Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«МАТИ» - Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

В. В. Горбацевич

РЕКОМЕНДАЦИИ К ЧТЕНИЮ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Москва 2007

Введение

Это пособие предназначено, прежде всего, для преподавателей. В нем приводятся некоторые избранные рекомендации по методике чтения лекций по курсам теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. При этом предполагается, что читатель достаточно квалифицирован – что он знаком со стандартным материалом по указанным разделам (включая основные определения, доказательства и примеры). Именно в силу этого ограничения данное пособие не очень приспособлено для студентов, хотя оно может быть им полезно как дополнение к лекционному курсу или при самостоятельном изучении (в дополнение к стандартным учебникам) некоторых разделов указанных курсов.

Пособие написано на основании семестровой программы (см. Приложение), составленной автором для одного из лекционных потоков в МАТИ (в котором на этот курс отводится один семестр – 1 лекция в неделю и 1 практическое занятие в неделю). Для других вариантов программ можно использовать не все пособие целиком, а только те или иные его разделы, так как методические рекомендации тут для отдельных разделов программы между собой связаны не очень сильно.

Так как это пособие не есть курс лекций, в нем не всегда указываются ВСЕ необходимые сведения по рассматриваемому разделу курса. Тут отмечаются только некоторые специфические особенности того или иного раздела, а преподаватель сам без труда добавит к написанному здесь стандартные сведения, определения и т.п..

В тексте ***курсивом*** выделены слова и предложения, взятые непосредственно из текста указанной учебной программы. Обычным же шрифтом написаны сами методические рекомендации по лекционному изложению соответствующего теоретического материала.

ЛЕКЦИЯ 1.

Предмет теории вероятностей.

Здесь вкратце описывается понятие случайного события (подробнее о нем будет рассказываться чуть позже) и сообщается, что такие события напрямую средствами «обычной» математики (той, которую студенты изучали до сих пор – линейной алгебры, математического анализа и др.) изучать не удается. Поэтому возникает необходимость использования новых методов, ориентированных именно на такие объекты, как случайные события. Нужно привести несколько примеров случайных событий, желательно не «абстрактных» (вроде шаров в урнах и т.п.), а взятых из реальной, современной, окружающей нас жизни.

Затем сообщается, что теория вероятностей – это теоретическая основа для математической статистики. О роли и пользе математической статистики необходимо сказать тут же, приведя конкретные задачи, решаемые методами математической статистики и тесно связанные как с жизнью современного общества (предвыборная борьба, социологические исследования и формы изложения их результатов в СМИ), так и со специализацией студентов.

Нужно также дать некоторое понятие и о случайных процессах (поначалу описывая их просто как случайные события, развивающиеся во времени) и указать на актуальность их изучения в современном мире.

Алгебра событий.

Вначале нужно рассказать об общем понятии события. События происходят в результате некоторых опытов, экспериментов, испытаний (все эти три слова – синонимы в данном контексте). Тут нужно привести несколько конкретных примеров событий (указав конкретно, явно и точно, результатом каких именно опытов они являются).

Дать определения невозможного и достоверного событий. Привести примеры таких событий и указать на их относительность (ибо на самом деле трудно найти пример реального события, абсолютно достоверного или же абсолютно невозможного в точном смысле этого слова).

Привести определения операций над событиями. Перечислить стандартные свойства этих операций. Сформулировать «геометрическое» описание этих операций (круги Эйлера, они же - диаграммы Венна) и рассказать, как с помощью таких описаний можно обосновывать (но не «доказывать» в точном смысле этго слова) свойства операций над событиями. Показать на примере, как можно доказывать эти свойства и поручить студентам доказать некоторые из них в виде «домашнего задания к экзамену». Нужно указать на двойственность в этих свойствах. Для обоснования принципа двойственности используется операция перехода к противоположному событию. Нужно дать определение этой операции и сформулировать ее свойства. Полезно доказать или проиллюстрировать одно из них (на диаграммах Венна) и поручить студентам попробовать самостоятельно доказать остальные.

