

**Министерство образования и науки
Российской Федерации**

**«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского**

Кафедра высшей математики

О. Ю. Агарева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Москва 2012

УДК 510.6
ББК

Агарева О. Ю.

Дискретная математика

Учебное пособие. МАТИ.: Кафедра «Высшей математики», 2012. – 58с.

Учебное пособие посвящено изучению важных разделов дискретной математики: элементов теории множеств, бинарных отношений, элементов комбинаторики, теории булевых функций, графов.

Его основу составляют конспекты лекций, которые читались студентам МАТИ» – Российский государственного технологический университет им. К.Э. Циолковского.

Пособие содержит большое количество примеров, иллюстрирующих основные понятия теории множеств, теории бинарных отношений, элементов комбинаторики, теории булевых функций, графов.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Информатика и вычислительная техника» и «Системы автоматизированного проектирования».

Пособие также может быть полезно для студентов других специальностей и преподавателей.

Введение

Дискретная математика – одно из самых динамично развивающихся направлений современной математики. Это объясняется необходимостью дальнейшей разработки математических основ компьютерных технологий и автоматизированных систем управления.

Учебное пособие посвящено изучению важных разделов дискретной математики: элементов теории множеств, бинарных отношений, элементов комбинаторики, теории булевых функций, графов.

Его основу составляют конспекты лекций, которые читались студентам МАТИ» – Российский государственного технологический университет им. К.Э. Циолковского.

Пособие содержит большое количество примеров, иллюстрирующих основные понятия теории множеств, теории бинарных отношений, элементов комбинаторики, теории булевых функций, графов.

Для студентов, обучающихся по специальностям «Информатика и вычислительная техника» и «Системы автоматизированного проектирования».

Пособие также может быть полезно для студентов других специальностей и преподавателей.

1. МНОЖЕСТВА

1.1. Основные понятия теории множеств. Диаграмма Эйлера-Венна

Под **множеством А** будем понимать совокупность каких-либо объектов произвольной природы, обладающих некоторым общим признаком.

Множества А и В равны ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

$A=\{x \mid P(x)\}$ – множество А состоит из элементов x , удовлетворяющих условию $P(x)$.

$\emptyset$ –множество, не содержащее элементов, пустое.

$\subseteq$ –отношение включения.

$A \subseteq B$ –каждый элемент множества А является элементом множества В, А-**подмножество** В.

$|A|$ – **мощность А** – число элементов в конечном множестве А.

Множество всех подмножеств множества А называется **множеством-степенью** и обозначается $P(A)$.

Если $|A|=n$, то $|P(A)|=2^n$.

Пример

Для множества А записать множество – степень $P(A)$.

$$A\{1,2,3\}; \quad P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}.$$

Геометрическое изображение множеств – **диаграмма Эйлера-Венна**.

Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего **универсальное множество U** (все рассматриваемые множества являются его подмножествами), а внутри него кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы, соответствующих множеств.

1.2. Операции над множествами

U- универсальное множество, А, В – подмножества U.

На рисунках представлены диаграммы Эйлера-Венна для соответствующих операций.

1. Объединение (рис. 1.1):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

2. Пересечение (рис. 1.2):

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \& x \in B\}.$$

3. Дополнение до U (рис. 1.3):

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \& x \notin A\}.$$

4. Разность A и B (рис. 1.4):

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \& x \notin B\}.$$

5. Симметрическая разность A и B (рис. 1.5):

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \mid x \in A \& x \in B \& x \notin A \cap B\}.$$

6. Стрелка Пирса A и B (рис. 1.6):

$$A \downarrow B = \overline{A \cap B} = \{x \mid x \in U \& x \notin A \& x \notin B\}.$$

7. Штрих Шеффера A и B (рис. 1.7):

$$A \mid B = \overline{A \cap B} = \{x \mid x \in U \& x \notin A \cap B\}.$$

Операции объединения, пересечения и дополнения называют **булевыми операциями над множествами**.

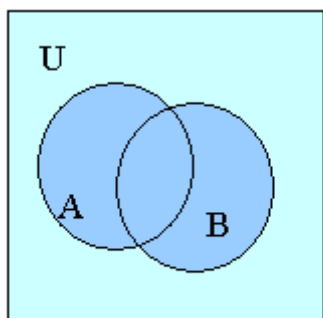


Рис. 1.1

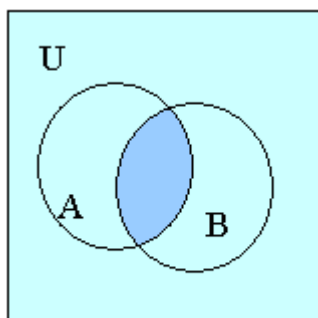


Рис. 1.2

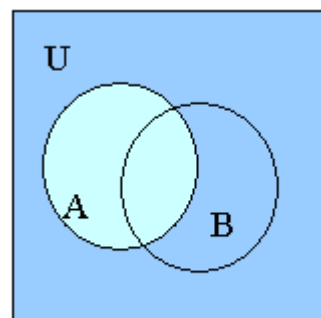


Рис. 1.3

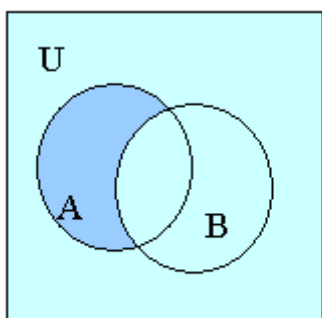


Рис. 1.4

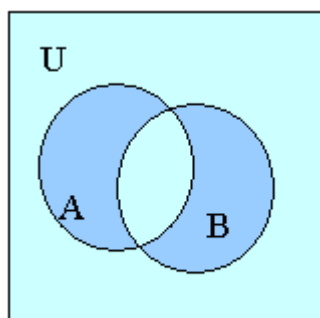


Рис. 1.5

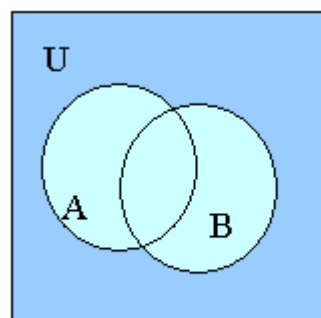


Рис. 1.6

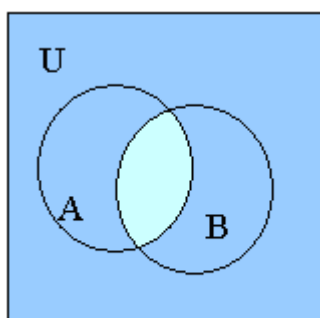


Рис. 1.7

Пример

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7\} \quad B = \{3, 4, 7, 9\} \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Выполнить все операции над A, B.

Решение

Объединение содержит все элементы, которые присутствуют хотя бы в одном из множеств A или B:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\};$$

пересечение – все элементы, которые присутствуют и в A и в B:

$$A \cap B = \{4, 7\};$$

отрицание A содержит все элементы, которые присутствуют в U и не присутствуют в A:

$$\bar{A} = \{3, 6, 8, 9\};$$

отрицание B содержит все элементы, которые присутствуют в U и не присутствуют в B:

$$\bar{B} = \{1, 2, 5, 6, 8\};$$

A без B содержит те элементы A, которые отсутствуют в B:

$$A \setminus B = \{1, 2, 5\};$$

В без А содержит те элементы В, которые отсутствуют в А:

$$B \setminus A = \{3, 9\};$$

симметрическая разность А и В содержит только те элементы, которые содержатся в А, но не содержатся в В и, которые содержатся в В, но не содержатся в А:

$$A \oplus B = \{1, 2, 3, 5, 9\};$$

стрелка Пирса А и В содержит те элементы U, которые не входят ни в А, ни в В:

$$A \downarrow B = \{6, 8\};$$

штрих Шеффера А и В содержит те элементы U, которые не входят одновременно и в А, и в В:

$$A | B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}.$$

1.3. Основные тождества алгебры множеств

А, В, С – подмножества U.

Для объединения

1. Коммутативность:

$$A \cup B = B \cup A.$$

2. Ассоциативность:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4.

$$A \cup \emptyset = A.$$

5.

$$A \cup \bar{A} = U.$$

6.

$$A \cup A = A.$$

7.

$$A \cup U = U.$$

8. Закон де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

9. Закон поглощения:

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Доказательства 3 тождества

Первый способ

Покажем, что:

$$\begin{aligned} & A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C). \\ x \in A \cup (B \cap C) & \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \in B \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Покажем, что:

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) & \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow \end{array} \right] \\ & \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

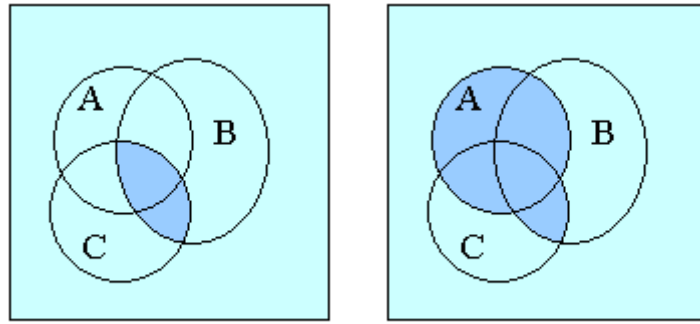
$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \end{cases} \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Второй способ

Используем диаграммы Эйлера-Венна. Рисуем диаграммы последовательно для каждой операции.

