)

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i,$$

частичная сумма ряда (3)

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Из условия теоремы следует, что $s_n \leq \sigma_n$. Пусть ряд (3) сходится. Тогда существует конечный предел его частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$. Но $s_n \leq \sigma_n < \sigma$, то есть последовательность частичных сумм ряда (2) ограничена сверху. Следовательно, ряд (2) сходится.

Теперь предположим, что ряд (2) расходится . Тогда

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \quad \sigma_n \geq s_n,$$

значит,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \infty,$ то есть ряд (3) тоже расходится. Теорема доказана.

Следствие.

Условие $u_n \leq v_n$ может выполняться начиная не обязательно с $n = 1$. Утверждение теоремы справедливо, если это условие выполняется для всех n, больших некоторого N.

Пример 2.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$, сравнив его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Этот ряд сходится, так как последовательность его членов представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$, сумма которой равна $\frac{1}{2}$. При любом $n > 1$ $n\cdot 2^n > 2^n$, следовательно, $\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n}$, поэтому по теореме 2 исследуемый ряд сходится.

Теорема 3 (2-й признак сравнения). Если для рядов (2) и (3) выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A,\quad 0<A<\infty,$$

то ряды (2) и (3) сходятся и расходятся одновременно.
Доказательство.
Выберем число N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\frac{u_n}{v_n}<A+1.$$

Тогда $u_n < (A + 1)v_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A+1)v_n$, следовательно, по теореме 2 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Наоборот, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ следует при этом расходимость $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.
Теперь выберем число $\underline{A}$ такое, что $0 < \underline{A} < A$, и зададим номер N, при котором $\frac{u_n}{v_n}>\underline{A}$ при любом $n > N$. Отсюда $u_n > \underline{A}v_n$, и, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно показать, что из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, а из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ – расходимость $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Теорема доказана полностью.

Следствие.
При применении 2-го признака сравнения удобно брать в качестве ряда, с которым сравнивается данный ряд, ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (см. пример 1). Напомним еще раз, что такой ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Пример 3.
Общий член ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^3-3n^2+n-7}$$
можно представить в виде
$$\frac{2+\frac{3}{n}}{n^2-3n+1-\frac{7}{n}}$$
(разделив числитель и знаменатель на n). Теперь очевидно, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=2.$$
Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (так как $\alpha = 2 > 1$), сходится (по теореме 3) и исходный ряд.

Признак Даламбера

Теорема 4. Если для ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \quad u_n>0,$$
существует предел
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$
то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а при $l > 1$ расходится.

Доказательство.
а) Пусть $l < 1$. Выберем число q так, что $l < q < 1$. Тогда можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство
$$\frac{u_n}{u_{n-1}}<q,$$
следовательно, $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство для $n = N + 1$, $n = N + 2$ и т.д., получим:
$$u_{N+1}<qu_N,$$
$$u_{N+2}<qu_{N+1}<q^2u_N,$$
....
$$u_{N+k}<q^ku_N.$$
....

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k u_N = u_N \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

сходится (как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим 1), поэтому по теореме 22 сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k}$, а следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

б) Пусть теперь $l > 1$, тогда для всех n, больших некоторого N,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1,$$

следовательно, $u_n > u_{n-1}$. С учетом знакоположительности ряда из этого следует, что $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то есть ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости).

Замечание. При $l = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (ряд в этом случае может и сходиться, и расходиться).

Пример 4.

Применим признак Даламбера к исследованию сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится (учитываем, что $(n + 1)! = n!(n + 1)$).

Радикальный признак Коши

Теорема 5. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0,$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $l > 1$ расходится.

Доказательство.

а) Пусть $l < 1$. Выберем число q такое, что $l < q < 1$. Тогда можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то по 1-му признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k}$, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

б) Пусть теперь $l > 1$, тогда для всех n, больших некоторого N, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, то есть $u_n > 1$. Следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечание 1. Так же, как в признаке Даламбера, $l = 1$ не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.
Замечание 2. Если для одного и того же ряда существуют пределы по Даламберу и по Коши, то они равны друг другу.

Пример 5.
Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \quad -$$

ряд сходится.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.
Какие из рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3+n-5}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n-1}{n^5-7n+8}};$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}\ ; \quad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[3]{n^4-n-7}}$$

сходятся?

Указание

Воспользуйтесь вторым признаком сравнения и сравните общий член каждого ряда при $n \to \infty$ с дробью $\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение

При $n \to \infty$ порядок многочлена определяется его старшей степенью. Воспользуемся этим для оценки общего члена каждого из данных рядов:

1) $\frac{n+1}{3n^3+n-5} \sim \frac{n}{3n^3} = 3 \cdot \frac{1}{n^2}$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^2}}=3.$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, поэтому по второму признаку сравнения сходится и ряд 1.

2) $\sqrt{\dfrac{2n-1}{n^5-7n+8}}\sim\sqrt{\dfrac{2n}{n^5}}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^2}}=\sqrt{2}$ –

ряд 2 сходится.

3) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\dfrac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, так как $\alpha=\dfrac{1}{2}<1,$ поэтому ряд 3 тоже расходится.

4) $\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[3]{n^4-n-7}}\sim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^4}}=\dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{n^{\frac{5}{6}}};\quad \alpha=\dfrac{5}{6}<1$ –

ряд 4 расходится.

Ответ: 1,2.

Задача 2.

Какие из рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{n};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\frac{1}{n^3}}-1\right);$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

сходятся?

Указание

Используйте эквивалентность бесконечно малых: при $x\to 0$

$$\sin x\sim x,\quad tgx\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,\quad \ln\ 1+x\ \sim x.$$

Решение

1) *При* $n\to\infty$ $\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\to 0\Rightarrow\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\sim\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$ расходится, так как $\alpha=\dfrac{1}{2}<1,$ поэтому ряд 1 тоже расходится.

2) *При* $n\to\infty$ $\dfrac{1}{n}\to 0\Rightarrow tg\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}tg\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n^2}.$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому сходится и ряд 2.

3) *При* $n\to\infty$ $\frac{1}{n^3}\to 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{n^3}}-1\sim\frac{1}{n^3}$ –

ряд 3 сходится.

4) *При* $n\to\infty$ $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ –

ряд 4 расходится.

Ответ: 2,3.

Задача 3.

Какие из рядов

$$1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^3};\quad 2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n};\quad 3)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n};$$

$$4)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$$

сходятся?

Указание

Примените первый признак сравнения.

Решение

1) $\sin^2 n\le 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 n}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, поэтому по первому признаку сравнения сходится и ряд 2.

2) *При* $n>2$ $\ln n>1 \Rightarrow \frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, поэтому по первому признаку сравнения расходится и ряд 2.

3) $\ln n<n \Rightarrow \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ –

ряд 3 расходится.

4) $2^n+n>2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n+n}<\frac{1}{2^n}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, поэтому сходится и ряд 4.

Ответ: 1,4.

Задача 4.
Какие из рядов

$$1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3};\quad 2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!};\quad 3)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n n!};$$

$$4)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

сходятся?

Указание

Примените признак Даламбера.

Решение

1) $a_n=\dfrac{2^n}{n^3};\, a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^3};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^3}{2^n(n+1)^3}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=2>1\quad -$$

ряд 1 расходится по признаку Даламбера.

2) $a_n=\dfrac{n^4}{n!};\, a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^4}{(n+1)!};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^4}{(n+1)!n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^4}{n!(n+1)n^4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1\quad -$$

ряд 2 сходится.

3) $a_n=\dfrac{(2n)!}{3^n n!};\, a_{n+1}=\dfrac{(2n+2)!}{3^{n+1}(n+1)!};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!3^n n!}{(2n)!3^{n+1}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)3^n n!}{(2n)!3^{n+1}n!(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n}=\infty>1\quad -$$

ряд 3 расходится.

4) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}; a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \quad -$$

ряд 4 сходится.

Ответ: 2,4.

Задача 5.

Какие из рядов

$$1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^n; \quad 2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}; \quad 3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\,\frac{n^2-1}{n^2+1};$$

$$4)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}$$

сходятся?

Указание

Примените радикальный признак Коши.

Решение

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-3} = \dfrac{1}{2} < 1 \quad -$

ряд 1 сходится.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e > 1 \quad -$

ряд 2 расходится.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\,\dfrac{n^2-1}{n^2+1} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4} < 1 \quad -$

ряд 3 сходится.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \dfrac{3}{e} > 1 \quad -$

ряд 4 расходится.

Ответ: 1,3.

Задача 6.
Какие из рядов

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};\quad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)};$$

$$4)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$$

сходятся?

Указание

Примените интегральный признак Коши.

Решение

1) Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{B\to\infty}\int_2^{B}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{B\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln x}d\ln x=$$

$$=\lim_{B\to\infty}\ln\ln x\Big|_2^B=\lim_{B\to\infty}\ \ln\ln B-\ln\ln 2\ =\infty\quad -$$

интеграл расходится, следовательно, расходится и ряд 1.

2) Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{B\to\infty}\int_2^{B}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{B\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln^2 x}d\ln x=$$

$$=-\lim_{B\to\infty}\frac{1}{\ln x}\Big|_2^B=\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln B}\right)=\frac{1}{\ln 2}\quad -$$

интеграл сходится, следовательно, сходится и ряд 2.

3) Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{(x+2)\ln^3(x+2)}dx=\lim_{B\to\infty}\int_1^{B}\frac{1}{(x+2)\ln^3(x+2)}d(x+2)=$$

$$=\lim_{B\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{1}{\ln^3(x+2)}d\ln(x+2)=$$

$$=-\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\ln^2(x+2)}\Big|_1^B=\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2 3}-\frac{1}{2\ln^2(B+2)}\right)=\frac{1}{2\ln^2 3}\quad -$$

интеграл сходится, следовательно, сходится и ряд 3.

4) Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx=\lim_{B\to\infty}\int_2^{B}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx=\lim_{B\to\infty}\int_2^{\infty}\frac{1}{\ln x\ln\ln x}d\ln x=$$

$$\overset{t=\ln x}{=}\lim_{B\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}\frac{1}{t\ln t}dt=\lim_{B\to\infty}\ln\ln t\Big|_{\ln 2}^{\ln B}=\lim_{B\to\infty}\ \ln\ln\ln B-\ln\ln\ln 2\ =\infty\quad -$$

интеграл расходится, следовательно, расходится и ряд 4.
Ответ: 2,3.

1.1.3. *Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов*

Для числовых рядов, члены которых имеют разные знаки, задаются два вида сходимости.

> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из его модулей, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Теорема 1.. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он сходится и в обычном смысле, то есть существует конечный предел его частичных сумм.
Доказательство.
Пусть $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, s'_n – сумма всех положительных членов среди первых n членов данного ряда, s''_n – сумма модулей всех отрицательных членов среди них. Если обозначить $\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$, то

$$s_n = s'_n - s''_n\,, \quad \sigma_n = s'_n + s''_n\,.$$

Так как по условию теоремы σ_n имеет предел σ, а s'_n и s''_n – положительные возрастающие величины, меньшие σ, то они тоже имеют пределы s' и s''. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s'_n - s''_n) = s' - s'',$$

то есть знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Замечание. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ является знакоположительным, то для исследования знакопеременного ряда на абсолютную сходимость мы можем использовать все известные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Пример 1.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Такой ряд сходится, поэтому рассматриваемый ряд сходится абсолютно.

Если ряд, составленный из модулей членов данного ряда, расходится, а сам данный ряд сходится, то говорят, что он **сходится условно**.

Признак Лейбница

Если знакопеременный ряд не обладает абсолютной сходимостью, то требуется ответить на вопрос, будет ли он сходиться хотя бы условно. Ответ на него можно дать, применяя признак Лейбница:

Теорема 2. Если исследуемый ряд:
1) знакочередующийся, то есть имеет вид $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, где $u_i > 0$ (1);
2) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$ (последующий член ряда по модулю меньше предыдущего);
3) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,
то ряд сходится (хотя бы условно), его сумма положительна и $s \le u_1$.

Доказательство.
Рассмотрим первых $2m$ членов ряда:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) > 0,$$

так как $u_{2i-1} - u_{2i} > 0$. Итак, последовательность $\{s_{2m}\}$ положительна и возрастает с возрастанием m. С другой стороны, s_{2m} можно записать в ином виде:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1 .$$

Следовательно, последовательность $\{s_{2m}\}$ ограничена сверху и поэтому имеет предел:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Докажем, что тот же предел имеет и последовательность частичных сумм, составленных их нечетного числа слагаемых:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = s + 0 = s.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ при любом n, то есть ряд (1) сходится.

Пример 2.

Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

$$|u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \quad \textit{так} \quad \textit{как} \quad \ln n < n,$$

поэтому по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|$ расходится, то есть абсолютной сходимостью рассматриваемый ряд не обладает.