Случайные события

Случайное событие – это событие, происходящие в результате эксперимента, и наступление которого (как одного из нескольких возможных исходов этого эксперимента) мы не может заранее однозначно предсказать. Полезно указать на относительность понятия случайного события (ибо то, что мы не можем предсказать сейчас, возможно, удастся предсказывать в будущем – например, в прошлом так обстояло дело с солнечными затмениями – точно их предсказывать не умели). Случайные события изучает теория вероятностей, при этом обязательно предполагается, что опыты, эксперименты, при которых происходят или не происходят случайные события, можно повторять неограниченное (или просто очень большое) число раз, при этом сохраняя неизменными ВСЕ существенные условия проведения этих опытов. Например, методами теории вероятностей можно изучать бросание (многократное) монеты – тут результат случаен и может быть изучен методами теории вероятностей. А вот развитие Вселенной – не есть предмет изучения теории вероятностей, так как невозможно экспериментально повторять раз за разом «Большой взрыв» (или что-то подобное ему) и смотреть, что же получится на этот раз.

Относительная частота и вероятность случайного события

*Т*ут полезно отметить, что частота может оказаться и равной 0 (например, для невозможного или очень редкого события). Рассказать об опытах Бюффона по бросанию монеты (до 24000 раз!). Кстати, сам Бюффон бросал не одну монету, а сразу много монет, что резко ускоряло проведение его экспериментов.

Дать основное определение: вероятность – это число, около которого группируются относительные частоты. Указать на распространенную ошибку – определять вероятность как предел относительных частот (не указывая, в каком смысле тут нужно понимать предел – обычное определение из математического анализа тут не подходит). Часто говорят, что вероятность – это мера случайности события, но это – лишь хорошее описание понятия вероятности, однако оно не являются математическим определением.

Классическое определение вероятности.

Дать классическое определение вероятности (на основе выделения группы «равновероятных» исходов). Привести несколько простых примеров (для монеты, игральной кости и для более жизненных ситуаций – например, для ситуаций на экзаменах). Полезно отметить, что тут «классичность» - это условное наименование. При этом можно рассказать немного об истории теории вероятностей - о «классическом» периоде теории вероятностей, связанным с анализом азартных игр. Полезно отметить и роль, начиная с 19-го века, теории вероятностей (и, особенно, математической статистики) в социологии. Полезно отметить и роль отечественных ученых в развитии теории вероятностей (Чебышев, Колмогоров, научные школы в Москве и Киеве).

Основные свойства вероятности.

Тут указывается, что вероятность - это число, расположенное между 0 и 1. Вероятности, равные 0 и 1 - это вероятности невозможного и достоверного событий, но не только их (см. ниже).

Основные формулы комбинаторики.

Дать определение перестановок, сочетаний и размещений. Привести формулы для числа перестановок, сочетание, размещений. При этом отметить специфику определения факториала (0!=1 полагается по определению, а не как следствие общего определения) Проиллюстрировать простейшие из этих формул (особенно полезны числа сочетаний по 1 или по 2). Привести конкретные примеры (например, рассмотреть разного рода группы из студентов, построенных в ряд).

ЛЕКЦИЯ 2.

Геометрические вероятности.

Дать определение геометрической вероятности на основе меры «пространства возможных исходов», изображенного геометрически (тут мера - это длина, площадь, объем). Привести примеры вычисления такой геометрической вероятности. Показать, как строятся примеры событий, имеющих вероятность 0, но, в то же время, не являющихся невозможными (опровергнув распространенное заблуждение о том, что условие «вероятность события равна нулю» эквивалентно невозможности события) - например, вероятность ожидания поезда метро равно 1 минуту равна нулю, хотя это событие вовсе не невозможно.

Теорема сложения вероятностей.

Отметить важность тут понятия несовместных событий. Рассмотреть пример, когда вероятности событий-слагаемых равны 0.7 и 0.8, так что сумма вероятностей тут будет больше 1.

Противоположные события и их вероятности.

Вывести способ вычисления вероятности противоположного события. Тут на примерах полезно показать, что иногда удобнее вычислять вероятность не самого события, а ему противоположного (например, вычисление вероятности выпадения на игральной кости 2,3,4,5 или 6 очков или, что более эффектно, вычисление вероятности непопадания в цель при 100 выстрелах – см. ниже).

Условные вероятности. *Теорема умножения вероятностей*.

На самом деле теорема умножения вероятностей – в общем случае – есть просто вариант определения условной вероятности. Самостоятельное значение она имеет только для независимых событий. Привести пример вычисления вероятности многократного повтора некоторого события (например, вероятности непопадания в цель при стрельбе).

Независимые события.

События называются независимыми, если наступление или ненаступление одного из них не влияет на наступления или ненаступление другого. Полезно разобрать примеры, показывающие различие понятий независимых и несовместных событий. На самом деле абсолютно независимых событий в реальной жизни не бывает, так как ВСЕ события в нашем мире в той или иной степени зависимы. Но вот степень этой зависимости может быть разной и если она очень мала, исчезающе мала, то имеет смысл говорить о независимости событий.