1 Левая часть:

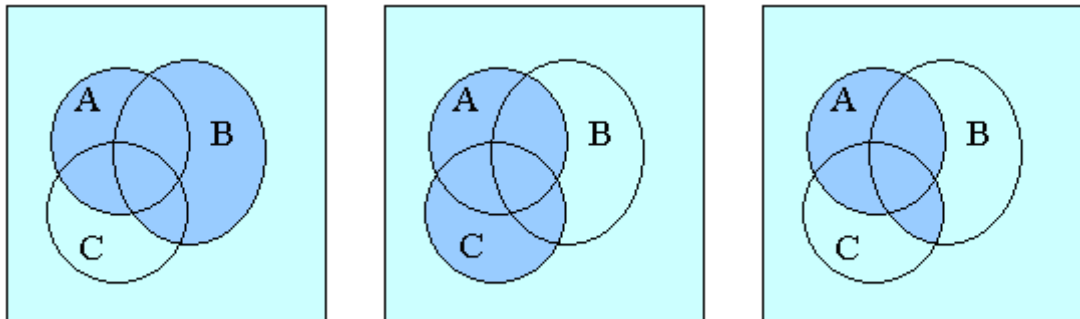
$$A \cup (B \cap C)$$



$$(B \cap C) \rightarrow A \cup (B \cap C)$$

2. Правая часть:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$



$$(A \cup B) \rightarrow (A \cup C) \rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Для пересечения

1. Коммутативность:

$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4.

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

5.

$$A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

6.

$$A \cap A = A.$$

7.

$$A \cap U = A.$$

8. Закон де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

9. Закон поглощения:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

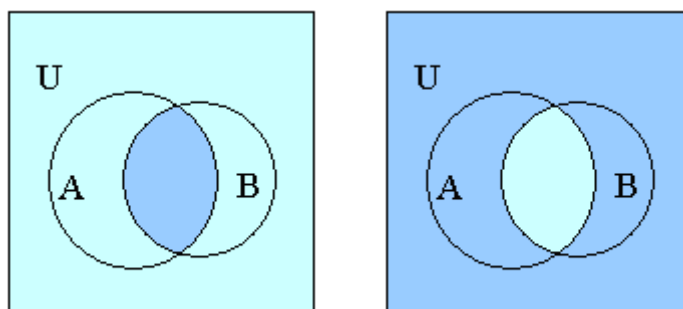
Доказательства 8, 9 тождеств

Используем диаграммы Эйлера-Венна. Рисуем диаграммы последовательно для каждой операции:

Докажем 8 тождество:

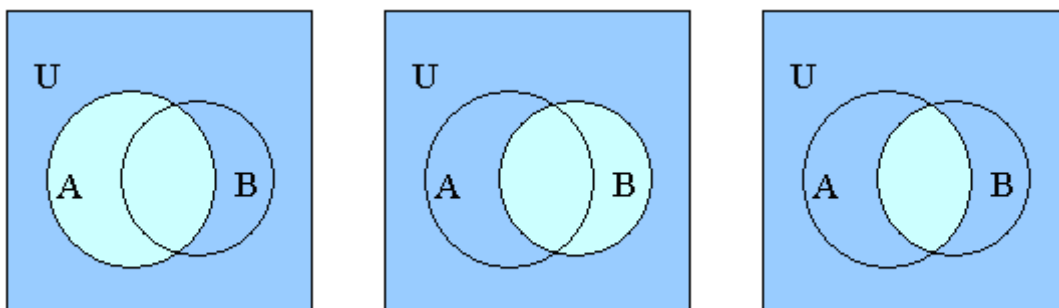
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Левая часть:
 $\overline{A \cap B}$



$$A \cap B \rightarrow \overline{A \cap B}$$

Правая часть:
 $\bar{A} \cup \bar{B}$

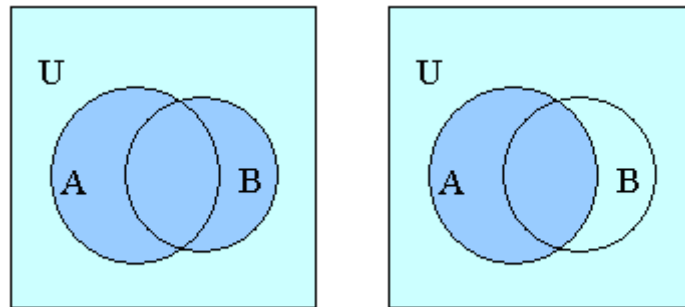


$$\bar{A} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$$

Докажем 9 тождество:

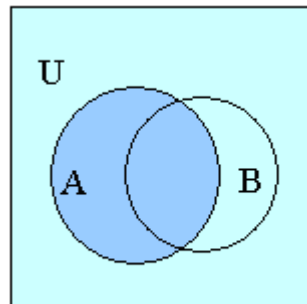
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Левая часть: $A \cap (A \cup B)$



$$(A \cup B) \rightarrow A \cap (A \cup B)$$

Правая часть: A



Утверждение

Выражения 1,2,3 попарно эквивалентны.

1. $A \subseteq B$.
2. $A \cap B = A$.
3. $A \cup B = B$.

Доказательство

1. Докажем, что из первого предложения следует второе. Действительно, так как

$$A \cap B \subseteq A,$$

то достаточно показать, что в этом случае

$$A \subseteq A \cap B.$$

Но, если $x \in A$, то $x \in B$, так как $A \subseteq B$, и, следовательно, $x \in A \cap B$.

2. Докажем, что из второго предложения следует третье. Так как

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = (A \cap B) \cup B.$$

По закону поглощения для объединения

$$B \cup (A \cap B) = B.$$

Отсюда, используя закон коммутативности, получаем

$$A \cup B = B.$$

3. Докажем, что из третьего предложения следует первое. Так как

$$A \subseteq A \cup B,$$

а по условию третьего предположения

$$A \cup B = B, \text{ то } A \subseteq B.$$

1.4. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Основная формула комбинаторики

Пусть имеется k групп элементов, причем i -я группа состоит из n_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением

$$N = n_1 n_2 n_3 \dots n_k$$

Примеры

1. Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n_1 элементов, а вторая – из n_2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы? Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n_2 . Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n_2 . Так как в первой группе всего n_1 элемент, всего возможных вариантов будет $n_1 n_2$.

2. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Решение:

$n_1=6$ (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_2=7$ (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_3=4$ (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6).

Итак, $N=n_1n_2n_3=168$.

Рассмотрим множество, состоящие из n элементов. Это множество будем называть **генеральной совокупностью**.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример

Различными размещениями из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2). Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком.

Число размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример

Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение:

т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{3!} = 20.$$

Сочетанием из n элементов по m называется любой **неупорядоченный набор** из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример

Для множества $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями являются $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение:

Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \times 6}{2!} = 15.$$

Перестановкой из n элементов называется любой **упорядоченный набор** этих элементов.

Пример

Всевозможными перестановками множества, состоящего из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ являются: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Пример

Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

Решение:

Эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется $P_7 = 7! = 5040$ способов осуществить расстановку книг.

Важно знать, является ли существенным порядок элементов в наборе. Поясним последний фактор на следующем примере.

Пример

На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?

Решение:

В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числа **сочетаний** из 20 элементов по 5.

Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно $5!$ вариантов **перестановок**, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом **размещений** из 20 элементов по 5.

2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

2.1. Основные определения

Прямым произведением множеств $A \times B$ называется множество M всех пар (a, b) , таких, что a принадлежит A , а b принадлежит B :

$$M = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Пример

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{8, 9\}$$

$$A \times B = \{(1, 8), (1, 9), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)\}$$

$$B \times A = \{(8, 1), (8, 2), (8, 3), (9, 1), (9, 2), (9, 3)\}.$$

Бинарным (двуместным) отношением между элементами a, b множеств A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$.

Если $A=B$, то отношение называется **бинарным отношением на A** .

Вместо (a, b) часто записывают aRb .

Областью определения бинарного отношения R называется множество

$$D_R = \{a \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}.$$

Областью значений бинарного отношения R называется множество:

$$Q_R = \{b \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}.$$

2.2. Способы задания бинарных отношений

1. перечислением пар, для которых это отношение выполняется;
2. матрицей C ;

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R; \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

Пример

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; a, b \in A.$$

R - «быть строго меньше»,

aRb – «а строго меньше b ».