Проверим для него выполнение условий теоремы 2. Знакочередование обеспечивается множителем $(-1)^n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, а из монотонного возрастания функции $y = \ln x$ следует, что

$$\ln(n+1) > \ln n, \quad a \quad \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}.$$

Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится условно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то любой ряд, составленный из членов данного ряда, взятых, возможно, в другом порядке, тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство.

Рассмотрим ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_m$, составленный из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, можно найти номер N такой, что

$$|s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь номер M такой, что частичная сумма $\tilde{s}_M = \sum_{m=1}^{M} \tilde{u}_m$ содержала все слагаемые, входящие в сумму s_N . Тогда для любого $m > M$ частичную сумму $\tilde{s}_m$ можно представить в виде:

$$\tilde{s}_m = s_N + \tilde{\tilde{s}}_m..$$

Тогда в $\tilde{\tilde{s}}_m$ будут входить только слагаемые с номерами, большими N, поэтому

$$|\tilde{\tilde{s}}_m| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $m > M$ получаем:

$$|s - \tilde{s}_m| = |s - (s_N + \tilde{\tilde{s}}_m)| \le |s - s_N| + |\tilde{\tilde{s}}_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{s}_m = s$, то есть ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{u}_m$ сходится, и сумма его равна s.

Проводя подобные рассуждения для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, можно доказать и абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{u}_m$.

Теорема 4 (без доказательства). Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, тоже абсолютно сходится, и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.

Замечание. Указанные свойства справедливы только для абсолютно сходящихся рядов. Если ряд сходится условно, то перестановкой его членов можно изменять сумму ряда (теорема Римана) или получить расходящийся ряд. В частности, расходящимися в этом случае будут ряды, составленные из всех положительных и из всех отрицательных членов данного условно сходящегося ряда.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.
Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Указание

Для исследования абсолютной сходимости примените 2-й признак сравнения, для исследования условной сходимости – признак Лейбница.

Решение

Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд 1:

1) абсолютная сходимость:

$|a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *расходится* – абсолютной сходимости нет.

2) условная сходимость: проверим выполнение требований признака Лейбница.

а) ряд знакочередующийся;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0;$

в) $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|.$

Следовательно, ряд сходится условно по признаку Лейбница.
Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд 2:
1) абсолютная сходимость:

$$|a_n| = \frac{1}{n^2}; \quad ряд \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad сходится \quad -$$

ряд сходится абсолютно.
Ответ: первый сходится условно, второй абсолютно.

Задача 2.
Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+n-5} \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

Указание

Для исследования абсолютной сходимости примените 2-й признак сравнения.

Решение

Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд 1:
1) абсолютная сходимость:

$$|a_n| = \frac{n}{n^3+n-5} \sim \frac{1}{n^2}; \quad ряд \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad сходится \quad -$$

ряд сходится абсолютно.
Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд 2:
1) абсолютная сходимость:

$$|a_n| = \frac{1}{3^n}; \quad ряд \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad сходится \quad -$$

ряд сходится абсолютно.
Ответ: оба сходятся абсолютно.

Задача 3.
Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{10n^2-1}.$$

Указание

При исследовании сходимости ряда 1 используйте эквивалентность бесконечно малых:

$$при \quad x \to 0 \quad \ln\ 1+x\ \sim x.$$

Для ряда 2 проверьте выполнение необходимого условия сходимости.

Решение

Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд 1:

1) абсолютная сходимость:

$$|a_n| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}; \quad \textit{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \textit{расходится} \quad -$$

абсолютной сходимости нет.

2) условная сходимость: проверим выполнение требований признака Лейбница.

а) ряд знакочередующийся;

$$\textit{б)} \quad \lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0;$$

в) логарифмическая функция с основанием, большим 1, является возрастающей, поэтому

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|.$$

Следовательно, ряд сходится условно по признаку Лейбница.

2) для ряда 2

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{10n^2-1} = \frac{1}{10} \neq 0 \quad -$$

ряд расходится.

Ответ: первый сходится условно, второй расходится.

Задача 4.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n} \quad \textit{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}.$$

Указание

При исследовании ряда 1 на абсолютную сходимость примените интегральный признак Коши; при исследовании сходимости ряда 2 воспользуйтесь тем, что $|\sin n| \leq 1$.

Решение

Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд 1:

1) абсолютная сходимость:

$$|a_n| = \frac{1}{n\ln n}; \quad \int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty \quad -$$

интеграл расходится, следовательно, по интегральному признаку Коши расходится и ряд из модулей членов ряда 1, то есть абсолютной сходимости у этого ряда нет.

2) условная сходимость: проверим выполнение требований признака Лейбница.

а) ряд знакочередующийся;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0;$

в) логарифмическая функция с основанием, большим 1, является возрастающей, поэтому

$$(n+1)\ln(n+1) > n\ln n \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n\ln n} \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|.$$

Следовательно, ряд сходится условно по признаку Лейбница.

Исследуем на абсолютную сходимость ряд 2:

$|a_n| = \frac{|\sin n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$; *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *сходится* –

ряд 2 сходится абсолютно.

Ответ: первый сходится условно, второй абсолютно.

1.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1.2.1. *Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и дифференцирование*

Бесконечная сумма функций

$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, (1)

где $u_n(x) = f(x,n)$, называется **функциональным рядом**.

Если задать конкретное числовое значение x, ряд (1) превратится в числовой ряд, причем в зависимости от выбора значения x такой ряд может сходиться или расходиться. Практическую ценность представляют только сходящиеся ряды, поэтому важно определить те значения x, при которых функциональный ряд становится сходящимся числовым рядом.

Множество значений x, при подстановке которых в функциональный ряд (1) получается сходящийся числовой ряд, называется **областью сходимости** функционального ряда.

Функция $s(x)$, определенная в области сходимости ряда, которая для каждого значения x из области сходимости равна сумме соответствующего числового ряда, полученного из (1) при данном значении x, называется **суммой функционального ряда**.

Пример 1.
Найдем область сходимости и сумму функционального ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

При $|x| \geq 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n \neq 0$, поэтому соответствующие числовые ряды расходятся. Если же $|x| < 1$, рассматриваемый ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, вычисляемую по формуле:

$$s(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Следовательно, областью сходимости ряда является интервал (-1, 1), а его сумма имеет указанный вид.

Замечание. Так же, как для числовых рядов, можно ввести понятия частичной суммы функционального ряда:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

и остатка ряда: $r_n = s - s_n$.

Равномерная сходимость функционального ряда

Определим вначале понятие равномерной сходимости числовой последовательности.

Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется **равномерно сходящейся к функции f на множестве X**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall x \in X \quad и \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Будем обозначать обычную сходимость функциональной последовательности $f_n(x) \to f(x)$, а равномерную сходимость - $f_n(x) \underset{\to}{\to} f(x)$..

Замечание 2. Отметим еще раз принципиальное отличие равномерной сходимости от обычной: в случае обычной сходимости при выбранном значении ε для каждого $x \in X$ существует **свой** номер N, для которого при $n > N$ выполняется неравенство:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

При этом может оказаться, что подобрать для данного ε общий номер *N*, обеспечивающий выполнение этого неравенства для любого *x*, невозможно. В случае же равномерной сходимости такой номер *N*, **общий для всех *x***, существует.

Определим теперь понятие равномерной сходимости функционального ряда. Поскольку каждому ряду соответствует последовательность его частичных сумм, равномерная сходимость ряда определяется через равномерную сходимость этой последовательности:

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x\in X,$$

называется **равномерно сходящимся** на множестве *X*, если на *X* равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Признак Вейерштрасса

Теорема 1. Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n\geq 0,$$

сходится и для всех $x\in X$ и для всех n = 1, 2,… выполняется неравенство

$$|u_n(x)|\leq a_n,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве *X*.

Доказательство.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер *N*, что

$$\forall n>N \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k<\varepsilon,$$

поэтому $\forall x\in X$ и $\forall n>N$ для остатков r_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ справедлива оценка

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(x)|\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k<\varepsilon.$$

Следовательно, $r_n \underset{\rightarrow}{\rightarrow} 0$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Замечание. Процедура подбора числового ряда, отвечающего условиям теоремы 1, обычно называется **мажорированием**, а сам этот ряд – **мажорантой** для данного функционального ряда.

Пример 2.

Для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n^2}$ мажорантой при любом значении x является сходящийся знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Поэтому исходный ряд равномерно сходится на всем множестве действительных чисел.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 2. Если функции $u_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходится на X, то его сумма $s(x)$ тоже непрерывна в точке x_0.
Доказательство.

Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда $s_n(x)\underset{\rightarrow}{\rightarrow} s(x),$ поэтому существует такой номер n_0, что

$$|s(x)-s_{n_0}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$s_{n_0}(x)$ – сумма конечного числа непрерывных функций, поэтому $s_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что

$$|s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x\in X: |x-x_0|<\delta.$$

Тогда $\forall x\in X: |x-x_0|<\delta$ получаем:

$$|s(x)-s(x_0)|=|(s(x)-s_{n_0}(x))+(s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0))+(s_{n_0}(x_0)-s(x_0))|\le$$

$$\le|s(x)-s_{n_0}(x)|+\ldots+|s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0)|+|s_{n_0}(x_0)-s(x_0)|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

то есть функция $s(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Теорема 3. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходится на этом отрезке. Тогда $\forall x_0\in[a,b]$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(t)dt$$

тоже равномерно сходится на $[a, b]$ и

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(t)dt. \qquad (2)$$

(то есть в условиях теоремы ряд можно почленно интегрировать).
Доказательство.
По теореме 2 функция

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

непрерывна на $[a,\ b]$ и, следовательно, интегрируема на нем, то есть интеграл, стоящий в левой части равенства (2), существует. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(t)dt$ равномерно сходится к функции

$$\sigma(x)=\int_{x_0}^{x}s(t)dt.$$

Обозначим

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad r_n(x)=s(x)-s_n(x),$$

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}u_k(t)dt=\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt=\int_{x_0}^{x}s_n(t)dt.$$

Тогда для любого ε найдется такой номер N, что при $n>N$

$$|\sigma(x)-\sigma_n(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}s(t)dt-\int_{x_0}^{x}s_n(t)dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}|s(t)-s_n(t)|\,dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}|r_n(t)|\,dt\right|\le(b-a)\sup_{[a,b]}|r_n(t)|<\varepsilon.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(t)dt$ равномерно сходится, и его сумма равна

$$\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(t)dt.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,\ b]$ и ряд, составленный из их производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\qquad(3)$$

равномерно сходится на $[a,\ b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0\in[a,b]$, то он сходится равномерно на всем $[a,\ b]$, его сумма

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

(ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ можно почленно дифференцировать).

Доказательство.

Определим функцию $\sigma(x)$ как $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$. По теореме 3 ряд (3) можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\ u_n(x)-u_n(x_0)\ .$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, равномерно сходится на $[a,\ b]$ по теореме 3. Но числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ по условию теоремы сходится, следовательно, равномерно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.. Тогда

$$\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=s(x)-s(x_0).$$

Функция $\sigma(t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда непрерывных функций на $[a,\ b]$ и поэтому сама непрерывна. Тогда функция $\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt$ непрерывно дифференцируема на $[a,\ b]$, и

$$s'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x_0}\sigma(t)dt=\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x),$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2^n x.$$

Указание

Примените признак Даламбера и найдите значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1.$$

Решение

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log_2^{n+1} x}{\log_2^n x}\right| = |\log_2 x| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < \log_2 x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

При найденных значениях x ряд сходится, при x, не принадлежащих отрезку [0,5;2], ряд расходится, так как предел по Даламберу больше 1. Осталось исследовать сходимость ряда при x = 0,5 и x = 2, когда признак Даламбера неприменим.

$x = \frac{1}{2}$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ расходится, так как для него не выполнено необходимое условие сходимости.

При x = 2 $\log_2 2$ = 1, и полученный ряд расходится по той же причине. Следовательно, область сходимости – (0,5;2).

Ответ: (0,5;2).

Задача 2.

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^x}.$$

Указание

Рассмотрите отдельно случаи $x > 1$ и $x \le 1$.

Решение

При $x > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^x}$ сходится.

$$3+n^x > n^x \Rightarrow \frac{2}{3+n^x} < \frac{2}{n^x} \quad -$$

исходный ряд сходится по 2-му признаку сравнения.

При $x \le 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^x}$ расходится, следовательно, по 1-му признаку сравнения расходится и исходный ряд.

Ответ: (1; ∞).

Задача 3.

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2+x^n}.$$

Указание

Рассмотрите отдельно случаи $|x| > 1$, $|x| = 1$ и $|x| < 1$.

Решение

При $|x| > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{x^n}$ сходится (в частности, при $x < -1$ сходится абсолютно), так как представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

При $x = 1$ все члены ряда равны 1, то есть не выполнено необходимое условие сходимости – ряд расходится.