Формула полной вероятности.

Здесь важно четко выделить понятие полной группы событий, проанализировать все элементы определения полной группы и дать простые, конкретные примеры и один-два более сложных примера полных групп событий.

Доказательство формулы полной вероятности очень полезно – оно позволяет проиллюстрировать применение простейших свойств алгебры событий и свойств вероятности.

ЛЕКЦИЯ 3.

Формула Байеса (или Бейеса – тут имеются разночтения).

Другое ее название – формула гипотез. Нужно объяснить смысл этого второго названия.

Сформулировать эту теорему, доказать и привести пример ее применения – например, для пересмотра априорных вероятностей.

Схема и формула Бернулли.

Привести примеры серий опытов, которые можно рассматривать как последовательность независимых испытаний. Указать примеры серий зависимых испытаний (тем самым не подходящих под схему Бернулли). Полезно доказать формулу Бернулли хотя бы вкратце (не ограничиваясь просто указанием самой формулы).

Теоремы Пуассона и Лапласа.

Вначале на примере показать трудности при применении формулы Бернулли в некоторых задачах (когда велико число испытаний, а вероятность отдельного события очень мала). Обсудить роль калькулятора в вычислениях, а также связанные с этим ограничения в практической применимости формулы. Нужно обязательно объяснить, в каких случаях удобнее применять формулу Пуассона, а в каких – формулу Лапласа.

ЛЕКЦИЯ 4.

Случайные величины.

Случайные величины – это числовые характеристики случайных событий. Привести примеры случайных величин – из области азартных игр, из окружающего мира (температура тела, рост и вес случайно выбранного студента и др.). Указать, что случайные величины бывают дискретными (не давая тут абсолютно точного определения), непрерывными и смешанными.

Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины.

Тут необходимо, помимо прочего, описать взаимную связь закона распределения и функции распределения для дискретных случайных величин. Рассказать, как построить график функции распределения по закону распределения дискретной случайной величины и как сделать обратный переход.

Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Тут важно, кроме определений, привести примеры конкретных случайных величин, распределенных по этим законам.

ЛЕКЦИЯ 5.

Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства.

Тут очень полезно дать «механическую» интерпретацию для функции плотности (как «вероятности на единицу длины»). Доказать основные свойства функций распределения и плотности (для функции распределения чередуя случаи дискретной и непрерывной случайных величин). Вывести формулу попадания случайной величины в интервал (отметив неточность названия – речь идет на самом деле о вероятности попадания в полуинтервал).

Указать другие варианты терминологии (дифференциальная и интегральная функции распределения), учитывая их распространенность на Западе.

Равномерное распределение вероятностей.

Вначале ввести равномерное распределение как такое, плотность которого постоянна в некотором отрезке (и равна 0 вне него). Рассказать, как на практике возникают такого рода распределения (например, время ожидания поезда в метро). Объяснить, как можно однозначно определить константу, входящую в формулу для плотности равномерного распределения.

ЛЕКЦИЯ 6.

Нормальный закон распределения вероятностей.

Полезно уже здесь указать на весьма универсальный характер нормального закона распределения (позже это будет обосновано ссылкой на ЦПТ).

Нормальная кривая (кривая Гаусса).

Указать на широкую распространенность этой кривой в технике и отметить, что иногда ее рисуют неточно.

Функция Лапласа.

К сожалению, есть ДВА или даже ТРИ варианта (различные – с разными пределами интегрирования и коэффициентами перед интегралами!) определения функции Лапласа. Мне больше нравится то определение, при котором функция Лапласа нечетна.

Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

Для примера вывести и формулу попадания в симметричный интервал, особенно это полезно для нормального распределения.

Показательное распределение.

Указать в качестве примера на его связь с вероятностью времени отказа оборудования.

ЛЕКЦИЯ 7.

Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин:

Математическое ожидание

Дать обоснование определения и механическую интерпретацию (как центра тяжести единичной распределенной массы). Отметить, что математическое ожидание – не есть, вообще говоря, среднее значение случайной величины (ибо оно может не быть значением этой величины), а это – ее значение в среднем, можно его называть усредненным значением.

Сформулировать свойства математического ожидания и доказать простейшие из них (чередуя при этом случаи непрерывной и дискретной случайных величин и соответствующие им формулы). Отметить важность независимости случайных величин в формуле для математического ожидания произведения случайных величин.

Дисперсия, среднее квадратичное отклонение, моменты.