Задать это отношение разными способами:

1. перечисление пар, для которых это отношение выполняется:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

2. матрица C :

R	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

2.3. Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R на множестве A называется **рефлексивным**, если

$$(a, a) \in R \quad \forall a \in A;$$

антирефлексивным, если

$$(a, a) \notin R \quad \forall a \in A;$$

Бинарное отношение R на множестве A называется **симметричным**, если из

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \forall a, b \in A;$$

антисимметричным, если из

$$(a, b) \in R \& (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

Бинарное отношение R на множестве A называется **транзитивным**, если из

$$(a, b) \in R \& (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение R называется **отношением эквивалентности**.

Примеры

1. Рассмотрим бинарное отношение R – «быть строго меньше», aRb – « a строго меньше b » на множестве натуральных чисел.

$$R = \{(a, b) | a < b\}.$$

Это отношение антирефлексивно ($a < a$ не выполняется для всех a принадлежащих N) и транзитивно (из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$).

2. Рассмотрим бинарное отношение R – «жить в одном городе», aRb – « a живет в одном городе с b » на множестве всех людей.

Это отношение рефлексивно (« a живет в одном городе с a »), симметрично (из « a живет в одном городе с b » следует, что « b живет в одном городе с a »), транзитивно (из « a живет в одном городе с b » и « b живет в одном городе с c » следует, что « a живет в одном городе с c »), следовательно это отношение эквивалентности.

2.4. Эквивалентность и порядок

Пусть R – отношение эквивалентности на $A \times A$, т.е. R – рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Классом эквивалентности, порожденным элементом a , называется подмножество A , состоящее из b принадлежащих A , т.ч., выполняется aRb .

Класс эквивалентности, порожденный элементом a , обозначается:

$$[a] = \{b \mid b \in A \& aRb\}.$$

Примеры

1. R – отношение равенства на множестве целых чисел Z .

$$[a] = \{a \mid a \in Z \& aRa (a = a)\}.$$

2. R – отношение принадлежности к одной группе на множестве студентов факультета.

Класс эквивалентности – множество студентов одной группы.

Утверждение 1

Пусть R – отношение эквивалентности на X .

Тогда, если:

- 1) $x \in X \Rightarrow x \in [x]$,
- 2) $x, y \in X \& xRy \Rightarrow [x] = [y]$,

класс эквивалентности порождается любым своим элементом.

Доказательство

1) R – отношение эквивалентности, следовательно, оно рефлексивно, т.е. xRx , следовательно, $x \in [x]$.

2) Пусть $z \in [y]$, следовательно, yRz , xRy .

Из этого, в силу транзитивности, следует, xRz , т.е. $z \in [x]$.

Отсюда $[y] \subseteq [x]$.

Аналогично в силу симметричности R можно показать, что $[x] \subseteq [y]$, а значит, $[x] = [y]$.

Разбиением множества X называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств множества X таких, что каждый элемент множества X принадлежит одному и только одному из этих подмножеств

Пример

Привести примеры разбиения множества

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- 1) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}\};$
- 2) $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\};$
- 3) $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$

и т.п.

Утверждение 2

Всякое разбиение множества X определяет на X отношение эквивалентности R : xRy тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения.

Доказательство

Рефлексивность и симметричность R очевидны. Пусть теперь xRy и yRz . Тогда $x, y \in X_1$, $y, z \in X_2$, где X_1, X_2 - подмножества из разбиения X .

Поскольку $y \in X_1 \& y \in X_2 \Rightarrow X_1 = X_2$.

Следовательно, $x, z \in X_1 \Rightarrow xRz$.

Утверждение 3

Всякое отношение эквивалентности R определяет разбиение множества X на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Доказательство

Докажем, что совокупность классов эквивалентности определяет разбиение множества X .

В силу утверждения 1 $x \in [x]$, а, следовательно, каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности. Из утверждения 1 вытекает также, что два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, так как, если $z \in [x] \& z \in [y] \Rightarrow xRz$.

Откуда $[x]=[y] \& yRz$. Следовательно, $[y]=[z]$. И окончательно: $[x]=[y]$.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности R называется **фактор – множеством** множества X по отношению R и обозначается X/R .

Рассмотрим еще несколько типов специальных бинарных отношений.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется **отношением нестрогого порядка на множестве X** и обозначается символом $\preceq$.

Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется **отношением строгого порядка на множестве X** и обозначается символом $\prec$.

Оба эти отношения называются **отношениями порядка**.

Элементы x, y принадлежащие X **сравнимы по отношению порядка R на X** , если выполняется xRy или yRx .

Множество X , на котором задано отношение порядка, может быть:

1) **полностью упорядоченным множеством**, если любые два элемента из X сравнимы по отношению порядка. В таком случае говорят, что отношение R задает полный порядок на множестве X .

Например, отношение «быть не старше» задает полный порядок на множестве людей;

2) **частично упорядоченным множеством** – в противном случае. При этом говорят, что отношение R задает на множестве X частичный порядок.

Например, отношение «быть начальником» задает на множестве сотрудников организации частичный порядок, так как, например, для пары сотрудников это отношение может не выполняться: они не сравнимы по данному отношению.

Примеры

Какой порядок на множестве задают отношения:

1. «не больше», «не меньше», «больше», «меньше» на множествах натуральных N и действительных R чисел.

Отношения нестрогого порядка $\geq$ и $\leq$, а также строгого порядка $>$ и $<$ полностью упорядочивают множества N и R .

2. подчиненности на предприятии.

Отношение подчиненности на предприятии задает строгий частичный порядок. В нем несравнимыми являются, например, сотрудники разных звеньев одного уровня.

Диаграмма Хассе

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если $x < y$ и не существует такого элемента u , что $x < u < y$, то точки x и y соединяют отрезком, причем точку, соответствующую x , располагают ниже y . Такие схемы называются диаграммами Хассе.

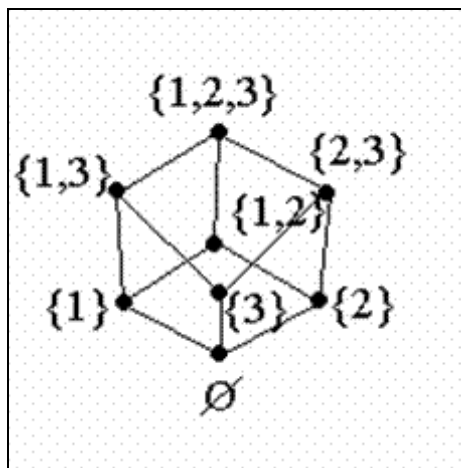
Примеры

Рассмотрим два отношения частичного порядка и построим для них диаграммы Хассе.

1. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. На множестве-степени $P(A)$ рассмотрим отношение «быть подмножеством». Множество

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Диаграмма Хассе представлена рисунком:



2. Пусть $X = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

На этом множестве рассмотрим отношение частичного порядка $\leq$.

Диаграмма Хассе представлена рисунком:



2.5. Операции над бинарными отношениями

Пусть бинарные отношения R, R_1, R_2 – подмножества $A \times B$ (может быть $A=B$).

Символы: $\&$ - «и», $\vee$ - «или», $\exists$ - «существует».

1. Объединение:

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,b) | (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2\}.$$

2. Пересечение:

$$R_1 \cap R_2 = \{(a,b) | (a,b) \in R_1 \& (a,b) \in R_2\}.$$

3. Разность:

$$R_1 \setminus R_2 = \{(a,b) | (a,b) \in R_1 \& (a,b) \notin R_2\}.$$

4. Дополнение:

$$\bar{R} = (A \times B) \setminus R.$$

5. Обратное отношение для R :

$$R^{-1} = \{(a,b) | (b,a) \in R\}.$$

6. Произведение отношений (композиция):

$$R_1 \circ R_2 = \{(a,c) | \exists b \in B : (a,b) \in R_1 \& (b,c) \in R_2\},$$
$$R_1 \subseteq A \times B \& R_2 \subseteq B \times C.$$

Свойства операций

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
3. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$
4. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$

Примеры

1. Пусть R_1, R_2 – отношения, заданные на

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

$$R_1 = \{(a,b) | b = a + 2; a, b \in A\},$$

$$R_2 = \{(a,b) | b = a^2; a, b \in A\}.$$

$$R_1 \cup R_2, \quad R_1 \cap R_2, \quad R_1 \setminus R_2, \quad R_1 \circ R_2, \quad R_2 \circ R_1, \quad \overline{R_1}, \quad R_1^{-1}.$$

Зададим отношения перечислением пар:

$$R_7 = \{(1,1), (2,4), (3,9)\},$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,3), (2,4), (3,5), (3,9), (4,6), (5,7), (6,8), (7,9)\};$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(2,4)\};$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(1,3), (3,5), (4,6), (5,7), (6,8), (7,9)\};$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid b = a + 2; b^2 = c; a, b, c \in A\} = \\ = [(a + 2)^2 = c; a, c \in A] = \{(1, 9)\};$$

$$\begin{aligned} R_2 \circ R_1 &= \{(a, c) \mid a^2 = b; c = b + 2; a, b, c \in A\} = \\ &= [a^2 = c - 2; a, c \in A] = \{(1, 3), (2, 6)\}; \end{aligned}$$

$$\overline{R}_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (2,9), \\ \\ (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7), (7,8), \\ (8,1), (8,2), (8,3), (8,4), (8,5), (8,6), (8,7), (8,8), (8,9), \\ (9,1), (9,2), (9,3), (9,4), (9,5), (9,6), (9,7), (9,8), (9,9) \end{array} \right\};$$

$$R_1^{-1} = \{(b, a) \mid b = a + 2; a, b \in A\} = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 5), (8, 6), (9, 7)\}.$$

Определить:

$$\overline{R}, \quad R^{-1}.$$

$\bar{R}$ – "не быть начальником"

 R^{-1} – "быть подчиненным".

3. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

3.1. Основные определения и свойства булевых функций

Рассмотрим множество из двух элементов $B^2 = \{0,1\}$ и определим совокупность переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что каждая переменная может принимать значения только из B^2 . Совокупность таких переменных назовем **вектором двоичных переменных** и обозначим символом X :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Любой такой набор можно рассматривать как совокупность цифр двоичного числа. Условимся называть десятичный эквивалент этого числа **номером набора** $J(\tilde{x})$. Он вычисляется следующим образом:

$$J(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n x_i 2^{n-i}$$

Например, номер набора (0, 1, 0, 1, 0, 1): $J = 2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$ ($n=6$).

Наборы из n компонентов нумеруются числами от 0 до $2^n - 1$. Следовательно, всего имеется 2^n различных двоичных наборов.

В таблице приведены различные двоичные наборы и их номера для $n=3$.

x_1	x_2	x_3	$J(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

Двоичный набор $x(J)$ полностью определяется своим номером J и числом компонентов n .

Например, для $J = 12$ и $n = 6$ имеем $x(12) = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$.

Введем функции, зависящие от вектора аргументов $\tilde{x}$, которые обозначим: $f(\tilde{x})$ или $f(x_1, \dots, x_n)$ и условимся, что такие функции могут принимать значения только из множества B^2 .

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, зависящая от переменных $x_1, \dots, x_n$, каждая из которых может быть 0 или 1 и принимающая значение 0 или 1, называется **булевой (переключательной) функцией**.

Областью определения булевой функции от n переменных является множество из 2^n двоичных наборов.

Для того чтобы задать булеву функцию, нужно указать соответствие между этими наборами и значениями функции.

3.1.1. Способы задания булевых функций

1. **С помощью таблицы**, число строк в которой определяется числом всех наборов переменных, а число столбцов на единицу больше числа переменных. Пример такой формы задания функции приведен в таблице:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Рис. 3.1.1

Таблица, задающая $f(\tilde{x})$, в которой наборы $x = (x_1 \dots x_n)$ выписываются в порядке возрастания их номеров (сверху вниз), называется **таблицей истинности функции $f(\tilde{x})$** .

2. Двумерная таблица.

Табличный способ задания булевых функций является наиболее естественным, но не самым компактным. Чтобы несколько сократить размеры таблиц, задающих функции многих переменных, часто используют двумерные таблицы, которые строят следующим образом. Вектор аргументов $x_1, \dots, x_n$

разбивают на две части $x_1, \dots, x_k$ и $x_{k+1}, \dots, x_n$. Строкам таблицы приписывают значения первой группы аргументов, а столбцам таблицы – значения второй группы аргументов. При таком расположении значений аргументов каждому значению $x_1, \dots, x_n$ соответствует одна клетка таблицы, в которую может быть записано значение функции. Пример двумерной таблицы для функции, заданной таблицей рисунка 3.1.1, приведен на рис. 3.1.2.

	$x_2 x_3$			
	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
x_1				

Рис. 3.1.2

3. Множеством номеров двоичных наборов или их десятичным эквивалентом.

С ростом числа переменных таблица, задающая булеву функцию, сильно усложняется. Чтобы избежать усложнения таблицы, в некоторых случаях функцию задают **множеством номеров двоичных наборов**, на которых она равна единице. Например, функция, приведенная в таблице 3.1.1, может быть задана в виде следующей совокупности двоичных наборов:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \{010, 011, 101, 111\}$$

или их десятичных эквивалентов:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \{2, 3, 5, 7\}.$$

4. Вектором ее значений.

При стандартном расположении наборов (в соответствии с увеличением их номера), функцию $f(x)$ можно задать **вектором ее значений** $\alpha_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$, где координата α_i равна значению $f(x)$ в i -ой строке таблицы ($i=0, 1, \dots, 2^n-1$):

$$f(x) = (00110101).$$

3.1.2. Число различных булевых функций n -го порядка

Обозначим множество булевых функций, зависящих от n аргументов: $P(n) = \{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ и найдем число элементов этого множества $|P(n)|$. В случае табличного задания столбцы значений различных функций должны иметь различие хотя бы в одной строке. Следовательно, для того чтобы найти число различных функций n переменных, нужно подсчитать какое количество различных столбцов значений может быть в таблице, имеющей 2^n строк. Если каждую позицию в столбце считать двоичной переменной, то задача сводится к определению числа наборов для 2^n переменных. Исходя из этого, получаем, что

$$|P(n)| = 2^{2^n}.$$

Зависимость числа булевых функций от числа переменных показана в таблице:

n	$ P(n) $
1	4
2	16
3	256
4	65536
5	4294967296

Из таблицы видно, что число функций быстро растет при незначительном увеличении числа переменных.

3.1.3. Несущественные переменные

Переменную x_i в функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называют **несущественной (фиктивной)**, если

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

при любых значениях остальных переменных.

Это означает, что изменение значения переменной x_i не изменяет значения функции, поэтому эту переменную можно исключить из числа аргументов и рассматривать заданную функцию, как функцию, зависящую от $n-1$ переменной. Несущественные переменные можно не только удалять, но и добавлять к аргументам функции. Следовательно, если заданы две функции $f_1(x_1, \dots, x_k)$ и $f_2(x_1, \dots, x_m)$, зависящие от разного числа переменных и $k < m$, то добавляя к функции с меньшим числом аргументов $m-k$ несущественных переменных, можно получить функции с одинаковым количеством аргументов.

Две функции $f_1(x_1, \dots, x_k)$ и $f_2(x_1, \dots, x_m)$ от разного количества переменных **равны**, если одна получается из другой путем удаления или введения несущественных переменных.

Пример

Пусть $f(x) = (00110011)$, или задана таблицей:

x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Видим, что переменная x_3 является несущественной для $f(x_1, x_2, x_3)$, т.к. $f(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2, 1)$. Удаляя ее, получим функцию $f(x_1, x_2)$:

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Переменная x_1 также является несущественной. В итоге получаем $f(x) = x_2$.

3.2. Булева алгебра

3.2.1. Функции одной переменной

В таблице 3.2.1 даны все переключательные функции одной переменной.

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Табл. 3.2.1

Функции f_0 и f_3 называются соответственно **(тождественным) нулем** и **(тождественной) единицей**.

Функция f_1 называется **тождественной функцией** и обозначается x .

Функция f_2 называется **отрицанием x** , обозначается $\bar{x}$ или $\neg x$ и читается «не x ».

3.2.2. Функции двух переменных

В таблице 3.2.2 представлены все булевы функции двух переменных.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Табл. 3.2.2

Функции f_0 называется **(тождественным) нулем**.

Функция f_1 называется **конъюнкцией x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \& x_2$ или $x_1 x_2$, или $x_1 \wedge x_2$ и читается « x_1 и x_2 ».

Функция f_3 называется **переменной x_1** и обозначается x_1 .

Функция f_5 называется **переменной x_2** и обозначается x_2 .

Функция f_6 называется **суммой по модулю 2 x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \oplus x_2$ и читается « x_1 плюс x_2 ».

Функция f_7 называется **дизъюнкцией x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \vee x_2$ и читается « x_1 или x_2 ».

Функция f_8 называется **стрелкой Пирса x_1 и x_2** , обозначается $x_1 \downarrow x_2$ и читается «ни x_1 , ни x_2 ».

Функция f_9 называется **эквиваленцией** x_1 и x_2 , обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \equiv x_2$ и читается « x_1 эквивалентно x_2 ».

Функция f_{10} называется **отрицанием** x_2 , обозначается $\bar{x}_2$ и читается «не x_2 ».

Функция f_{12} называется **отрицанием** x_1 , обозначается $\bar{x}_1$ и читается «не x_1 ».

Функция f_{13} называется **импликацией** x_1 и x_2 , обозначается $x_1 \rightarrow x_2$ или $x_1 \supset x_2$ и читается «из x_1 следует x_2 ».

Функция f_{14} называется **штрихом Шеффера** x_1 и x_2 , обозначается $x_1 | x_2$ и читается «не x_1 или не x_2 ».

Функция f_{15} называется **(тождественной) единицей**.

Остальные функции не имеют названий.

3.2.3. Реализация булевых функций формулами

Функция f называется **суперпозицией** функций $f_1, f_2, \dots, f_k$, если она получается некоторой подстановкой этих функций друг в друга. Выражение, описывающее результат этой подстановки, называется **формулой**, задающей функцию f .