При $x = -1$ члены ряда с нечетными номерами равны 3, а члены с четными номерами равны 1, и ряд вновь расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

При $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2+x^n}=\frac{3}{2}\neq 1 \quad -$$

ряд расходится.

Ответ: $(-\infty;-1)$U$(1;\infty)$.

Задача 4.

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{3n}}.$$

Указание

Рассмотрите отдельно случаи $|x| > 1$, $|x| = 1$ и $|x| < 1$.

Решение

1) При $|x| > 1$

$$\frac{x^{2n}}{1-x^{3n}}=\frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}-x^n}\sim-\frac{1}{x^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{x^n}$ при $|x| > 1$ сходится (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия), следовательно, множество $|x| > 1$ входит в область сходимости.

2) При $x = 1$ ряд не существует, так как знаменатель каждой дроби обращается в 0; при $x = -1$ все члены ряда равны 0,5, то есть не выполнено необходимое условие сходимости. Таким образом, значения $x = \pm 1$ не входят в область сходимости.

3) При $|x| < 1$ сделаем замену

$$y=\frac{1}{x}, \quad |y|>1,$$

тогда общий член ряда имеет вид

$$\frac{x^{2n}}{1-x^{3n}}=\frac{\frac{1}{y^{2n}}}{1-\frac{1}{y^{3n}}}=\frac{y^n}{y^{3n}-1}\sim\frac{1}{y^{2n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y^{2n}}$ при $|y|>1$ сходится, поэтому множество $|x|<1$ входит в область сходимости.

Итак, ряд сходится при всех значениях x, кроме ± 1.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Задача 5.

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

Указание

Воспользуйтесь признаком Вейерштрасса, учитывая, что $|\cos nx|\le 1$.

Решение

$$|\cos nx|\le 1\Rightarrow\frac{|\cos nx|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, поэтому по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится абсолютно и равномерно при любом x.

Ответ: $-\infty;+\infty$.

Задача 6.

Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{e^{nx}}.$$

Указание

Примените признак Даламбера.

Решение

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2xe^{nx}}{n^2xe^{(n+1)x}}\right|=\frac{1}{e^x}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{e^x}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-x}<e^0\Rightarrow x>0.$$

Таким образом, при $x > 0$ ряд сходится, при $x < 0$ расходится. При $x = 0$ все члены ряда равны 0, следовательно, он сходится. Итак, область сходимости: $x \geq 0$.
Ответ: $[0;+\infty)$.

1.2.2. *Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Основные свойства степенных рядов: равномерная сходимость, непрерывность и бесконечная дифференцируемость суммы. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов*

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n = const. \qquad (1)$$

Замечание. С помощью замены $x - x_0 = t$ ряд (1) можно привести к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, поэтому все свойства степенных рядов достаточно доказать для рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (2)$$

Теорема 1 (1-я теорема Абеля). Если степенной ряд (2) сходится при $x = x_0$, то при любом x: $|x| < |x_0|$ ряд (2) сходится абсолютно. Если же ряд (2) расходится при $x = x_0$, то он расходится при любом x: $|x| > |x_0|$.
Доказательство.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, поэтому существует константа

$$c > 0: \quad |a_n x_0^n| \leq c \quad \forall n.$$

Следовательно,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq c\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ при $|x|<|x_0|$ сходится, так как является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $|x|<|x_0|$ абсолютно сходится.

Если известно, что ряд (2) расходится при $x = x_0$, то он не может сходиться при $|x| > |x_0|$, так как из ранее доказанного при этом следовало бы, что он сходится и в точке x_0.

Таким образом, если найти наибольшее из чисел $x_0 > 0$ таких, что (2) сходится при $x = x_0$, то областью сходимости данного ряда, как следует из теоремы Абеля, будет интервал ($-x_0$, x_0), возможно, включающий одну или обе границы.

Число $R \geq 0$ называется **радиусом сходимости** степенного ряда (2), если $\forall x : |x| < R$ этот ряд сходится,
а $\forall x : |x| > R$ расходится.
Интервал ($-R$, R) называется **интервалом сходимости** ряда (2).

Пример 1.

Для исследования абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)! x^{n+1}|}{|n! x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases} \infty, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, ряд сходится только при $x = 0$, и радиус его сходимости равен 0: $R = 0$.

Пример 2.

Используя тот же признак Даламбера, можно показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится при любом x, то есть $R = \infty$.

Пример 3.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ по признаку Даламбера получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}| \cdot n}{(n+1)|x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Следовательно, при $-1 < x < 1$ ряд сходится, при $x < -1$ и $x > 1$ расходится. При $x = 1$ получаем гармонический ряд, который, как известно, расходится, а при $x = -1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно по признаку Лейбница. Таким образом, радиус сходимости рассматриваемого ряда $R = 1$, а интервал сходимости – $[-1, 1)$.

Формулы для определения радиуса сходимости степенного ряда

Формула Даламбера

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ и применим к нему признак Даламбера: для сходимости ряда необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, то область сходимости определяется неравенством $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, , то есть

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad - \qquad (3)$$

формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости.

Формула Коши-Адамара

Используя радикальный признак Коши и рассуждая аналогичным образом, получим, что можно задать область сходимости степенного ряда как множество решений неравенства

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

при условии существования этого предела, и, соответственно, найти еще одну формулу для радиуса сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \quad - \qquad (4)$$

формула Коши-Адамара.

Свойства степенных рядов

Теорема 2 (2-я теорема Абеля). Если R – радиус сходимости ряда (2) и этот ряд сходится при $x = R$, то он равномерно сходится на интервале ($-R$, R).

Доказательство.

$\forall \rho : 0 < \rho < R$ знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ сходится по теореме 1.

Следовательно, ряд (2) равномерно сходится в интервале [$-\rho$, ρ] по теореме 1. Из выбора ρ следует, что интервал равномерной сходимости – (- R, R), что и требовалось доказать.

Следствие 1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма ряда (2) есть непрерывная функция.
Доказательство.
Члены ряда (2) являются непрерывными функциями, и ряд равномерно сходится на рассматриваемом отрезке. Тогда непрерывность его суммы следует из теоремы 2.

Следствие 2. Если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx.$$

Доказательство этого утверждения следует из соответствующего свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 3. Если ряд (2) имеет интервал сходимости ($-R$, R), то ряд

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \quad (5)$$

полученный почленным дифференцированием ряда (2), имеет тот же интервал сходимости ($-R$, R). При этом

$$\varphi'(x) = s'(x) \text{ при } |x| < R, \quad (6)$$

то есть внутри интервала сходимости производная от суммы степенного ряда равна сумме ряда, полученного его почленным дифференцированием.

Доказательство.

Выберем ρ: $0 < \rho < R$ и ξ: $\rho < \xi < R$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ сходится, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \xi^n = 0, \quad \text{то} \quad \text{есть} \quad \exists M : |a_n \xi^n| < M \quad \forall n \geq 0.$$

Если $|x| \leq \rho$, то

$$|na_n x^{n-1}| \leq |na_n \rho^{n-1}| = n |a_n \xi^{n-1}| \left|\frac{\rho}{\xi}\right|^{n-1} < n\frac{M}{\xi} q^{n-1},$$

где $q = \dfrac{\rho}{\xi} < 1$. Таким образом, члены ряда (5) по модулю меньше членов знакоположительного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{M}{\xi} q^n$, который сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1,$$

то есть является мажорантой для ряда (5) при $x \in [-\rho, \rho]$. Поэтому ряд (5) равномерно сходится на [$-\rho$, ρ]. Следовательно, свойству равномерно

сходящегося ряда верно равенство (6). Из выбора ρ следует, что ряд (5.6) сходится в любой внутренней точке интервала $(-R, R)$.
Докажем, что вне этого интервала ряд (5) расходится. Действительно, если бы он сходился при $x_1 > R$, то, интегрируя его почленно на интервале $(0, x_2)$, $R < x_2 < x_1$, мы получили бы, что ряд (2) сходится в точке x_2 , что противоречит условию теоремы. Итак, теорема полностью доказана.

Замечание. Ряд (5) можно, в свою очередь, почленно дифференцировать и проделывать эту операцию сколько угодно раз.
Вывод: если степенной ряд сходится на интервале $(-R, R)$, то его сумма представляет собой функцию, имеющую внутри интервала сходимости производные любого порядка, каждая из которых есть сумма ряда, полученного из исходного с помощью почленного дифференцирования соответствующее количество раз; при этом интервал сходимости для ряда из производных любого порядка есть $(-R, R)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.
Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2\cdot 2^n}.$$

Указание

Примените формулу Даламбера.

Решение

Применим формулу Даламбера:

$$a_n=\frac{1}{(n+1)^2\cdot 2^n};\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)^2\cdot 2^{n+1}};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=2.$$

Ответ: 2.

Задача 2.
Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^n x\right)^n.$$

Указание

Воспользуйтесь формулой Коши-Адамара.

Решение

Применим формулу Коши-Адамара:

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2};$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}} = \frac{1}{e^2}.$$

Ответ: $\frac{1}{e^2}$.

Задача 3.

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{\sqrt{n}}.$$

Указание

Определите радиус сходимости, найдите интервал сходимости (x_0-R; x_0+R), где x_0 = 3, а затем исследуйте сходимость ряда на границах полученного интервала.

Решение

$$x_0 = 3, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n+1}};$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости: (3-1; 3+1), то есть (2; 4).

Проверим сходимость ряда на границах интервала.

$$x = 2 \Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{-1}{\sqrt{n}} \quad -$$

знакопостоянный расходящийся ряд.

$$x = 4 \Rightarrow \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \quad -$$

знакопеременный ряд, сходится условно по признаку Лейбница.

Ответ: (2;4].

Задача 4.

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9^n x^{2n}.$$

Указание

Поскольку ряд содержит только четные степени x, лучше воспользоваться общими методами поиска области сходимости функционального ряда (например, радикальным признаком Коши).

Решение

Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} 9x^2 = 9x^2 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}.$$

На границах полученного интервала ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости:

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow 9^n x^{2n} = 9^n \left(\frac{1}{9}\right)^n = 1 \neq 0;$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 9^n x^{2n} = 9^n \left(\frac{1}{9}\right)^n = 1 \neq 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Задача 5.

Найти интервал равномерной сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^4}.$$

Указание

Найдите интервал сходимости ряда и воспользуйтесь 2-й теоремой Абеля.

Решение

Найдем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости: (-2-1; -2+1), или (-3;-1). При x = -1 получаем сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, следовательно, по 2-й теореме Абеля рассматриваемый ряд равномерно сходится на интервале (-3;-1).

Ответ: (-3;-1).

1.2.3. *Разложение функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Применение степенных рядов*

В предыдущих лекциях рассматривались степенные ряды, для которых в пределах области равномерной сходимости сумма ряда $s(x)$ представляет собой непрерывную и бесконечно дифференцируемую функцию от x. Теперь поставим обратную задачу: найти степенной ряд, суммой которого является данная функция.

Представление функции в виде

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \quad a_n=const \quad (1)$$

называется ее **разложением в степенной ряд**.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ раскладывается в окрестности точки x_0 в степенной ряд (6.1) с радиусом сходимости R, то:

1) функция f имеет на интервале $(x_0 - R\ , x_0 + R)$ производные всех порядков, которые можно найти почленным дифференцированием ряда (1):

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)...(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, \quad m=1,2,... \quad (2)$$

2) $\forall x\in(x_0-R,x_0+R) \quad \int\limits_{x_0}^{x}f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad (3)$

3) ряды (1), (2) и (3) имеют одинаковые радиусы сходимости.

Доказательство всех трех утверждений следует из общих свойств степенных рядов.

Теорема 2. Если функция f раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд (1), то

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n=0,1,2...,$$

и, следовательно, справедлива формула

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (4)$$

Доказательство.

Дифференцируя m раз равенство (1), получим:

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)...2\cdot1\cdot a_m+$$

$$+(m+1)m...2a_{m+1}(x-x_0)+(m+2)(m+1)...3a_{m+2}(x-x_0)^2+...$$

Примем $x = x_0$, тогда $f^{(m)}(x_0) = m!a_m$, что доказывает формулу (4).

Следствие. Если в некоторой окрестности заданной точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.
Действительно, из теоремы 2 следует, что коэффициенты степенного ряда могут иметь только вид, задаваемый формулой (4).

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется **рядом Тейлора**.

Пример 1.
Найдем разложение в ряд Тейлора при $x_0 = 0$ функции $f(x) = 2^x$.

$$a_0 = 2^0 = 1, \quad a_1 = \frac{2^0}{\ln 2 \cdot 2!} = \frac{1}{2!\ln 2}, \ldots,$$

$$a_n = \frac{2^0}{\ln^n 2 \cdot n!} = \frac{1}{n!\ln^n 2}.$$

Следовательно,

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\ln^n 2} x^n..$$

Если при разложении в ряд Тейлора принимается $x_0 = 0$, то полученный ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (5)$$

называется **рядом Маклорена**

(см. предыдущий пример).

Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций

В курсе 2-го семестра рассматривалось представление функции в виде многочлена Тейлора с остаточным членом. Поскольку коэффициенты ряда Тейлора и многочлена Тейлора вычисляются по одной и той же формуле, мы можем воспользоваться проведенными ранее вычислениями для получения разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций. При этом обратим особое внимание на определение области сходимости полученных рядов.

$$1. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Сходимость полученного ряда исследовалась в примере 2 лекции 1.2.2, где показано, что он абсолютно сходится при любом x.

$$2. \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$3. \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Используя формулу Даламбера для определения радиуса сходимости, найдем, что он равен бесконечности, то есть функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ раскладываются в ряд Тейлора на всем множестве действительных чисел.

$$4. \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Запишем остаточный член этой формулы в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

и исследуем его поведение при $n \to \infty$ для $|x| < 1$, $|x| > 1$ и $|x| = 1$. При $|x| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, при $|x| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \infty$. Поэтому по свойству остатка ряда (лекция 1.1.1) при $|x| < 1$ ряд сходится, а при $|x| > 1$ расходится. При $x = -1$ ряд расходится, так как представляет собой гармонический ряд, все члены которого имеют знак «-», а при $x = 1$ получаем знакопеременный ряд, сходящийся условно по признаку Лейбница. Следовательно, областью сходимости полученного ряда является интервал (-1, 1].

$$5. \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Найдем радиус сходимости этого ряда по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости – (-1, 1).

Формула Эйлера

Используя разложения в ряд Тейлора функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$, получим:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = \cos y + i \sin y.$$

Таким образом, доказана используемая в теории комплексных чисел **формула Эйлера**:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y.}$$

Применение степенных рядов

Возможность разложения функции в степенной ряд позволяет существенно упростить многие математические операции: вычисление приближенных значений данной функции, дифференцирование, интегрирование, поскольку степенной ряд можно заменить многочленом (с учетом того, что оценка остатка ряда не превысит заданного значения погрешности). В частности, можно приближенно вычислять «неберущиеся» интегралы, находить приближенные решения дифференциальных уравнений и т.д.

1. Рассмотрим вычисление интегралов с помощью рядов.

Пример 2.

Для вычисления интеграла

$$\int_0^a e^{-x^2} dx$$

разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора, используя разложение функции e^x:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}+\ldots$$

Тогда

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\left.\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}+\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots\right)\right|_0^a=$$
$$=a-\frac{a^3}{1!\cdot 3}+\frac{a^5}{2!\cdot 5}-\frac{a^7}{3!\cdot 7}+\ldots$$

С помощью этого равенства можно вычислить рассматриваемый интеграл при любом a с любой заданной точностью.

Пример 3.

Вычислим интеграл

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx,$$

для чего разложим функцию $\frac{\sin x}{x}$ в ряд:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots \quad -$$

ряд, сходящийся при любом x. Интегрируя почленно, получим:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx=a-\frac{a^3}{3!\cdot 3}+\frac{a^5}{5!\cdot 5}-\frac{a^7}{7!\cdot 7}+\ldots$$

2. Приближенное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y''=F(x,y,y'),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0.$$

Если предположить, что решение имеет вид:

$$y=f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots,$$

то требуется найти значения производных

$$f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \ldots$$

от частного решения при $x = x_0$. Из начальных условий следует, что

$$f(x_0)=y_0, \quad f'(x_0)=y'_0.$$

Тогда из исходного уравнения получаем, что

$$f''(x_0)=F(x_0,y_0,y'_0).$$

Дифференцируя обе части исходного уравнения по x, найдем:

$$y'''=F'_x+F'_y\cdot y'+F'_{y'}\cdot y'',$$

откуда можно определить

$$f'''(x_0)=y'''\Big|_{x=x_0}$$

и т.д.

Пример 4.

Найти решение уравнения

$$y'' = -yx^2$$

при $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Решение:

$$f''(0) = 0; y''' = -y'x^2 - 2xy \Rightarrow f'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)} = -y''x^2 - 4xy' - 2y \Rightarrow f^{(4)}(0) = -2$$

и т.д.

Можно получить общую формулу для производных любого порядка:

$$y^{(k+2)} = -y^{(k)}x^2 - 2kxy^{(k-1)} - k(k-1)y^{(k-2)}.$$

При $x = 0$ эта формула дает

$$y_0^{(k+2)} = -k(k-1)y_0^{(k-2)}.$$

Так как

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0,$$

то в нуль обращаются все производные, порядок которых не кратен четырем. В конечном счете решение имеет вид:

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{x^8}{8!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 - \ldots +$$

$$+(-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!} \cdot (1 \cdot 2)(5 \cdot 6) \ldots (4k-3)(4k-2) + \ldots$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Разложить функцию

$$y = \cos\frac{\pi x}{4}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

Указание

Используйте формулу для коэффициентов ряда Тейлора

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

при $x_0 = 2$.

Решение

Вычислим несколько первых коэффициентов ряда Тейлора, а затем попытаемся определить их зависимость от n и составить общую формулу для a_n.

$$y(2)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow a_0=0;$$

$$y'=-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{4}, \quad y'(2)=-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow a_1=-\frac{\pi}{4};$$

$$y''=-\frac{\pi^2}{4^2}\cos\frac{\pi x}{4}, \quad y''(2)=-\frac{\pi^2}{4^2}\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow a_2=0;$$

$$y'''=\frac{\pi^3}{4^3}\sin\frac{\pi x}{4}, \quad y'''(2)=\frac{\pi^3}{4^3}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^3}{4^3} \Rightarrow a_3=\frac{\pi^3}{4^3\cdot 3!}.$$

Видим, что все коэффициенты с четными номерами равны нулю, а общий вид коэффициента с нечетным номером $n = 2k + 1$ можно записать так:

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^{k+1}\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}\cdot(2k+1)!}.$$

Следовательно, ряд Тейлора для данной функции имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}\cdot(2k+1)!}(x-2)^{2k+1}.$$

Ответ: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\pi^{2k+1}}{4^{2k+1}\cdot(2k+1)!}(x-2)^{2k+1}.$

Задача 2.

Разложить функцию

$$y=e^{-x^3}$$

в ряд Маклорена.

Указание

Используйте разложение в ряд Маклорена функции e^x:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Решение

Обозначим $t = -x^3$, тогда

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}.$$

Следовательно,

$$e^{-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^3)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}.$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}.$

Задача 3.

Разложить функцию

$$y = x\ln(5-x)$$

в ряд Маклорена.

Указание

Используйте разложение в ряд Маклорена функции ln(1 + x):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Решение

Преобразуем функцию к виду:

$$x\ln(5-x) = x\ln\left(5\left(1-\frac{x}{5}\right)\right) = x\ln 5 + x\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)$$

и найдем разложение в ряд Маклорена функции $\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)$:

$$\ln\left(1-\frac{x}{5}\right) \overset{t=-\frac{x}{5}}{=} \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n x^n}{n\cdot 5^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 5^n}.$$

Тогда разложение исходной функции можно записать так:

$$x\ln 5 + x\ln\left(1-\frac{x}{5}\right) = x\ln 5 - x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 5^n} = x\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n\cdot 5^n}.$$

Ответ: $x\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n\cdot 5^n}$.

Задача 4.

Разложить функцию

$$y = \arcsin x$$

в ряд Маклорена.

Указание

Используйте то, что степенные ряды можно почленно интегрировать:

$$\text{\textit{если}} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{\textit{то}} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx.$$

Решение

Поскольку

$$\arcsin x\ ' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

мы можем, используя табличные разложения, получить ряд Маклорена для производной исходной функции, а затем найти разложение arcsin x, исходя из того, что

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n \cdot n!}(-1)^n x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n \cdot n!} x^{2n}.$$

$$\int_0^x 1 \cdot dt = x, \quad \int_0^x t^{2n} dt = \left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n+1}.$$

Ответ: $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n+1}.$

Задача 5.
Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n(n+2)}$$

на интервале (0;1).

Указание

Покажите, что ряд равномерно сходится на заданном интервале, затем найдите сумму ряда, составленного из производных членов данного ряда, и проинтегрируйте ее.

Решение

Поскольку при x = 1 числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$ абсолютно сходится, по признаку Вейерштрасса данный степенной ряд равномерно сходится на интервале (0;1). Найдем сумму ряда, составленного из производных членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n}=$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{n}=x\ln(1+x).$$

Следовательно, сумму данного ряда можно найти как интеграл от полученной функции в пределах от 0 до x, где $0 < x < 1$:

$$s(x)=\int_0^x t\ln(1+t)dt=\frac{t^2}{2}\ln(1+t)\Big|_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t^2dt}{1+t}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+t)\right)\Big|_0^x=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\ln\sqrt{1+x}.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln(1+x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\ln\sqrt{1+x}.$

Задача 6.

Вычислить значение $\frac{1}{e}$ с точностью до 0,001.

Указание

Используйте разложение функции e^x в ряд Маклорена и то, что n-ый остаток знакочередующегося ряда не больше, чем a_n.

Решение

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

следовательно,

$$e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\frac{1}{5040}+\ldots$$

Видим, что 8-й член ряда меньше 0,001, следовательно, остаток ряда начиная с 8-го члена меньше 0,001. Поэтому для достижения заданной точности достаточно найти сумму первых семи членов ряда:

$$e^{-1}\approx 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=\frac{53}{144}\approx 0,368.$$

Ответ: 0,368.

2. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

2.1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1.1. *Двойной и тройной интегралы, их свойства. Геометрический смысл двойного интеграла*

Рассмотрим в плоскости Оxy замкнутую область D, ограниченную линией L. Разобьем эту область какими-нибудь линиями на n частей ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_n (причем теми же символами ΔS_1, ΔS_2,..., ΔS_n будем обозначать и площади соответствующих частей) и выберем в каждой части точку P_i (рис.1).

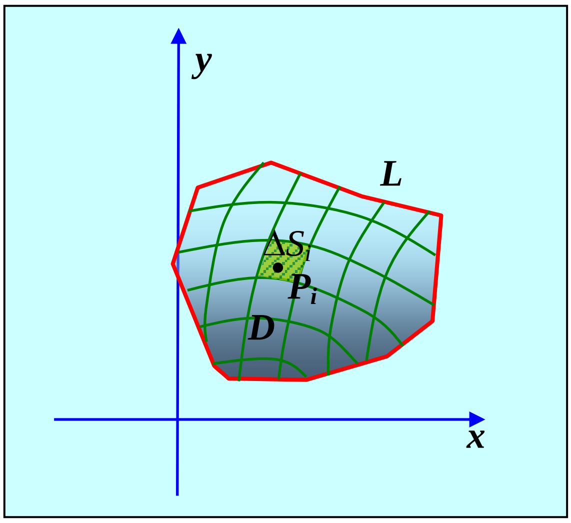


Рис.1

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$,…, $f(P_n)$ значения этой функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

Сумма вида

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

называется **интегральной суммой** для функции *f(x, y)* в области *D*.

С геометрической точки зрения (при $f(x, y) \geq 0$) интегральная сумма представляет собой сумму объемов цилиндров с основаниями ΔS_i и высотами $f(P_i)$.

Если существует один и тот же предел интегральных сумм при $n \to \infty$ и $\max \Delta S_i \to 0$, не зависящий от способа разбиения области D и выбора точек P_i, то он называется **двойным интегралом от функции *f(x, y)* по области *D*** и обозначается

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i.$$

Область D при этом называется **областью интегрирования**.

Замечание 1.

Для выяснения вопроса об условиях интегрируемости функции двух переменных можно по аналогии со случаем определенного интеграла ввести понятие верхней и нижней интегральных сумм, выбирая в каждой части области D точки, значение функции в которых является наибольшим и наименьшим для данной части. Тогда можно доказать, что необходимым и достаточным условием интегрируемости функции $f(x, y)$ является, во-первых, ее ограниченность на D, а во-вторых, условие

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

где τ – некоторое разбиение, а S_τ и s_τ – соответственно верхняя и нижняя интегральные суммы. Доказательство этого утверждения проводится так же, как для случая определенного интеграла.

Замечание 2.

Аналогично одномерному случаю можно доказать еще одно утверждение: если функция $f(x, y)$ непрерывна на D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойных интегралов

1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D, то $kf(x, y)$ тоже интегрируема в этой области, причем

$$\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

2. Если в области D интегрируемы функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, то в этой области интегрируемы и функции $f(x, y) \pm g(x, y)$, и при этом

$$\iint\limits_D \left(f(x,y) \pm g(x,y) \right) dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

3. Если для интегрируемых в области D функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \leq g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

4. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек и функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Доказательство.