Сформулировать и доказать свойства дисперсии. Дисперсия - характеристика рассеяния случайной величины вокруг усредненного значения. Тут полезно ввести понятие центрированной случайной величины. Обязательно доказать, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий (объяснив при этом, что это – весьма удивительное свойство, ему в арифметике соответствовала бы такая странная формула, как $(a+b)^2=a^2+b^2$). Полезно тут дать обоснование правила (широко используемого в технике) среднего арифметического нескольких однородных результатов (показав, как при этом уменьшается дисперсия).

Указать на различия русскоязычной терминологии и англоязычной (для среднеквадратичного отклонения - standard deviation).

Правило трех сигм.

Указать, что можно было бы ввести и правила двух сигм (соответствует 95% вероятности) и четырех сигм.

ЛЕКЦИЯ 8.

Случайные векторы.

Системы из нескольких случайных величин можно рассматривать как случайные векторы. Тут нужно дать примеры систем случайных величин, которые удобно или даже просто необходимо рассматривать не каждую по отдельности, а совместно.

Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины.

Указать на аналогию с законом распределения одной случайной величины.

Функция распределения и плотность распределения двумерной случайной величины, их свойства.

Указать на связь с понятием функции распределения и плотности распределения одной случайной величины. Ввести понятие частичных функций распределения (как функций распределения отдельных координат случайного вектора) и указать их связи с функцией распределения случайного вектора, то же - для плотностей.

Вероятность попадания случайной точки в произвольную область.

Привести соответствующие формулы и показать, что из них выводятся выражения для частичных функций распределения.

Числовые характеристики двумерных случайных величин:

Математические ожидание и дисперсии координат.

Тут по функции распределения случайного вектора вычисляются вероятностные характеристики его координат.

Начальные и центральные моменты.

Указать, что некоторые из этих моментов - это уже введенные выше математические ожидания и дисперсии координат.

Корреляционный момент.

Указать, что это - один из центральных моментов и что он - характеристика именно двух случайных величин, их совместного распределения. Сформулировать и доказать или проиллюстрировать некоторые его свойства.

Коэффициент корреляции, его свойства

Вывести его свойства из свойств корреляционного момента. Указать, что коэффициент корреляции безразмерен, что обуславливает удобство его применения. Описать, как связаны случайные величины, коэффициент корреляции которых по модулю равен 1: отметить, что между ними - не однозначная линейная связь (как это часто и ошибочно утверждается), а лишь линейная связь, выполняющаяся с вероятностью 1.

Коррелированность и зависимость случайных величин.

Указать на различие этих двух понятий и на пользу от замены второго первым.

ЛЕКЦИЯ 9.

Закон больших чисел (ЗБЧ).

Тут полезно указать, что ЗБЧ - это не какой-то один единственный закон, а целая группа законов. Отметить, что о ЗБЧ неспециалисты (в СМИ и др.) часто говорят по самым разным поводам, иногда даже не зная, что именно за этим скрывается.

Теоремы Чебышева и Бернулли.

Доказать неравенство Чебышева и вывести из него теорему Бернулли - простейший из ЗБЧ.

Центральная предельная теорема Ляпунова (ЦПТ).

Сформулировать ЦПТ в упрощенной форме (без количественных деталей). Указать на следствие ЦПТ - обоснование широкой распространенности нормального распределения в природе и на практике. Указать, что на практике встречаются и случайные величины с отличными от нормального законами распределения - например, с равномерным, показательным и др.

На этом заканчивается курс теории вероятностей. Полезно отметить, что теорию вероятностей можно рассматривать как базу для математической статистики.

ЛЕКЦИЯ 10.

Основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность и выборка.

Привести примеры генеральных совокупностей и выборок из окружающей жизни (например, выборка - одна группа студентов из лекционного потока) и из техники (как можно ближе к специализации студентов).

Вариационный ряд, статистический ряд.

Отметить, что это – просто методы оформления результатов экспериментов, подготавливающие эти данные для последующей обработки методами математической статистики. Сейчас, с внедрением компьютерных программ, такого рода подготовительные процедуры часто становятся излишними.

Выборочная функция распределения и гистограмма.

Здесь необходимо указать на связи с соответствующими понятиями для дискретных случайных величин. Полезно отметить на роль гистограмм в современном бизнесе, в экономике и др. и на возможность построения гистограмм с помощью разнообразных компьютерных программ.