Пусть $B = \{ \bar{x}, x, x \vee y, x \rightarrow y, x \sim y, x \oplus y, x \downarrow y, x | y \}$.

Формулой над B является всякое (и только такое) выражение вида:

1. переменные $x, y, \dots$ – формулы;

2. если U и V – формулы, то и

$\bar{U}, UV, U \vee V, U \rightarrow V, U \sim V, U \oplus V, U \downarrow V, U | V$ тоже формулы.

Говорят, что формула U , задающая функцию f , **реализует f** .

Две **формулы эквивалентны**, если реализуемые ими функции равны.

Для того чтобы проверить эквивалентность формул, нужно построить, соответствующие им таблицы истинности. Если таблицы одинаковы, то формулы эквивалентны.

Пример

Выяснить, эквивалентны ли формулы

$$U = x \downarrow y; \quad V = \overline{x \vee y}.$$

Строим таблицу истинности:

x	y	$U = x \downarrow y$	$x \vee y$	$V = \overline{x \vee y}$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

Видим, что столбцы, отвечающие формулам U и V , одинаковы. Следовательно, формулы эквивалентны.

3.2.4. Основные свойства элементарных функций

1. Коммутативность:

$$x \circ y = y \circ x, \text{ где } \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \downarrow, | \}$$

2. Ассоциативность:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \text{ где } \circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim\}$$

3. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned} (x \vee y)z &= xz \vee yz, \\ (xy) \vee z &= (x \vee z)(y \vee z), \\ (x \oplus y)z &= xz \oplus yz. \end{aligned}$$

4. Законы де Моргана:

$$a) \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad b) \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

5. Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

6. Законы поглощения:

$$a) x \vee xy = x; \quad b) x(x \vee y) = x.$$

7.

$$\begin{aligned} a) x \cdot \bar{x} &= x \cdot 0 = x \oplus x = 0; \\ b) x \vee \bar{x} &= x \vee 1 = x \sim x = x \rightarrow x = x \oplus \bar{x} = 1; \\ c) x \vee x &= x \cdot x = x \cdot 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x; \\ d) x \oplus 1 &= x \rightarrow 0 = x \sim 0 = x \downarrow x = x | x = \bar{x}; \\ e) x \vee \bar{x}y &= x \vee y. \end{aligned}$$

8.

$$a) x | y = \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad b) x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

9. Склеивание:

$$xy \vee x\bar{y} = x.$$

10. Обобщенное склеивание:

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}.$$

Для проверки этих свойств, достаточно составить таблицы истинности для правой и левой частей равенств.

3.2.5. Принцип двойственности переключательных функций

Функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ называется **двойственной** к $f(x_1, \dots, x_n)$.

Таблица двойственной функции получается из таблицы $f(x_1, \dots, x_n)$ инвертированием (отрицанием) столбца значений функции и его переворачиванием.

Пример

Найти функцию, двойственную к $f(x) = (00110011)$.

Строим таблицу истинности, инвертируем столбец значений, затем его переворачиваем.

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$	$\overline{f(\tilde{x})}$	$f^*(\tilde{x})$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Из определения двойственности следует, что $f^{**} = (f^*)^* = f$, т.е. функция f является двойственной к f^* (**свойство взаимности**).

Функция $f(\tilde{x})$ называется **самодвойственной**, если $f(\tilde{x}) = f^*(\tilde{x})$.

Пример

Функция $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ является самодвойственной.

Строим таблицу истинности.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2$	$f(\tilde{x}) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$\overline{f(\tilde{x})}$	$f^*(\tilde{x})$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Видим, что столбцы, соответствующие $f(\tilde{x})$ и $f^*(\tilde{x})$, совпадают.

Принцип двойственности

Если формула $U = F(f_1, f_2, \dots, f_n)$ реализует функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то формула $U^* = F^*(f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*)$ реализует функцию $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.3. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы СДНФ, СКНФ

Произведение вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ называют **элементарной конъюнкцией** и записывают в векторной форме следующим образом:

$$K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_l^{\sigma_l}$$

В такой записи вектор переменных $\tilde{x}$ определяет, какие переменные образуют конъюнкцию, а набор $\tilde{\sigma}$ задает порядок расстановки знаков инверсии (отрицания) над ними.

Пример

$$K_{(0,1,0,1)}(x) = x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^1 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Из этой записи следует, что существует всего 2^n различных элементарных конъюнкций n переменных, поскольку каждая конъюнкция определяется одним двоичным набором $\tilde{\sigma}$, состоящим из n компонентов.

Элементарная конъюнкция:

правильная, если в нее каждая переменная входит не более одного раза, включая отрицание переменной;

полная относительно переменных $x_1, \dots, x_n$, если в нее каждая переменная или ее отрицание входит ровно один раз;

монотонная, если она не содержит отрицаний переменных.

Формула вида $D = \bigvee_{i=1}^k K_i$, где K_i различные элементарные конъюнкции, называется **дизъюнктивной нормальной формой ДНФ**.

При $f(x) \neq 0$ тождественно, ее можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$$

Такое разложение функции носит название **совершенной дизъюнктивной нормальной формы СДНФ**.

Так как существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности и СДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то СДНФ единственна.

Длина СДНФ равна числу наборов, на которых функция $f(x) = 1$.

Пример

Построить СДНФ $f(x) = (10001100)$.

Таблица истинности $f(x) = (10001100)$:

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Наборы, на которых $f(x_1, x_2, x_3) = 1$: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$. Поэтому СДНФ
 $f(x) = (10001100) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$.

Выражение $D_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ - какой-либо двоичный набор, причем среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется **элементарной дизъюнкцией**.

Из такой записи видно, что существует 2^n различных элементарных дизъюнкций.

Элементарная дизъюнкция:

правильная, если в нее каждая переменная входит не более одного раза, включая отрицание переменной;

полная относительно переменных $x_1, \dots, x_n$, если в нее каждая переменная или ее отрицание входит ровно один раз;

Формула вида $K = \bigvee_{i=1}^k D_i$, где D_i различные элементарные дизъюнкции, называется **конъюнктивной нормальной формой КНФ**.

При $f(x) \neq 1$ тождественно, ее можно представить в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0} x_1^{\bar{\sigma}_1} \dots x_n^{\bar{\sigma}_n}$$

Такое разложение функции носит название **совершенной конъюнктивной нормальной формы СКНФ**.

Так как существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности и СКНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то СКНФ единственна.

Длина СКНФ равна числу наборов, на которых функция $f(x) = 0$.

Пример

Построить СКНФ $f(x) = (10001100)$.

Таблица истинности $f(x) = (10001100)$:

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x})$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Наборы, на которых $f(x_1, x_2, x_3) = 0$: (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1).
Отрицание этих наборов: (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0), (0,0,1), (0,0,0). Поэтому СКНФ

$$f(x) = (10001100) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

3.4. Полнота, замкнутость. Теорема о полноте

3.4.1. Основные определения

Система булевых функций $G = \{f_1, \dots, f_m\}$ называется **полной**, если любая булева функция может быть выражена через функции из G с помощью суперпозиций.

Система P_2 – множество всех булевых функций – является полной системой.

Теорема

Пусть система функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ – полная и любая ее функция может быть выражена с помощью суперпозиции через функции системы $\{g_1, \dots, g_k\}$.

Тогда система $\{q_1, \dots, q_k\}$ также является полной.

Доказательство

Пусть φ – произвольная функция из P_2 .

Так как система функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ полна, то $\varphi = \varphi(f_1, \dots, f_m)$, причем переменных в φ может быть любое конечное число от 1 до m .

По условию:

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(g_1, \dots, g_k), \\ &\dots\dots\dots \\ f_m &= \varphi_m(g_1, \dots, g_k). \end{aligned}$$

Поэтому функция φ может быть выражена через систему функций $\{g_1, \dots, g_k\}$ с помощью суперпозиции:

$$\varphi = \varphi(\varphi_1(g_1, \dots, g_k), \dots, \varphi_m(g_1, \dots, g_k)) = \varphi(g_1, \dots, g_k).$$

Таким образом, произвольная функция из P_2 выражена через $\{g_1, \dots, g_k\}$, т.е. эта система полна.

Теорема

Любая булева функция может быть выражена через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, т.е. система $\{\neg, \&, \vee\}$ – полна.

Доказательство

Пусть $f(x) \equiv 0$, тогда $f(x) = x_1 \& \bar{x}_1$.

Если $f(x) \neq 0$ тождественно, то выразим ее в виде СДНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}.$$

Следовательно, любая функция выражается в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Примеры

1. Система $\{\neg, \&\}$ – полна, т.к. дизъюнкция может быть выражена через отрицание и конъюнкцию:

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}}.$$

2. Система $\{\neg, \vee\}$ – полна, т.к. конъюнкция может быть выражена через отрицание и дизъюнкцию:

$$x \& y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}.$$

3. Система $\{\downarrow\}$ – полна, т.к. отрицание и дизъюнкция могут быть выражены через стрелку Пирса:

$$\bar{x} = x \downarrow x; \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

4. Другие примеры полных систем:

$$\{\mid\}; \{\&, \oplus, 1\}; \{\rightarrow, \neg\}; \{\vee, \sim, \oplus\}.$$

Класс функций G называется **функционально замкнутым**, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.