Интегральную сумму по области D можно представить в виде:

$$\sum_{D} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(P_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(P_i)\Delta S_i,$$

где разбиение области D проведено так, что граница между D_1 и D_2 состоит из границ частей разбиения. Переходя затем к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим равенство 4.

5. В случае интегрируемости на D функции $f(x, y)$ в этой области интегрируема и функция $|f(x, y)|$, и имеет место неравенство

$$\left|\iint_{D} f(x,y)dxdy\right| \le \iint_{D} |f(x,y)|\,dxdy.$$

Доказательство.

$$\left|\sum_{D} f(P_i)\Delta S_i\right| \le \sum_{D} |f(P_i)|\,\Delta S_i,$$

откуда с помощью предельного перехода при $\max \Delta S_i \to 0$ получаем неравенство 5.

6. $\iint_{D} dxdy = S_D$, где S_D – площадь области D. Доказательство этого утверждения получим, подставляя в интегральную сумму $f(x, y) \equiv 1$.

7. Если интегрируемая в области D функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$m \le f(x, y) \le M,$$

то

$$mS_D \le \iint_{D} f(x,y)dxdy \le MS_D.$$

Доказательство проводится предельным переходом из очевидного неравенства

$$mS_D \le \sum_{D} f(P_i)\Delta S_i \le MS_D.$$

Следствие.

Если разделить все части неравенства

$$mS_D \le \iint_{D} f(x,y)dxdy \le MS_D$$

на S_D, можно получить так называемую теорему о среднем:

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \mu S_D, \quad m \le \mu \le M.$$

В частности, при условии непрерывности функции f в D найдется такая точка этой области (x_0, y_0), в которой $f(x_0, y_0) = \mu$, то есть

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S_D \quad –$$

еще одна формулировка теоремы о среднем.

Тройной интеграл

Понятие тройного (а в дальнейшем – n-мерного) интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию $f(x, y, z)$. Затем разобьем область V на произвольные части Δv_i , считая объем каждой части равным Δv_i , и составим интегральную сумму вида

$$\sum_V f(P_i)\Delta v_i ,$$

где точка P_i принадлежит Δv_i . Пусть ρ – наибольшее расстояние между двумя точками любой части области V.

Предел при $\rho \to 0$ интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения области V, называется **тройным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *V*:**

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\rho\to 0}\sum_V f(P_i)\Delta v_i .$$

Замечание 1.

Условие непрерывности подынтегральной функции не является обязательным для существования кратного (двойного, тройного и т.д.) интеграла, но исследование вопросов, связанных с интегрированием разрывных функций, выходит за рамки нашего курса.

Замечание 2.

Все сформулированные ранее свойства двойного интеграла можно распространить на тройной интеграл.

Замечание 3.

Подобным образом можно дать определение интеграла любой кратности, рассматривая функцию n переменных, заданную в замкнутой области n-мерного пространства.

Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело V, ограниченное частью поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$, проекцией D этой поверхности на плоскость Oxy и боковой цилиндрической поверхностью, полученной из вертикальных образующих, соединяющих точки границы поверхности с их проекциями.

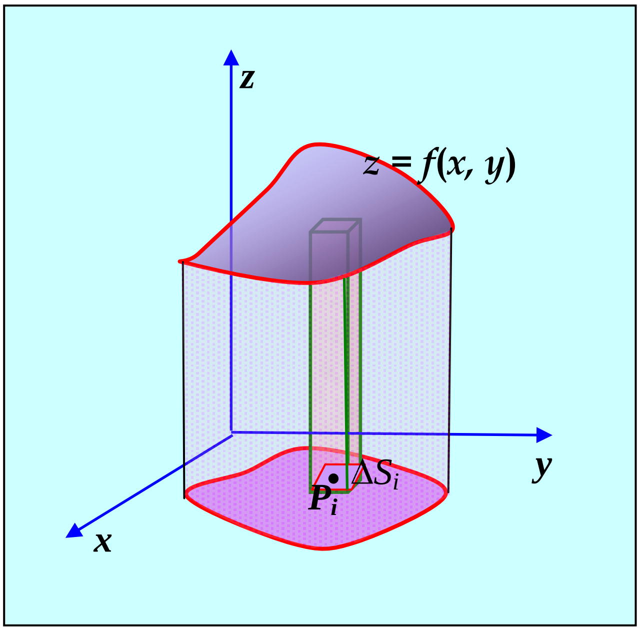


Рис.2

Будем искать объем этого тела как предел суммы объемов цилиндров, основаниями которых являются части ΔS_i области D, а высотами – отрезки длиной $f(P_i)$, где точки P_i принадлежат ΔS_i. Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим, что

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

то есть двойной интеграл представляет собой объем так называемого цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу – областью D.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Пользуясь определением двойного интеграла, вычислить

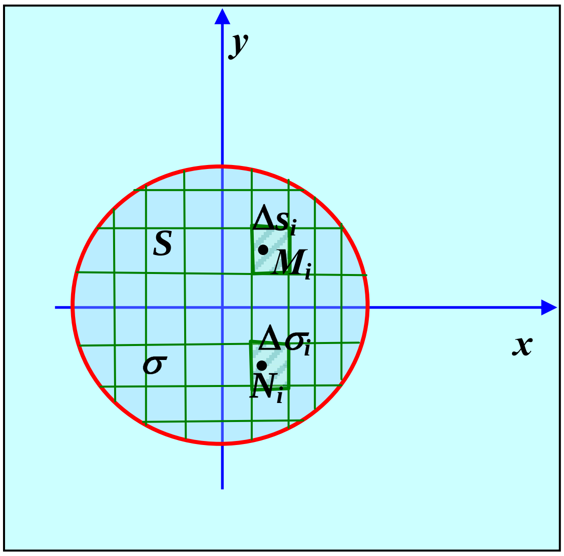
$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} x^2 y^3 dxdy.$$

Указание

Выберите разбиение области интегрирования так, чтобы оно состояло из участков, симметричных относительно оси Ox.

Решение

Выберем разбиение области интегрирования так, чтобы оно состояло из участков, симметричных относительно оси Ox.



Составим две интегральных суммы: одну – по области S ($y \geq 0$), вторую – по области σ ($y \leq 0$); при этом выберем точки на элементах разбиения так, чтобы точке $M_i(x_i;\ y_i)$, принадлежащей элементу разбиения Δs_i, соответствовала точка $N_i(x_i;\ -y_i)$, принадлежащая элементу разбиения $\Delta\sigma_i$. Тогда интегральная сумма по всему кругу может быть представлена в виде:

$$\sum_{i=1}^{2n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^3 \Delta s_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2(-y_i^3)\Delta\sigma_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \quad x_i^2 y_i^3 - x_i^2 y_i^3 \quad \Delta s_i = 0.$$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна в области интегрирования, то она интегрируема, и, следовательно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения. Таким образом, интеграл равен 0.

Ответ: 0.

Задача 2.

С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy,$$

где $f(x,y)$ – непрерывная функция.

Указание

Воспользуйтесь теоремой о среднем:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S_D.$$

Решение

Областью интегрирования является круг радиуса R. При $R \to 0$ единственной общей точкой всех кругов является начало координат. Поэтому можно считать, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy = f(0,0)\cdot \pi R^2.$$

Отсюда

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy = f(0,0).$$

Ответ: $f(0,0)$.

Задача 3.
Оценить интеграл

$$\iint\limits_{D} x+y+1\ \ ds,$$

где D – прямоугольник $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Указание

Воспользуйтесь свойством двойного интеграла: если интегрируемая в области D функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$m \le f(x, y) \le M,$$

то

$$mS_D \le \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \le MS_D.$$

Решение

Найдем наименьшее и наибольшее значение подынтегральной функции в прямоугольнике $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ – очевидно, что они достигаются при соответственно наименьших и наибольших значениях x и y, то есть

$$m = 0+0+1 = 1, \quad M = 1+2+1 = 4;$$

$$S_{прямоугольника} = 2;$$

$$1\cdot 2 \le \iint\limits_{D}(x+y+1)dxdy \le 4\cdot 2,$$

$$2 \le \iint\limits_{D}(x+y+1)dxdy \le 8.$$

Ответ: $2 \le I \le 8$.

2.1.2. *Вычисление двойного интеграла путем сведения его к повторному. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах*

Рассмотрим область D, ограниченную линиями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда любая прямая, параллельная координатной оси Oy и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границу области в двух точках: N_1 и N_2 (рис.1).

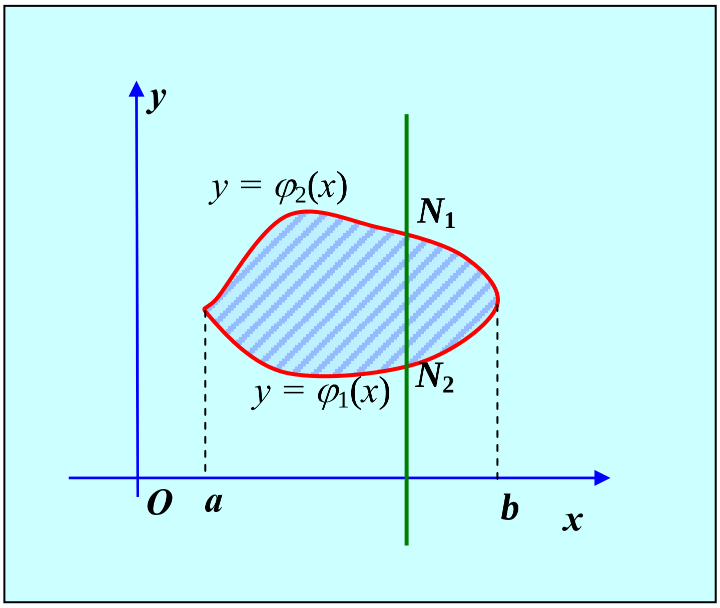


Рис. 1

Назовем такую область **правильной** в направлении оси Оy. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси Оx. Область, правильную в направлении обеих координатных осей, будем называть просто правильной. Например, правильная область изображена на рис.1.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D. Рассмотрим выражение

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx, \qquad (1)$$

называемое **двукратным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области D. Вычислим вначале внутренний интеграл (стоящий в скобках) по переменной y, считая x постоянным. В результате получится непрерывная функция от x:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Полученную функцию проинтегрируем по x в пределах от a до b. В результате получим число

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

Докажем важное свойство двукратного интеграла.

Теорема 1. Если область D, правильная в направлении Oy, разбита на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси Oy или оси Ox, то двукратный интеграл по области D будет равен сумме таких же интегралов по областям D_1 и D_2:

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Доказательство.

а) Пусть прямая $x = c$ разбивает D на D_1 и D_2 , правильные в направлении Oy. Тогда

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

б) Пусть прямая $y = h$ разбивает D на правильные в направлении Oy области D_1 и D_2 (рис.2). Обозначим через $M_1(a_1, h)$ и $M_2(b_1, h)$ точки пересечения прямой $y = h$ с границей L области D.

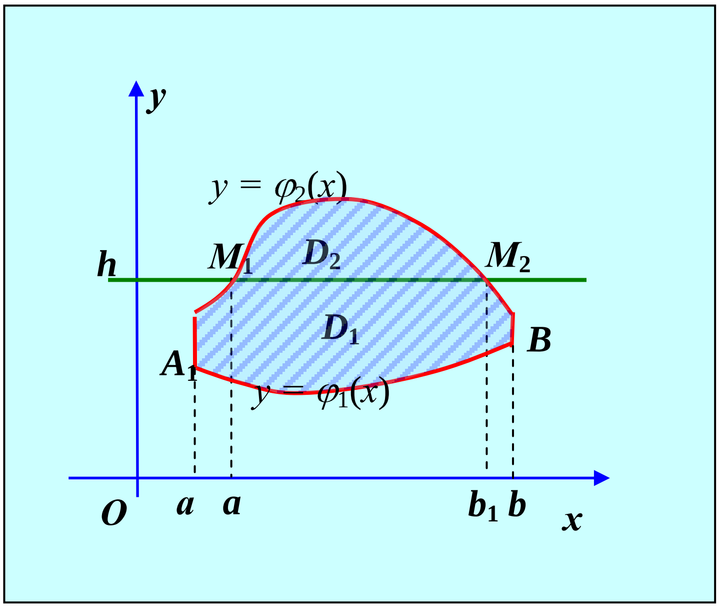


Рис. 2

Область D_1 ограничена непрерывными линиями

1) $y = \varphi_1(x)$;

2) кривой $A_1M_1M_2B$, уравнение которой запишем $y = \varphi_1^*(x)$, где $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ при $a \le x \le a_1$ и $b_1 \le x \le b$, $\varphi_1^*(x) = h$ при $a_1 \le x \le b_1$;

3) прямыми $x = a$, $x = b$.

Область D_2 ограничена линиями $y = \varphi_1^*(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a_1 \le x \le b_1$.