Числовые характеристики статистического распределения:

Выборочное среднее

Тут полезно объяснить, что среднее арифметическое – это очень естественная оценка для математического ожидания, но не единственно возможная (при необходимости полезно привести примеры других оценок).

Простейшая оценка дисперсии

Здесь полезно отметить, что простейшая оценка для дисперсии (которая, как будет показано позже, обладает некоторым недостатком – она является смещенной) строится по той же схеме, что и оценка для математического ожидания.

Оценки начальных и центральных моментов.

Здесь главное – это оценка для коэффициента корреляции (которая строится по той же схеме, что и оценка для дисперсии).

Очень полезно указать на возможность оценок вычисления с помощью Excel: команды СРЗНАЧ, ДИСПР, КОРЕЛЛ. При этом нужно отметить на неудачность теоретических описаний этих оценок в самом Excel (см. ниже).

ЛЕКЦИЯ 11.

Основные свойства статистических оценок параметров распределения:

Несмещенность

Смысл смещенности оценки - внесение систематической ошибки при обработке результатов экспериментов. Отметить, что смещенность – это недостаток оценки, но иногда этот недостаток не очень влияет на результат.

Состоятельность

Ее смысл – возможность достижения сколь угодно высокой точности оценки (с вероятностью, близкой к 1).

Несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки математического ожидания.

Эти утверждения полезно доказать, так как это нетрудно. Несмещенность оценки для математического ожидания выводится из свойств математического ожидания, а состоятельность – из ЗБЧ (из теоремы Бернулли).

Смещенность выборочной дисперсии. Пример несмещенной оценки дисперсии.

Тут полезно ввести понятие асимптотически несмещенной оценки. Введенная выше смещенная оценка для дисперсии дает пример асимптотически несмещенной оценки.

В Excel можно вычислять как смещенную, так и несмещенную оценки для дисперсии. Но при этом в Excel говорится о вычислениях по генеральной совокупности и по выборке, что ошибочно (так как генеральной совокупности почти никогда получить не удается).

ЛЕКЦИЯ 12.

Интервальное оценивание неизвестных параметров.

До сих пор оценка – это была некоторая случайная величина. Она дает некоторую точку, поэтому ее называют точечной оценкой. При этом точность такой оценки остается часто неизвестной. Тут нужно привести примеры, в которых именно точность оценки играет решающее значение (например, при социологических исследованиях, при анализе критических ситуаций, при расчете прочности изделий).

Доверительная вероятность и доверительный интервал.

Здесь нужно подробно рассказать о понятии доверительной вероятности и о том, что она задается не произвольно или по умолчанию, а исходя из специфики решаемой задачи. Полезно разобрать конкретные примеры, в которых естественно выбирать ту или иную доверительную вероятность (например, при прыжках с парашютом и при покупке электрической лампочки - тут естественно использовать совсем разные доверительные вероятности).

Вывести доверительное уравнение и объяснить, почему так трудно его решать (ибо тут неизвестна функция распределения оценки).

Построение доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения.

Легко выводится из ЗБЧ (из теоремы Бернулли).

Доверительный интервал для вероятности.

Это можно рассматривать как следствие интервальной оценки (см. выше) для математического ожидания относительной частоты события.

ЛЕКЦИЯ 13.

Статистическая проверка статистических гипотез.

Здесь вначале нужно перечислить некоторые простейшие виды гипотез, которые можно проверять методами математической статистики, например:

О вероятности – о том, согласуются ли данные выборки с априорным значением вероятности некоторого события.

О законе распределения (например, является ли распределение нормальным или равномерным и т.п.)

О параметрах распределения – об их конкретных значениях, о различии между ними (для двух выборок) и др.

Общие принципы проверки гипотез.

Вводятся понятия статистической гипотезы, ошибок первого и второго рода, статистического критерия. Обязательно нужно объяснить различие ошибок первого и второго рода (они имеют часто очень разные последствия).

Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения.

Проще всего это производится на основе двух параметров - асимметрии и эксцесса. Асимметрия характеризует отклонение плотности распределения от симметричной, а эксцесс – степень «уплощенности» графика (по отношению к графику нормального распределения). Возможны и более изощренные варианты (о них полезно здесь только упомянуть, пообещав рассказать об одном из них чуть позже – например, о критерии хи-квадрат).

Проверка гипотезы о значимости отличия от нуля коэффициента корреляции.

Использовать критерий (статистику), распределенную приблизительно по закону Стьюдента. Тут полезно рассказать о таблицах распределения Стьюдента и об использовании простейших компьютерных программ (Excel и др.). Полезно также рассказать, что «Стьюдент» (Student) – это псевдоним Уильяма Госсета (его работодатели – а он работал на пивоваренном заводе Гиннеса - запрещали ему публиковать результаты его исследований).