3.4.2. Важнейшие замкнутые классы

1. T_0 – класс всех булевых функций, сохраняющих ноль.

Функцию называют **сохраняющей ноль**, если она при нулевых значениях аргументов также равна нулю:

$$f(0, \dots, 0, \dots, 0) = 0.$$

2. T_1 – класс всех булевых функций, сохраняющих единицу.

Функцию называют **сохраняющей единицу**, если она при единичных значениях аргументов также равна единице:

$$f(1, \dots, 1, \dots, 1) = 1.$$

3. S – класс самодвойственных функций.

Функцию называют **самодвойственной**, если она удовлетворяет равенству

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Среди функций двух переменных классу S принадлежат функции f_3, f_5, f_{10}, f_{12} .

4. M – класс монотонных функций.

Двоичный набор $a = (a_1, \dots, a_n)$ называют **предшествующим** набору $b = (b_1, \dots, b_n)$ и записывают это как $a \leq b$, если имеют место покомпонентные неравенства $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$.

Это предшествование является отношением нестрогого порядка, устанавливающим на множестве двоичных наборов частичный порядок.

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ называют **монотонной**, если для любых двух сравнимых наборов a и b , таких, что $a \leq b$, справедливо $f(a) \leq f(b)$.

Для отнесения функции двух переменных к этому классу необходимо сравнить их значения на всех пяти парах сравнимых наборов:

$$(0,0) \leq (0,1), (0,0) \leq (1,0), (0,0) \leq (1,1), (0,1) \leq (1,1), (1,0) \leq (1,1).$$

Среди них монотонными являются шесть функций: $f_0, f_1, f_3, f_5, f_7, f_{15}$.

5. L – класс линейных функций.

Свойство линейности булевых функций определяется как свойство **полинома Жегалкина**, представляющего собой формулу над функциональным базисом $\{\&, \oplus, 0, 1\}$.

Полиномом (многочленом) Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которых все переменные входят не выше, чем в первой степени:

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

причем на каждом наборе $(i_1, \dots, i_k)$ все i_j ($j=1, \dots, k$) различны, а $a_{i_1 \dots i_k} \in \{0; 1\}$.

Свойства операции $\oplus$

1. Операция $\oplus$ коммутативна:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1;$$

2. Операция $\oplus$ ассоциативна:

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3);$$

3. Операция $\&$ дистрибутивна по отношению к операции $\oplus$:

$$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3;$$

4. Операция $\oplus$ не идемпотентна:

$$x \oplus x = 0, \quad x \oplus x \oplus x = x.$$

5. Отсутствие идемпотентности распространяется на сумму любого четного (нечетного) числа слагаемых.

6. Справедливо равенство

$$\bar{x} = x \oplus 1;$$

В общем случае для построения полинома Жегалкина произвольной булевой функции нужно выполнить следующие действия:

1. на основании табличного задания либо путем эквивалентных преобразований произвольной формулы построить СДНФ;
2. в СДНФ символы операции $\vee$ заменить на символы $\oplus$;
3. вместо всех $\bar{x}_i$ подставить эквивалентные формулы $x_i \oplus 1$;
4. раскрыть скобки и привести подобные члены по правилу: $x \oplus x \oplus \dots \oplus x = 0$ (четное число слагаемых); $x \oplus x \oplus \dots \oplus x = x$ (нечетное число слагаемых).

Функция называется **линейной**, если ее полином Жегалкина имеет степень не выше первой, т. е. содержит конъюнкции длиной не более 1.

Для проверки произвольной функции на принадлежность классу L , необходимо построить для нее полином Жегалкина.

Проверим на линейность некоторые булевы функции.

Очевидно, что в такой проверке не нуждаются функции:

$$f_0(x,y) = 0, \quad f_3(x,y) = x, \quad f_5(x,y) = y, \quad f_6(x,y) = x \oplus y, \quad f_{15}(x,y) = 1.$$

Функции $f_{12}(x,y) = \bar{x}$ и $f_{10}(x,y) = \bar{y}$ могут быть приведены к полиномам вида $f_{12}(x,y) = 1 \oplus x$ и $f_{10}(x,y) = 1 \oplus y$, являющимся линейными, что указывает на линейность этих функций.

Функция равнозначности $f_9(x,y) = x \sim y$ может быть представлена СДНФ вида $x y \vee \bar{x} \bar{y}$. После замены символа дизъюнкции $\vee$ символом $\oplus$, замены переменных с отрицаниями, раскрытия скобок и приведения подобных членов получим полином Жегалкина

$$\begin{aligned} f_9(x,y) &= x \sim y = xy \vee \bar{x} \bar{y} = xy \oplus \bar{x} \bar{y} = xy \oplus (1 \oplus x)(1 \oplus y) = \\ &= xy \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy = 1 \oplus x \oplus y. \end{aligned}$$

Из линейности построенного полинома Жегалкина следует линейность функции $f_9(x,y) = x \sim y$.

Для функции $f_1(x,y) = x y$ полином Жегалкина строится тривиально: $f_1(x,y) = xy = 0 \oplus xy$. Как видно, полином и соответственно функция конъюнкции нелинейны.

Теперь построим полином Жегалкина для функции $f_7(x,y) = x \vee y$ – дизъюнкции:

$$\begin{aligned} f_7(x,y) &= x \vee y = x(y \vee \bar{y}) \vee y(x \vee \bar{x}) = xy \vee x\bar{y} \vee yx \vee y\bar{x} = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y = \\ &= xy \oplus x\bar{y} \oplus \bar{x}y = xy \oplus x(1 \oplus y) \oplus (1 \oplus x)y = xy \oplus x \oplus xy \oplus y \oplus xy = x \oplus y \oplus xy. \end{aligned}$$

Нелинейность полученного полинома Жегалкина указывает на нелинейность дизъюнкции.

Для функции $f_{14}(x,y) = x | y$ – функции Шеффера полином строится достаточно просто, так как она является инверсией конъюнкции:

$$f_{14}(x,y) = x | y = \overline{xy} = 1 \oplus xy.$$

Построенный полином и, следовательно, функция Шеффера нелинейны.

При построении полинома Жегалкина для функции Пирса $f_8(x,y) = x \downarrow y$ воспользуемся полиномом Жегалкина для дизъюнкции, так как функция Пирса и дизъюнкция инверсны:

$$f_8(x,y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y} = 1 \oplus (x \oplus y \oplus xy) = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy.$$

Отсюда следует, что функция Пирса нелинейна.

Таким образом, мы рассмотрели пять классов функций, каждый из которых вследствие замкнутости не обладает свойством функциональной полноты.

3.4.3. Теорема о функциональной полноте Поста

Функциональный базис B является **полным** тогда и только тогда, когда он целиком не содержится ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L .

Доказательство

Предположим, что базис B целиком принадлежит одному из перечисленных замкнутых классов. Тогда в силу замкнутости класса функций, содержащего функции из B , суперпозиция функций из B дает лишь функции из этого же замкнутого класса. Однако ни один из замкнутых классов не содержит всех булевых функций. Отсюда следует, что базис B неполон.

4. ГРАФЫ

4.1. Основные определения

Граф – это упорядоченная пара (V, E) , где V – конечное множество, элементы которого называются **вершинами**, а E – множество пар вершин $\{(v_i, v_j)\}$, называемых **ребрами** графа, где

$$E \subseteq V \times V.$$

Концами ребра называются элементы пары, образующей ребро.

Если концы совпадают, то ребро называется **петлей**.

Вершина называется **изолированной**, если она не является концом никакого ребра.

Вершина называется **концевой (висячей)**, если она является концом ровно одного ребра.

Если вершина v_i является началом или концом ребра e_n , то вершина и ребро называются **инцидентными**.

Вершины называются **смежными**, если они являются концами одного ребра.

Подграф графа (V, E) – такой граф (W, F) , что $W \subseteq V$ и $F \subseteq E$.

Рассмотрим R^n . Отметим в нем столько точек, сколько вершин у графа. Каждому ребру поставим в соответствие кривую, соединяющую концы этого

ребра. Эту кривую тоже будем называть ребром. То, что получится, называется **геометрической реализацией графа**.

Геометрическая реализация называется **правильной**, если у ребер нет общих точек, кроме, может быть, вершин.

Утверждение 1

В R^3 для любого графа существует правильная геометрическая реализация.

Доказательство

Расставим вершины графа произвольно. Очевидно, путем малых шевелений можно сделать так, что никакие четыре не будут лежать в одной плоскости. Теперь для любых трех вершин есть своя плоскость, а плоский граф из трех вершин допускает правильную реализацию.