Применим к внутреннему интегралу теорему о разбиении промежутка интегрирования:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Представим второй из полученных интегралов в виде суммы:

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^{a_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx+\int_{b_1}^{b}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Поскольку $\varphi_1{}^*(x) = \varphi_2(x)$ при $a \le x \le a_1$ и $b_1 \le x \le b$, первый и третий из полученных интегралов тождественно равны нулю. Следовательно,

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy\right)dx+\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

то есть

$$I_D=I_{D_1}+I_{D_2}.$$

Следствие.

Таким же образом можно разбить область D на любое число правильных областей. При этом двукратный интеграл по области D будет равен сумме интегралов по частичным областям.

Замечание 1.

Используя теорему 1 и теоремы о среднем для определенного интеграла, можно доказать, что для двукратного интеграла справедливы соотношения:

$$mS\le\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx\le MS,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x, y)$ в области D, а S – площадь этой области, и

$$I_D = f(P)S, \qquad (2)$$

где P – точка, принадлежащая области D .

Замечание 2.

Более употребительной формой записи двукратного интеграла является

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Теорема 2. Двойной интеграл от непрерывной функции *f(x, y)* по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по данной области, то есть

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx. \qquad (3)$$

Доказательство.

Разобьем область D прямыми, параллельными координатным осям, на n правильных (в основном прямоугольных) областей $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Тогда по теореме 1

$$I_D = I_{\Delta S_1} + I_{\Delta S_2} + \ldots + I_{\Delta S_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta S_i}..$$

Из (2) получим:

$$I_{\Delta S_i} = f(P_i)\Delta S_i, \quad I_D = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i,$$

где справа стоит интегральная сумма, предел которой равен двойному интегралу от f по области D, а слева – постоянное число I_D . Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим равенство (3).

Пример 1.

Вычислим двойной интеграл от функции $z = x + y$ по области, представляющей собой треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1) и (1,0) (рис.3).

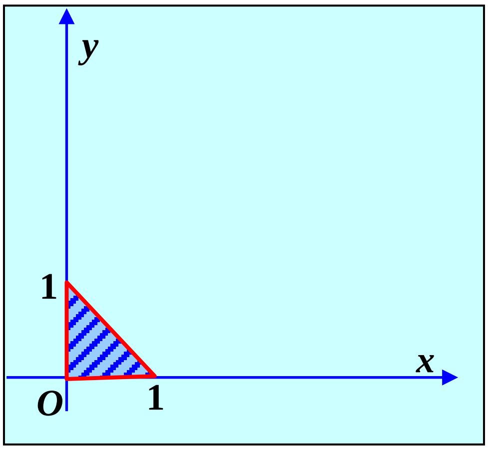


Рис. 3

Здесь $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1 - x$. Тогда

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^{1-x} \right) = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Напомним определение полярных координат: координатная система состоит из точки O (полюса) и выходящего из него луча (полярной оси). Координатами точки M в этой системе являются длина отрезка MO – полярный радиус ρ и угол φ между MO и полярной осью: $M(\rho,\varphi)$.

Правильной областью в полярных координатах назовем такую область, границу которой каждый луч, выходящий из полюса, пересекает не более чем в двух точках (рис.4).

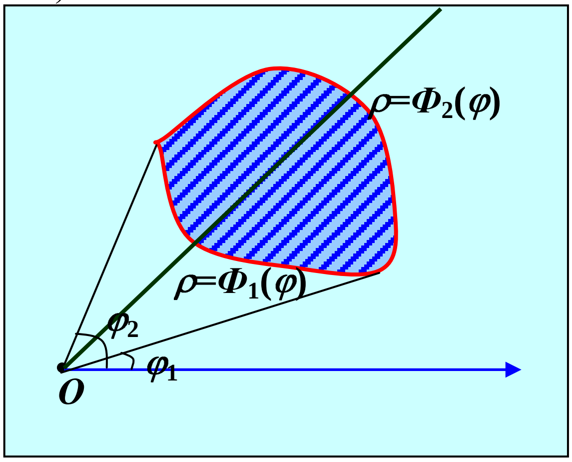


Рис. 4

Зададим в области D, ограниченной кривыми $\rho=\Phi_1(\varphi)$ и $\rho=\Phi_2(\varphi)$, где $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, непрерывную функцию $z = f(\varphi, \rho)$. Разобьем область D на части ΔS_{ik}, ограниченные лучами $\rho = \rho_{i-1}$ и $\rho = \rho_i$, выходящими из полюса, и дугами окружностей $\varphi = \varphi_{k-1}$ и $\varphi = \varphi_k$ с центром в полюсе, и составим интегральную сумму

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_i f(P_{ik})\Delta S_{ik}\right),$$

где P_{ik} – точка, принадлежащая ΔS_{ik}. Найдем площадь части ΔS_{ik}, не пересекаемой границей области, как разность площадей двух секторов:

$$\Delta S_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2\Delta\varphi_k - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_k =$$

$$= \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i\Delta\varphi_k = \rho_i^*\Delta\rho_i\Delta\varphi_k,$$

где $\rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta\rho_i$. Учитывая, что площади частей, пересекаемых границей области, стремятся к нулю при $\Delta\varphi_k \to 0$ и $\Delta\rho_i \to 0$, получим:

$$\iint_D f(\rho,\varphi)d\rho d\varphi = \lim_{\substack{\Delta\rho_i\to 0\\ \Delta\varphi_k\to 0}} V_n =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\rho_i\to 0\\ \Delta\varphi_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_i f(\rho_i^*,\varphi_k^*)\rho_i^*\Delta\rho_i\right)\Delta\varphi_k = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho\right)d\varphi.$$

Пример 2.

Выведем с использованием двойного интеграла формулу для площади круга радиуса R с центром в начале координат:

$$\iint_D d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^R\right) = \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле от функции

$$z = f(x, y)$$

по области, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 7x + 8 \quad и \quad y = 3x + 5.$$

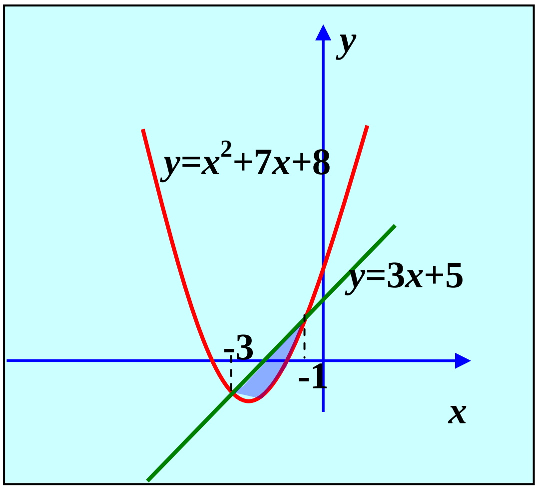
Указание

Найдите абсциссы точек пересечения кривых, ограничивающих область интегрирования (для этого нужно решить уравнение

$$x^2 + 7x + 8 = 3x + 5).$$

Тем самым вы найдете пределы интегрирования во внешнем интеграле, если в качестве внешней переменной выбран x.

Решение



Найдем пределы интегрирования во внешнем интеграле:

$$x^2 + 7x + 8 = 3x + 5 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = a = -3;\ x_2 = b = -1.$$

Кроме того, на графике видно, что нижней границей области интегрирования является парабола $y=x^2+7x+8$, а верхней границей – прямая $y=3x+5$. Эти формулы задают пределы интегрирования во внутреннем интеграле (по переменной y). Следовательно, повторный интеграл будет иметь вид:

$$\int_{-3}^{-1} dx \int_{x^2+7x+8}^{3x+5} f(x, y)dy.$$

Ответ: $\int_{-3}^{-1} dx \int_{x^2+7x+8}^{3x+5} f(x, y)dy.$

Задача 2.

Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^3 dx \int_{2^x}^{\frac{7}{3}x+1} f(x,y)dy.$$

Указание

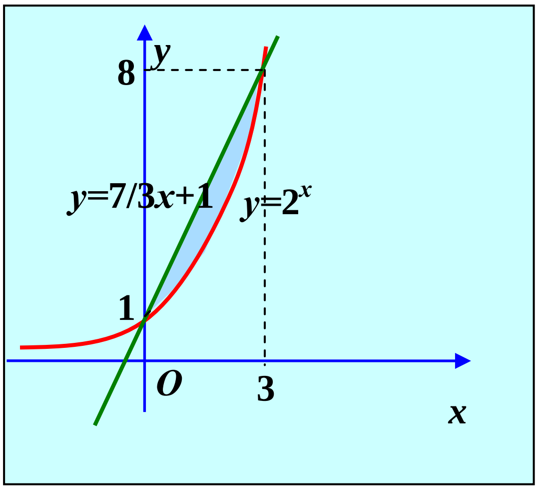
Изобразите область интегрирования на чертеже, затем найдите наибольшее и наименьшее значение y для точек, принадлежащих области, и определите уравнения ее левой и правой границы в виде $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$.

Решение

Пределы интегрирования во внешнем интеграле показывают, что область интегрирования расположена в полосе $0 \le x \le 3$. Сверху и снизу она ограничена соответственно кривыми

$$y = \frac{7}{3}x + 1 \quad и \quad y = 2^x.$$

Построим эти кривые на чертеже и найдем координаты точек их пересечения.



Из графика видно, что одна из точек пересечения границ области интегрирования имеет координаты (0,1). Вычислив значения функций

$$y = \frac{7}{3}x + 1 \quad и \quad y = 2^x$$

при $x = 3$, убеждаемся, что 3 – абсцисса второй точки пересечения, ордината которой равна 8. Следовательно, пределы по y во внешнем интеграле: 1 и 8.

Преобразуем уравнения границ области интегрирования к виду $x = x(y)$:

$$y = \frac{7}{3}x + 1 \Rightarrow x = \frac{3y-3}{7};$$

$$y = 2^x \Rightarrow x = \log_2 y.$$

При этом прямая ограничивает область интегрирования слева, то есть ее уравнение задает нижний предел по x, а логарифмическая кривая является правой границей и определяет верхний предел интегрирования. Таким образом,

$$\int_0^3 dx \int_{2^x}^{\frac{7}{3}x+1} f(x,y)dy = \int_1^8 dy \int_{\frac{3y-3}{7}}^{\log_2 y} f(x,y)dx.$$

Ответ: $\int_1^8 dy \int_{\frac{3y-3}{7}}^{\log_2 y} f(x,y)dx.$

Задача 3.
Вычислить двойной интеграл от функции

$$f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$$

по области D: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 1$.

Указание

Если выбрать в качестве внешней переменной x, а из внутреннего интеграла вынести во внешний интеграл множитель x^2, не зависящий от y, то внутренний интеграл не будет содержать x ни в подынтегральной функции, ни в пределах интегрирования. Поэтому двойной интеграл представляет собой произведение двух определенных интегралов.

Решение

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \int_0^3 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy = \int_0^3 x^2 dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy =$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 \cdot arctg\, y\bigg|_0^1 = 9 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{4}$.

Задача 4.
Вычислить двойной интеграл от функции

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

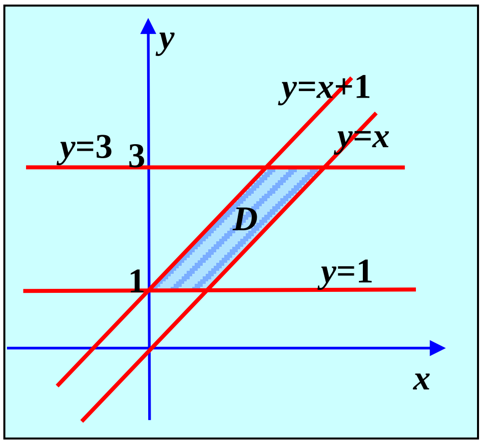
по области, ограниченной линиями $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$ и $y = 3$.

Указание

Перейдите к повторному интегралу, принимая в качестве внешней переменной y.

Решение

Область интегрирования имеет вид:



Для вычисления двойного интеграла по этой области удобно принять в качестве внешней переменной y. Тогда при переходе к повторному интегралу получим:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_{y-1}^{y} (x^2+y^2)dx = \int\limits_1^3 dy \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \Bigg|_{x=y-1}^{x=y} \right) =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(\frac{y^3}{3} + y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} - y^2(y-1) \right) dy =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(2y^2 - y + \frac{1}{3} \right) dy = \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y \right) \Bigg|_1^3 = 14.$$

Ответ: 14.

Задача 5.

Вычислить двойной интеграл от функции

$$f(x,y) = xy^2$$

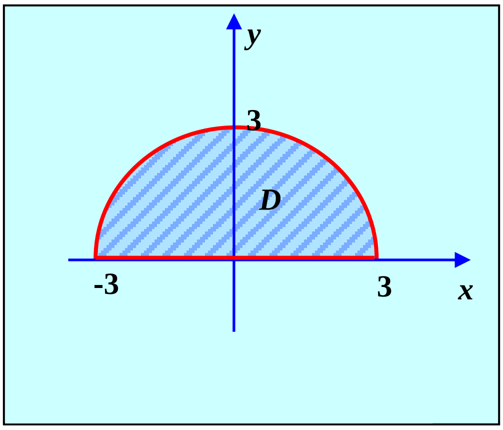
по области, заданной неравенствами $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$.

Указание

Перейдите к полярным координатам.

Решение

Область интегрирования имеет вид:



Перейдем к полярным координатам. Тогда уравнение окружности запишется так:

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho=3.$$

Полярный угол φ изменяется внутри области интегрирования в пределах от 0 до π. Запишем повторный интеграл в полярных координатах, сделав замену

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi$$

и учитывая, что якобиан перехода от декартовых координат к полярным равен ρ:

$$\iint\limits_D xy^2dxdy=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^3\rho^4d\rho=\left.\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_0^{\pi}\cdot\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^3=0\cdot\frac{243}{5}=0.$$

Ответ: 0.

Задача 6.
Вычислить двойной интеграл от функции

$$f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

по области, ограниченной линией $x^2+y^2=3x$.

Указание

Перейдите к полярным координатам.

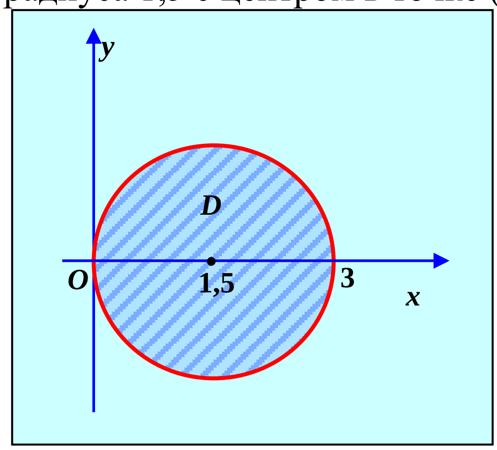
Решение

Преобразуем уравнение границы области интегрирования:

$$x^2+y^2=3x \Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}+y^2=\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4} \quad -$$

уравнение окружности радиуса 1,5 с центром в точке (1,5; 0).



Запишем уравнение этой окружности в полярных координатах:

$$x^2+y^2=3x\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=3\rho\cos\varphi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^2=3\rho\cos\varphi\Rightarrow\rho=3\cos\varphi.$$

Поскольку полюс (то есть начало координат) принадлежит области интегрирования, нижний предел в интеграле по ρ равен нулю. Из чертежа видно, что угол φ изменяется в области интегрирования с пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Вычислим двойной интеграл в полярных координатах:

$$\iint\limits_D\frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{3\cos\varphi}\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2}\rho d\rho=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\cdot\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{3\cos\varphi}=$$

$$=\frac{9}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{9}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{9}{16}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=\frac{9}{16}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{16}.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{16}$.

2.1.3. *Вычисление тройного интеграла. Криволинейные координаты в пространстве. Якобиан и его геометрический смысл. Замена переменных в кратных интегралах. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле*

Процедура вычисления тройного интеграла аналогична соответствующей операции для двойного интеграла. Для ее описания введем понятие правильной трехмерной области:

Трехмерная область V, ограниченная замкнутой поверхностью S, называется **правильной**, если:

1) любая прямая, параллельная оси Oz и проведенная через внутреннюю точку области, пересекает S в двух точках;
2) вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную двумерную область D;

3) любая часть области V, отсеченная от нее плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, обладает свойствами 1) и 2).

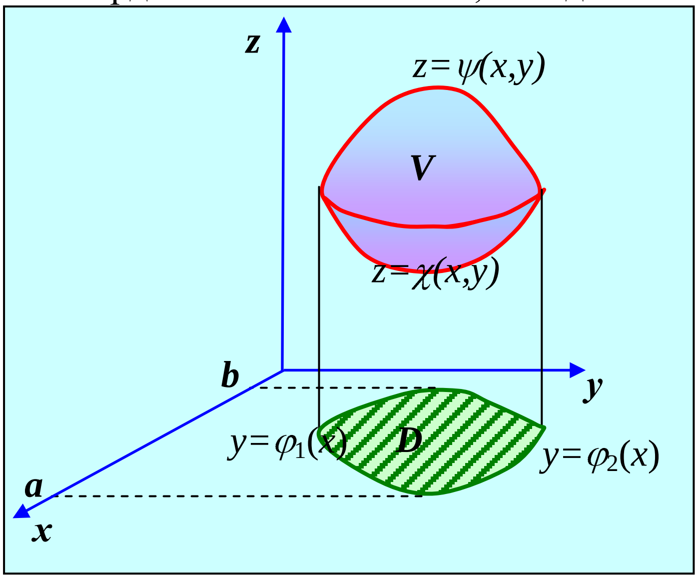


Рис. 1

Рассмотрим правильную область V, ограниченную снизу и сверху поверхностями $z=\chi(x,y)$ и $z=\psi(x,y)$ и проектирующуюся на плоскость Oxy в правильную область D, внутри которой x изменяется в пределах от a до b, ограниченную кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ (рис.1). Зададим в области V непрерывную функцию $f(x, y, z)$.

Назовем **трехкратным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *V*** выражение вида:

$$I_V=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx. \qquad (1)$$

Трехкратный интеграл обладает теми же свойствами, что и двукратный. Перечислим их без доказательства, так как они доказываются аналогично случаю двукратного интеграла.

1. Если область V разбить на две области V_1 и V_2 плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, то трехкратный интеграл по области V равен сумме трехкратных интегралов по областям V_1 и V_2.

2. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области V, то верно неравенство

$$mV\le I_V\le MV,$$

где V – объем данной области, а I_V – трехкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V.

3. Трехкратный интеграл I_V от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по области V равен произведению его объема V на значение функции в некоторой точке P области V:

$$I_V=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx=f(P)V. \qquad (2)$$

Вычисление тройного интеграла

Теорема 1. Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по правильной области V равен трехкратному интегралу по той же области:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \qquad (3)$$

Доказательство.

Разобьем область V плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на n правильных областей $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n.$. Тогда из свойства 1 следует, что

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + ... + I_{\Delta v_n},$$

где $I_{\Delta v_i}$ – трехкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области Δv_i.

Используя формулу (2), предыдущее равенство можно переписать в виде:

$$I_V = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + ... + f(P_n)\Delta v_n.$$

Из условия непрерывности функции *f(x,y,z)* следует, что предел интегральной суммы, стоящей в правой части этого равенства, существует и равен тройному интегралу $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv.$ Тогда, переходя к пределу при $\rho \to 0$, получим:

$$I_V = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv,$$

что и требовалось доказать.

Замечание.

Аналогично случаю двойного интеграла можно доказать, что изменение порядка интегрирования не меняет значения трехкратного интеграла.

Пример 1. Вычислим интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz,$ где V – треугольная пирамида с вершинами в точках (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Ее проекцией на плоскость Oxy является треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Снизу область ограничена плоскостью $z = 0$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 1$. Перейдем к трехкратному интегралу:

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz.$$

Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

$$\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 xdx \left((1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \Bigg|_0^{1-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx =$$

$$= \frac{1}{24} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{720}.$$

Криволинейные координаты в трехмерном пространстве

1. Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты точки *P(ρ,φ,z)* – это полярные координаты *ρ, φ* проекции этой точки на плоскость O*xy* и аппликата данной точки *z* (рис.2). Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (4)$$

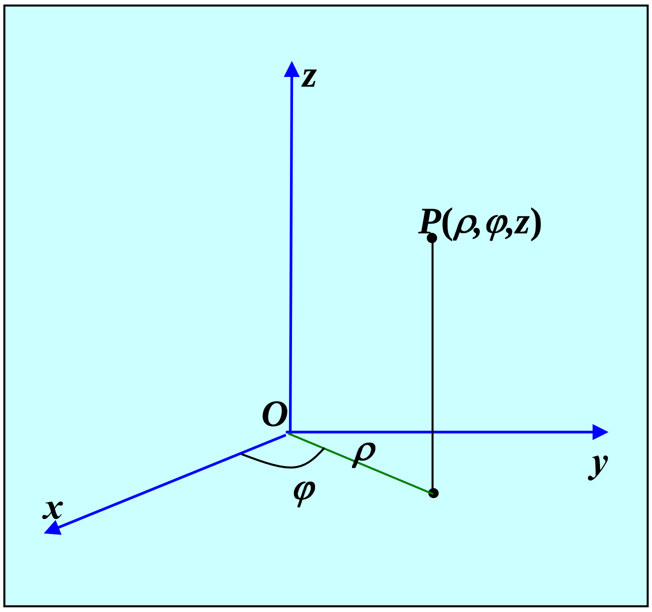


Рис. 2

2. Сферические координаты

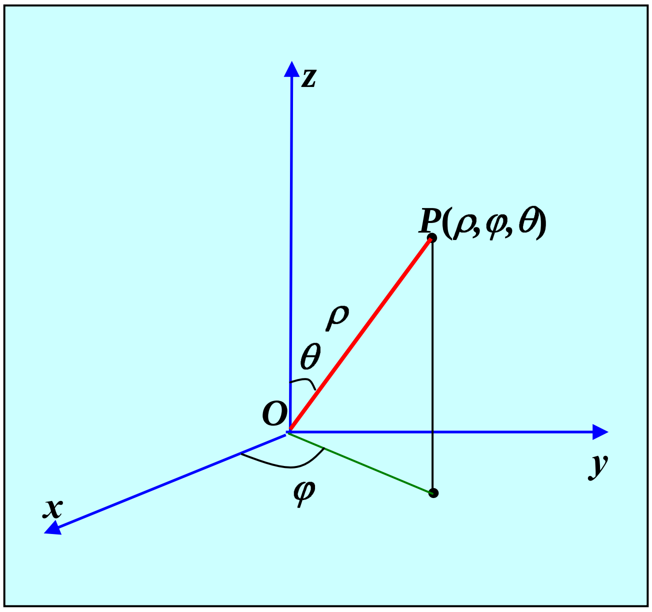


Рис. 3

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой ρ – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), φ – полярным углом между положительной полуосью *Ox* и проекцией точки на плоскость *Oxy,* и θ – углом между положительной полуосью оси *Oz* и отрезком *OP* (рис.3). При этом

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta. \quad (5)$$

Якобиан и его геометрический смысл

Рассмотрим общий случай замены переменных в двойном интеграле. Пусть в плоскости *Oxy* дана область *D*, ограниченная линией *L*. Предположим, что *x* и *y* являются однозначными и непрерывно дифференцируемыми функциями новых переменных *u* и *v*:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \qquad (6)$$

Рассмотрим прямоугольную систему координат *Ouv*, точка *P'(u, v)* которой соответствует точке *P(x, y)* из области *D*. Все такие точки образуют в плоскости *Ouv* область *D´*, ограниченную линией *L´*. Можно сказать, что формулы (6) устанавливают **взаимно однозначное соответствие** между точками областей *D* и *D´*. При этом линиям *u* = const и *v* = const в плоскости *Ouv* будут соответствовать некоторые линии в плоскости *Oxy*.