Путь (маршрут) – конечная последовательность ребер графа $(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots, (v_{i_{n-1}}, v_{i_n})$. Говорят, что путь соединяет вершины v_{i_1}, v_{i_n} .

Простой путь (цепь) – путь, все вершины которого различны.

Цикл – путь, у которого $v_{i_1} = v_{i_n}$.

Простой цикл – цикл, у которого все ребра и все вершины, кроме концов, различны.

Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить путем.

Деревом называется связный граф без простых циклов.

Утверждение 2

Из каждого связного графа можно выделить подграф, содержащий все вершины исходного графа и являющийся деревом.

Доказательство

Если в графе есть простой цикл, то можно убрать из цикла одно ребро, не нарушив связности. Будем убирать ребра, пока простых циклов не станет.

Граф называется **ориентированным (орграфом)**, если каждому его ребру $(\overrightarrow{v_i, v_{i+1}})$ приписано направление.

Ориентированный цикл – цикл, в котором все ребра направлены в одну сторону, т.е. конечная последовательность ориентированных ребер $(\overrightarrow{v_i, v_{i+1}})$, где первая вершина совпадает с последней.

Утверждение 3

В любом конечном ориентированном графе без ориентированных циклов есть вершина, из которой ребра не выходят.

Доказательство (от противного)

Выберем любую вершину и, исходя из нее, будем двигаться по ребрам в направлении, приписанном данному ребру. Если из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро, то рано или поздно мы вернемся туда, где уже были, т.к. граф конечен. Но это будет ориентированный цикл. Противоречие.

Утверждение 4

В любом конечном ориентированном графе без ориентированных циклов можно занумеровать вершины первыми натуральными числами так, что каждое ребро будет направлено от вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

Доказательство

Докажем индукцией по числу вершин p .

При $p=1$ утверждение очевидно.

Пусть $p>1$. Предположим, что это верно для всех графов с числом вершин, меньшим p .

Рассмотрим граф с p вершинами. По утверждению 3 у него есть вершина, из которой ребра не выходят. Уберем из графа эту вершину и все, входящие в нее ребра, получим граф с числом вершин, меньшим p . По предположению индукции такой граф допускает искомую нумерацию вершин числами $1, 2, \dots, p-1$. Тогда присвоим выкинутой вершине номер p .

4.2. Способы задания графов

Задать граф – значит, описать множества его вершин и ребер.

1. Графический.

Вершины графа изображаются точками на плоскости, а ребра – непрерывными кривыми, соединяющими соответствующие точки. При этом один и тот же граф может изображаться по-разному, с пересечением ребер и без.

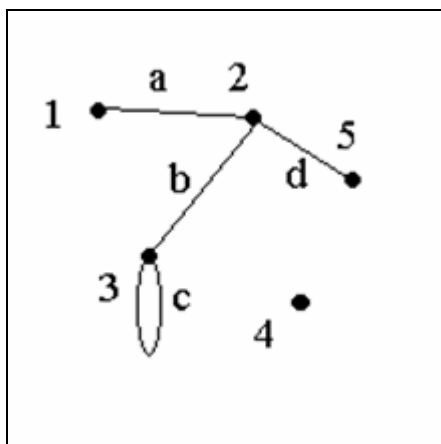


Рис. 4.2.1

2. Парой множеств.

Граф, изображенный на рисунке 4.2.1, можно задать **парой множеств** –
 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 3)\}$.

3. Матрицей инцидентности.

Матрицей инцидентности графа G называется матрица $B(G) = [b_{ij}]$ порядка $n \times m$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i - \text{инцидентна ребру } e_j, \\ 0, & v_i - \text{неинцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного графа D называется матрица $B(G) = [b_{ij}]$ порядка $n \times m$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i - \text{конец ребра } e_j, \\ -1, & v_i - \text{начало ребра } e_j, \\ 0, & v_i - \text{неинцидентна ребру } e_j, \\ 2, & v_i - \text{петля.} \end{cases}$$

4. Матрицей смежности.

Матрицей смежности графа G называется квадратная, симметричная матрица $A(G)=[a_{ij}]$ порядка n , где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Матрица смежности ориентированного графа D совпадает с матрицей неориентированного графа.

Пример

Матрицы инцидентности и смежности для графа G , изображенного на рисунке 4.2.1:

$B(G)$	a	b	c	d
1	1	0	0	0
2	1	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	1

В первом столбце по вертикали указаны вершины, в первой горизонтальной строке указаны ребра. Единицы в матрице проставлены там, где вершины и ребра инцидентны.

$A(G)$	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0

В первых строке и столбце указаны номера вершин. Единицы в матрице проставлены там, где вершины соединены ребрами.

Пример

Найдем матрицы инцидентности и смежности для ориентированного графа D , изображенного на рисунке 4.2.2:

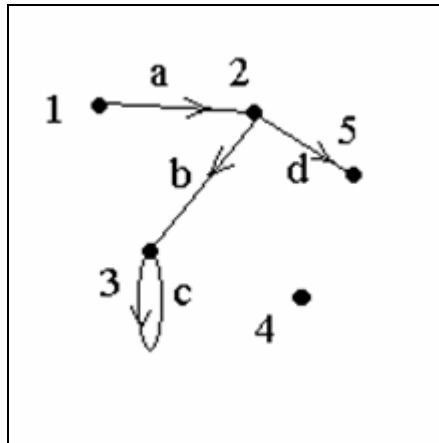


Рис. 4.2.2

Матрица инцидентности для графа D :

$B(D)$	a	b	c	d
1	-1	0	0	0
2	1	-1	0	-1
3	0	1	2	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	1

Матрица смежности для графа D :

$A(G)$	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0

4.3. Кодировка деревьев

Существуют способы задания деревьев, более экономичные, чем с помощью матриц смежности и инцидентности, которые в компьютере занимают много памяти.

4.3.1. Первый способ кодирования

Поставим в соответствие дереву с n ребрами слово, состоящее из 0 и 1 длиной $2n$ следующим образом. Выберем произвольную вершину и начнем обход дерева по произвольному ребру так, чтобы ребра все время оставались

справа, поворачивая в висячих вершинах. Если ребро встретилось в первый раз, записываем 0, если во второй, то 1. Код дерева, представленного на рисунке 4.3.1, (обход начат с вершины, помеченной * по часовой стрелке):
00100011100111.

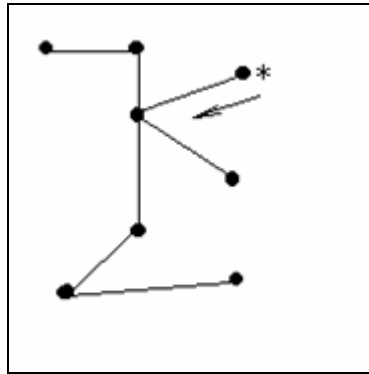


Рис. 4.3.1.

Не всякая последовательность из n 0 и n 1 служит кодом дерева.

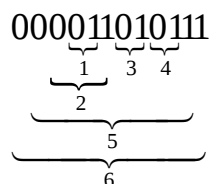
Необходимое и достаточное условие кода дерева: в любом начальном отрезке последовательности количество 0 не меньше количества 1.

4.3.2. Восстановление дерева по коду

Для того чтобы восстановить дерево по коду, нужно разбить последовательность на пары 0 и 1, соответствующие одному и тому же ребру. Первая, попавшаяся в коде 1, образует пару с предшествующим ей 0. Каждая следующая образует пару с ближайшим слева неиспользованным нулем. Пометим пары снизу дугами, которые соответствуют ребрам графа, занумеровав их.

Пример

Восстановить дерево по коду 000011010111.



Таким образом, ребро 1 входит в ребро 2, ребра 2,3,4 входят в 5, а ребро 5 входит в ребро 6 (рис. 4.3.2)

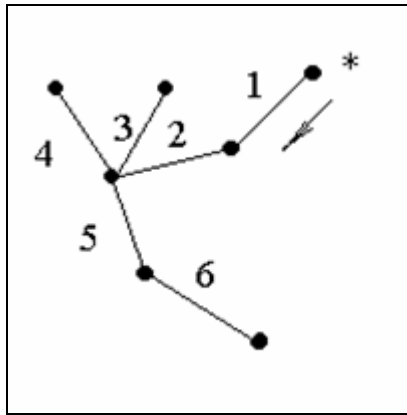


Рис. 4.3.2

4.3.3. Второй способ кодирования

Занумеруем все вершины дерева произвольным образом. Затем найдем концевую вершину с наименьшим номером. Запишем номер единственной смежной с ней вершины в код и удалим концевую вершину вместе с ребром. Для получившегося дерева снова найдем концевую вершину с наименьшим номером и т.д., пока не останется одно ребро.

Пример

Построить код дерева, изображенного на рисунке 4.3.3.