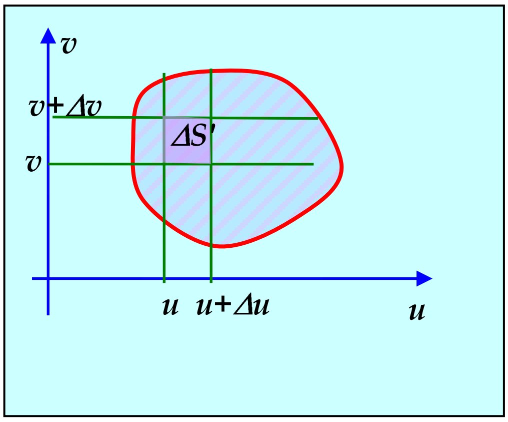


Рис. 4

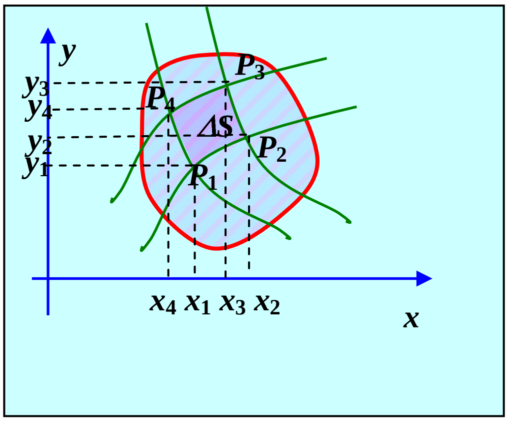


Рис. 5

Рассмотрим в плоскости Ouv прямоугольную площадку $\Delta S'$, ограниченную прямыми u = const, $u+\Delta u$ = const, v = const и $v+\Delta v$ = const. Ей будет соответствовать криволинейная площадка ΔS в плоскости Oxy (рис.5). Площади рассматриваемых площадок тоже будем обозначать $\Delta S'$ и ΔS. При этом $\Delta S' = \Delta u \Delta v$. Найдем площадь ΔS. Обозначим вершины этого криволинейного четырехугольника P_1, P_2, P_3, P_4, где

$$P_1(x_1,y_1),\quad x_1=\varphi(u,v),\quad y_1=\psi(u,v);$$
$$P_2(x_2,y_2),\quad x_2=\varphi(u+\Delta u,v),\quad y_2=\psi(u+\Delta u,v);$$
$$P_3(x_3,y_3),\quad x_3=\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),\quad y_3=\psi(u+\Delta u,v+\Delta v);$$
$$P_4(x_4,y_4),\quad x_4=\varphi(u,v+\Delta v),\quad y_4=\psi(u,v+\Delta v).$$

Заменим малые приращения Δu и Δv соответствующими дифференциалами. Тогда

$$x_1=\varphi(u,v),\quad y_1=\psi(u,v),$$
$$x_2=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\quad y_2=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,$$
$$x_3=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\quad y_3=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,$$
$$x_4=\varphi(u,v)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\quad y_4=\psi(u,v)+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.$$

При этом четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ можно считать параллелограммом и определить его площадь по формуле из аналитической геометрии:

$$\Delta S \approx \left|(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)\right| =$$
$$=\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| = \quad (7)$$
$$=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v=|I|\,\Delta S'.$$

Определитель

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}$$

называется **функциональным определителем** или **якобианом** функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Переходя к пределу при $\max\Delta S'\to 0$ в равенстве (7), получим геометрический смысл якобиана:

$$|I|=\lim_{\Delta S'\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta S'}, \qquad (8)$$

то есть модуль якобиана есть предел отношения площадей бесконечно малых площадок ΔS и $\Delta S'$.

Замечание.

Аналогичным образом можно определить понятие якобиана и его геометрический смысл для n-мерного пространства: если $x_1 = \varphi_1(u_1, u_2,\dots,u_n)$, $x_2 = \varphi_2(u_1, u_2,\dots,u_n),\dots, x_n = \varphi_n(u_1, u_2,\dots, u_n)$, то

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n}\end{vmatrix}.$$

При этом модуль якобиана дает предел отношения «объемов» малых областей пространств $x_1, x_2,\dots, x_n$ и $u_1, u_2,\dots, u_n$.

Замена переменных в кратных интегралах

Исследуем общий случай замены переменных на примере двойного интеграла.

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x,y)$, каждому значению которой соответствует то же самое значение функции $z = F(u, v)$ в области D', где

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum f(x,y)\Delta S=\sum F(u,v)\Delta S\approx\sum F(u,v)|I|\Delta S',$$

где интегральная сумма справа берется по области D'. Переходя к пределу при $\max \Delta S' \to 0$, получим **формулу преобразования координат в двойном интеграле**:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} F(u,v)|I|dudv.$$

Аналогичным образом можно вывести подобную формулу для тройного интеграла:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|I|dudvdw,$$

где $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

а область V пространства $Oxyz$ отображается в область V' пространства $Ouvw$.

Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле

Найдем, используя формулы (4), (5) и (9), якобианы перехода от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим:

1) для цилиндрических координат

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

2) для сферических координат

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F_1(\rho,\varphi,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} F_2(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 d\rho,$$

где смысл обозначений понятен из предыдущего текста.

Пример 2.

Вычислим интеграл от функции $u = z\sqrt{x^2+y^2}$ по области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 1$.

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cdot\rho d\rho \int\limits_0^1 zdz =$$

$$\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}.$$

Пример 3.

Пусть подынтегральная функция $u = 1$, а область интегрирования – шар радиуса R с центром в начале координат. Тогда

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho =$$

$$= \left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R\right) = 2\cdot 2\pi\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле от функции $u = f(x,y,z)$ по области V, ограниченной поверхностями

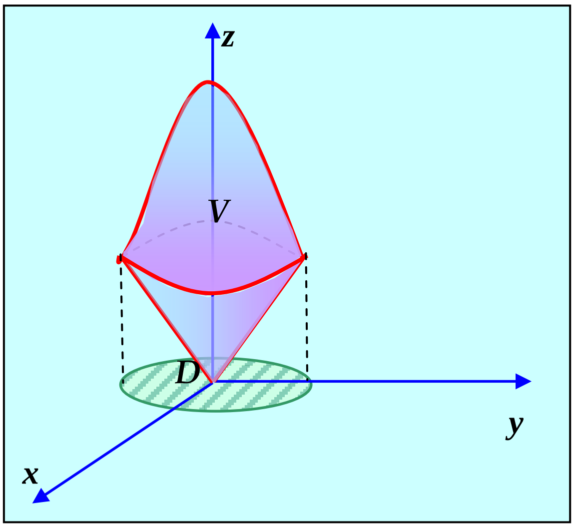
$$z = \sqrt{x^2+y^2} \quad и \quad z = 20 - x^2 - y^2.$$

Указание

Найдите проекцию области интегрирования на координатную плоскость Oxy и расставьте по этой области пределы в интегралах по x и y.

Решение

Область интегрирования снизу ограничена конусом, а сверху – параболоидом вращения.



Найдем уравнение линии пересечения этих поверхностей:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=20-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow z^2+z-20=0, \quad z=4,$$

$$z^2=16, \quad x^2+y^2=16 \quad -$$

окружность радиуса 4 с центром в точке (0,0,4). Следовательно, проекцией области интегрирования на плоскость Oxy является круг радиуса 4 с центром в начале координат. Перейдем от тройного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{20-x^2-y^2} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{20-x^2-y^2} f(x,y,z)dz.$$

Ответ: $\int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{20-x^2-y^2} f(x,y,z)dz.$

Задача 2.

Вычислить тройной интеграл от функции

$$z=xy$$

по области, ограниченной поверхностями

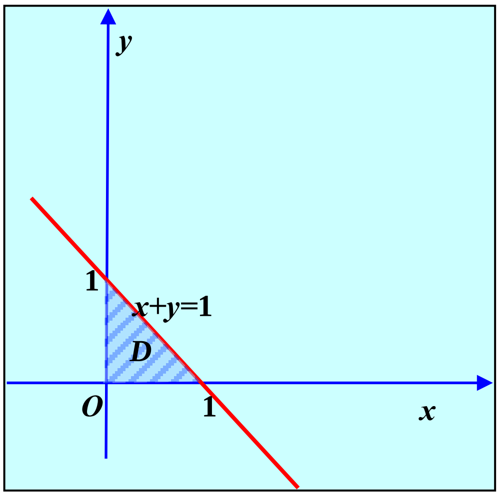
$$z=xy, \quad x+y=1 \quad и \quad z=0\,(z\geq 0).$$

Указание

Поверхность $z = xy$ пересекает координатную плоскость Oxy по прямым $x = 0$ и $y = 0$, поэтому проекцией области интегрирования на плоскость Oxy является треугольник, ограниченный отрезками прямых x=0, y=0 и $x + y = 1$.

Решение

Поверхность $z = xy$ пересекает координатную плоскость Oxy по прямым $x = 0$ и $y = 0$, поэтому проекцией области интегрирования D на плоскость Oxy является треугольник, ограниченный отрезками прямых $x = 0$, $y = 0$ и $x + y=1$.



Переходя к повторному интегралу, пределы по x и y расставим для области D, а пределами по z являются функции, задающие границы области интегрирования:

$$\iiint\limits_V xydv = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{xy} dz = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \cdot xy =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y^2 dy = \int_0^1 x^2 dx \left(\frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{1-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5 \ dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{180}.$$

Ответ: $\frac{1}{180}$.

Задача 3.

Вычислить тройной интеграл от функции

$$f(x, y, z) = z - x + y$$

по области, ограниченной поверхностями

$$2y = z^2 + x^2 \quad и \quad y^2 = z^2 + x^2.$$

Указание

Выберите в качестве внешних переменных x и z и перейдите к цилиндрическим координатам.

Решение

Выберем в качестве внешних переменных x и z. Тогда поверхности

$$2y = z^2 + x^2 \quad и \quad y^2 = z^2 + x^2$$

являются границами области интегрирования, а проекция этой области на плоскость Oxz ограничена проекцией на эту плоскость линии пересечения данных поверхностей.

$$\begin{cases} 2y = z^2 + x^2 \\ y^2 = z^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow 2y = y^2 \Rightarrow y(y-2) = 0, \quad y = 2,$$

$$z^2 + x^2 = 4 \quad -$$

окружность радиуса 2 в плоскости $y = 2$. Следовательно, проекция области интегрирования на плоскость Oxz – круг радиуса 2 с центром в начале координат. Вычислим интеграл в цилиндрических координатах, заданных следующим образом:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi\,, \quad x^2 + z^2 = \rho^2, \quad I = \rho. \\ \quad y = y \end{cases}$$

Получим:

$$\iiint\limits_V \; z - x + y \;\; dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{\rho} \; \rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi + y \;\; dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \left(\;\; \rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi \;\; y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{\frac{\rho^2}{2}}^{\rho} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \left(\rho^2 \left(\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho^3}{2} \;\; \sin\varphi - \cos\varphi \;\; - \frac{\rho^4}{8} \right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} \left(\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho^5}{10} \;\; \sin\varphi - \cos\varphi \;\; - \frac{\rho^6}{48} \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4 \left(\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{2} \right) - \frac{16}{5} (\sin\varphi - \cos\varphi) \frac{4}{3} \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{5}\sin\varphi - \frac{4}{5}\cos\varphi + \frac{2}{3} \right) d\varphi = -\frac{4}{5}\cos\varphi - \frac{4}{5}\sin\varphi + \frac{2}{3}\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi}{3}$.

Задача 4.

Вычислите интеграл

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

с помощью перехода к цилиндрическим координатам.

Указание

Определите вид проекции области интегрирования на плоскость Oxy как области, ограниченной линиями

$$x=0,\quad x=2,\quad y=0 \quad \text{и} \quad y=\sqrt{2x-x^2}.$$

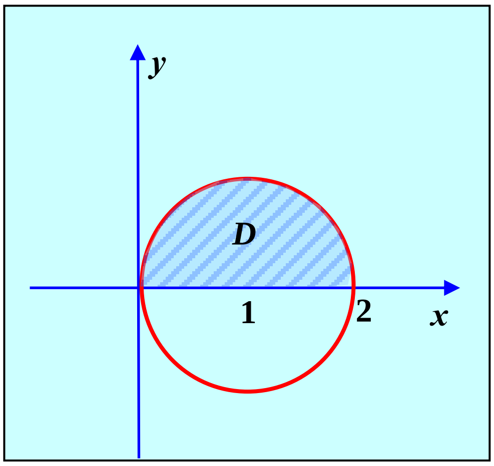
Решение

Определим вид проекции области интегрирования на плоскость Oxy как области, ограниченной линиями

$$x=0,\quad x=2,\quad y=0 \quad \text{и} \quad y=\sqrt{2x-x^2}.$$

$$y^2=2x-x^2,\quad x^2-2x+1+y^2=1,\quad (x-1)^2+y^2=1 \quad -$$

окружность радиуса 1 с центром в точке (1;0). С учетом того, что $y\geq 0$, проекцией области интегрирования является полукруг, лежащий выше оси Ox.



Найдем уравнение окружности в полярных координатах:

$$x^2+y^2=2x,\quad \rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2\rho\cos\varphi,$$

$$\rho=2\cos\varphi.$$

Перейдем в заданном интеграле к цилиндрическим координатам:

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho \int_0^3 z\rho\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int_0^3 z\,dz=$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)=$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=$$

$$=12\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=12\cdot\frac{2}{3}=8.$$

Ответ: 8.

Задача 5.
Вычислить интеграл

$$\iiint_V x^2+y^2\ dxdydz$$

по области, заданной неравенствами

$$z\geq 0,\quad 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4.$$

Указание

Область интегрирования ограничена концентрическими сферами, поэтому удобно перейти к сферическим координатам.

Решение

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta \end{cases}\quad x^2+y^2+z^2=r^2,\quad I=r^2\sin\theta.$$

При этом область интегрирования определяется условиями:

$$1\leq r\leq 2,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi,\quad 0\leq\theta\leq\pi.$$

Тогда

$$\iiint_V x^2+y^2\ dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_1^2 r^2\cos^2\theta\cdot r^2 dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\cdot\int_1^2 r^4 dr=2\pi\cdot\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi}\right)\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_1^2=$$

$$=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{31}{5}=\frac{124}{15}\pi.$$

Ответ: $\frac{124}{15}\pi$.