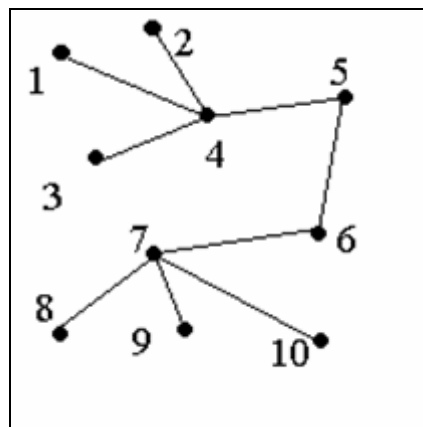


Рис 4.3.3.

Концевая вершина с наименьшим номером – 1, смежная с ней – 4. Удаляем вершину 1 вместе с ребром и записываем в код 4. В оставшемся дереве концевая вершина с наименьшим номером – 2, смежная с ней – 4. Удаляем вершину 2 вместе с ребром и записываем в код 4. Удаляем вершину 3 с ребром,

записываем в код 4. В оставшемся дереве концевая вершина с наименьшим номером 4. Удаляем ее вместе с ребром, в код записываем 5. Концевая вершина с наименьшим номером 5, убираем ее вместе с ребром, в код записываем 6. В оставшемся дереве концевая вершина с наименьшим номером 6. Удаляем ее вместе с ребром, в код записываем 7. В оставшемся дереве концевая вершина с наименьшим номером 7. Удаляем ее вместе с ребром, в код записываем 7. В оставшемся дереве концевая вершина с наименьшим номером 9. Удаляем ее вместе с ребром, в код записываем 7. Осталось одно ребро. Концевая вершина с наименьшим номером 7, удаляем ее вместе с ребром, а в код записываем 10.

Т.о., код дерева представленного на рисунке 4.4: [4 4 4 5 6 7 7 7 10].

4.3.4. Восстановление дерева по коду

Восстановление дерева по коду рассмотрим на примере кода

[5 5 5 5 6 7 7 9 10 11].

Вместо первого числа в коде пишем наименьшее, не встречающееся в коде:

1 5 5 5 6 7 7 9 10 11. Вместо второго числа в новой последовательности пишем наименьшее, не встречающееся в ней: 1 2 5 5 6 7 7 9 10 11 и т.д.

Т.о., получаем:

5	5	5	5	6	7	7	9	10	11
1	5	5	5	6	7	7	9	10	11
1	2	5	5	6	7	7	9	10	11
1	2	3	5	6	7	7	9	10	11
1	2	3	4	6	7	7	9	10	11
1	2	3	4	5	7	7	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	9	10	11
1	2	3	4	5	6	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	8	7	10	11
1	2	3	4	5	6	8	7	9	11
1	2	3	4	5	6	8	7	9	10

Возьмем первую и последнюю строки, полученной таблицы. По ней составим список ребер:

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,5),(7,6),(7,8),(9,7),(10,9),(11,10).

Построим дерево, соединив соответствующие вершины, рисунок 4.3.4.

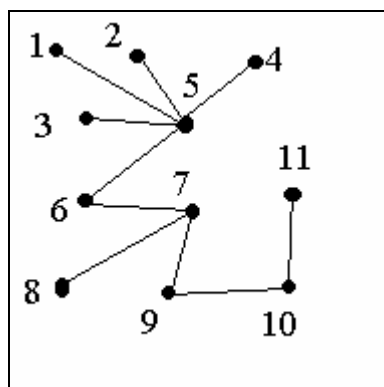


Рис. 4.3.4

Замечание

Может оказаться так, что в получившейся последней последовательности чисел отсутствуют два числа, тогда вершины с этими номерами нужно соединить.

4.4. Схемы из функциональных элементов

Схема из функциональных элементов (СФЭ) – это конечный ориентированный граф без ориентированных циклов, в каждую вершину которого входит не более двух ребер. При этом каждой вершине приписывается символ: переменная x_i , если в эту вершину ребра не входят; отрицание, если в вершину входит одно ребро; конъюнкция или дизъюнкция, если в вершину входит два ребра. Некоторым вершинам приписывается *. **Элементами** схемы называются вершины, помеченные логическими операциями.

Занумеруем вершины графа согласно утверждению 4. Каждой вершине СФЭ можно сопоставить некоторую булеву функцию по следующему индуктивному правилу. Пусть всем вершинам с номерами меньше n уже сопоставлены функции. Возьмем вершину с номером n . Если в нее не входит ни одного ребра, то ей приписана переменная, которую мы как функцию и поставим ей в соответствие. Если в вершину входит одно ребро, то в ней записано отрицание, и мы припишем этой вершине отрицание функции той вершины, из которой в данную вершину приходит ребро. Если входят два ребра, то в этой вершине будет конъюнкция или дизъюнкция функций тех вершин, из которых приходят эти ребра.

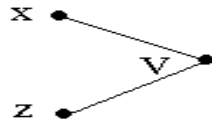
Функции, отвечающие вершинам, помеченным *, называются **реализуемыми** данной СФЭ.

Существует физическая интерпретация СФЭ, в которой они рассматриваются как математические модели соответствующих реальных

Для определения сложности f , нужно ее упростить так, чтобы число логических операций было минимальным.

$$f(x, y, z) = x \vee yz \vee \bar{x} \bar{y} z = [x \vee \bar{x} y = x \vee y] = x \vee yz \vee \bar{y} z = \\ = x \vee (y \vee \bar{y}) z = x \vee 1 z = x \vee z.$$

Сложность функции $L(f)=1$, а упрощенная схема имеет вид:



4.5. Контактные схемы

Под **контактной схемой (КС)** понимают конечный граф, в котором каждому ребру приписана переменная или ее отрицание и отмечены некоторые вершины – полюса.

Функция проводимости полюсов a и b некоторой контактной схемы – функция $f_{a,b}$, которая: **равна 1**, если $a=b$; **равна 0**, если в КС нет цепей, соединяющих a и b ;

в остальных случаях равна дизъюнкции всех цепей, соединяющих a и b , а каждая цепь равна конъюнкции всех своих ребер.

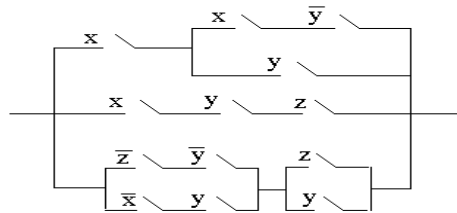
Сложностью КС называется число ребер в ней.

С точки зрения физики КС – устройства из проводников и двухпозиционных контактов, через которые полюсы источника тока связаны с потребителем.

Две контактные схемы называются **эквивалентными**, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток, т.е., если обе эти схемы имеют одинаковые функции проводимости.

Пример

Для заданной контактной схемы найти функцию проводимости, упростить ее и нарисовать эквивалентную схему.



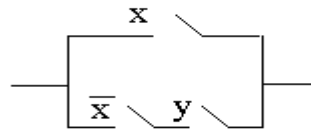
Функция проводимости имеет вид:

$$f(x, y, z) = x(x\bar{y} \vee y) \vee xyz \vee (\bar{z}\bar{y} \vee \bar{x}y)(z \vee y).$$

Упростим полученную функцию:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x(x\bar{y} \vee y) \vee xyz \vee (\bar{z}\bar{y} \vee \bar{x}y)(z \vee y) = \\ &= x\bar{y} \vee xy \vee xyz \vee z\bar{z}\bar{y} \vee z\bar{x}y \vee \bar{z}\bar{y}y \vee \bar{x}y = (x \vee xyz) \vee (\bar{x}yz \vee \bar{x}y) = \\ &= x \vee \bar{x}y. \end{aligned}$$

Поэтому эквивалентная схема имеет вид:



Рекомендуемая литература

Обязательная

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: «Физматлит», 2005.
2. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
3. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – С.-Пб.: «БХВ-Петербург», 2008.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: «Высшая школа», 2002.

Дополнительная

1. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: «Лаборатория Базовых Знаний», 2003.
2. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. – М.: «Высшая школа», 1986.
3. Кулабухов С. Ю. Дискретная математика (конспект лекций). – Таганрог: ТРУ, 2001.
4. Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. – М.: «Логос», 2003

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	...
1. МНОЖЕСТВА.....	4
1.1. Основные понятия теории множеств. Диаграмма Эйлера-Венна	4
1.2. Операции над множествами.....	4
1.3. Основные тождества алгебры множеств.....	7
1.4. Элементы комбинаторики.....	12
2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ	15
2.1. Основные определения	15
2.2. Способы задания бинарных отношений	16
2.3. Свойства бинарных отношений	17
2.4. Эквивалентность и порядок	18
2.5. Операции над бинарными отношениями.....	22
3. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ.....	24
3.1. Основные определения и свойства булевых функций.....	24
3.2. Булева алгебра.....	28
3.3. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы СДНФ, СКНФ.....	33
3.4. Полнота, замкнутость. Теорема о полноте.....	38
4. ГРАФЫ.....	42
4.1. Основные определения.....	42
4.2. Способы задания графов.....	44

4.3. Кодировка деревьев.....	47
4.4. Схемы из функциональных элементов.....	51
4.5. Контактные схемы.....	53
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	55

Ольга Юрьевна Агарева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Под редакцией автора