Проверка гипотезы о виде распределения (критерий хи-квадрат).

Привести конкретный пример применения для проверки равномерности распределения (для лотерей и т.п.).

ЛЕКЦИЯ 14.

Корреляционный анализ.

Здесь вначале анализируется коэффициент корреляции. Например, можно проверить гипотезу об отличии его от нуля (см. выше). При ненулевом коэффициенте корреляции можно пытаться установить конкретный вид зависимости между случайными величинами – это уже задача регрессионного анализа

Регрессионный анализ.

Вводится понятие регрессионного уравнения в общем виде – как функции математического ожидания одной случайной величины в зависимости от значений другой случайной величины. Нужно отметить, что точное нахождение уравнения регрессии чрезвычайно сложно, поэтому на практике ищется не само это уравнение, а то или иное его приближение. В прикладных разделах часто ограничиваются только линейной регрессией (линейным приближением). Полезно рассказать об истории термина «регрессия» (впервые этот термин появился при описании роста ребенка по отношению к росту родителя – тут была обнаружена регрессия, т.е. некоторое отступление, отход назад, когда рост ребенка оказывался ближе к среднему значению роста людей, чем рост родителя).

Далее рассказывается о линейной регрессии (отметив, что для двух случайных величин есть две регрессии: X на Y и Y на X). Затем необходимо отметить, что в реальной жизни встречаются в основном нелинейные зависимости и что современные компьютерные программы позволяют находить и такие зависимости.

Основа вычисления линейного уравнения регрессии - метод наименьших квадратов (МНК). В изложении этого метода нередко совершается ошибка - объявляется, что минимизируются не суммы квадратов отклонений, а суммы квадратов расстояний до прямой (пропорциональных, конечно, отклонениям, но коэффициент пропорциональности тут переменный - он зависит от прямой и потому такой вариант МНК дает другой результат).

ЛЕКЦИИ 15-16.

В этих лекциях материал излагается с учетом подготовки конкретных групп студентов. При их слабой математической подготовке рассказ должен быть более описательным, основанным только на простейших понятиях теории вероятностей. Но при необходимости изложения серьезных методов исследования случайных функций нужно опираться на спектральное разложение случайных функций, что требует уверенного владения основами теории рядов Фурье (или даже преобразования Фурье).

Понятие случайного процесса и случайной функции.

Вначале нужно, конечно, привести основные определения **и связать их с понятиями теории вероятностей.** В учебной и технической литературе в этот имеется значительный разнобой в терминологии, поэтому предлагается такой унифицированный подход.

Случайный процесс - это случайное событие, зависящее от времени (или от какого-либо другого параметра). Если время - дискретно, то говорят не о случайном процессе, а о временном ряде.

Случайная функция - это функциональная характеристика случайного процесса, т.е. некоторая функция (времени или другого параметра). Тем самым понятие случайной функции точно так же относится к понятию случайного процесса, как понятие случайной величины - к понятию случайного события.

Вводятся понятия реализации случайной функции и сечения случайной функции. Все эти понятия нужно немедленно иллюстрировать на примерах. Возможно, из них самый простой и наглядный для студентов – это изменение напряжения в электрической сети. Полезно привести и несколько других примеров, близких к специализации студентов или к реальной жизни.

Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайной функции.

Вначале дать определения функции распределения и плотности распределения случайной функции. Здесь во многом повторяются определения из теории случайных величин (добавляется только зависимость от времени). Но кроме функции распределения (точнее, одномерной функции распределения) случайной функции оказывается совершенно необходимым использовать и более сложные функции распределения – многомерные, которые описывают взаимоотношения различных сечений случайной функции. Нужно привести примеры (в виде графических набросков наборов реализаций) двух случайных функций – с хаотическим и с регулярным поведением – показывающие недостаточность одной только обычной функции распределения.

Далее, нужно дать по аналогии с теорией случайных величин определения математического ожидания случайной функции (в некоторых приложениях его называют трендом) и дисперсии. Обязательно рассмотреть конкретные примеры вычисления математического ожидания и дисперсии случайной функции в некоторых простейших случаях.

Взаимная корреляционная функция.

Ее еще называют ковариацией. Это - функция двух числовых переменных, двух значений времени. Она описывает взаимосвязь двух сечений для изучаемых случайных функций. На основе функции взаимной корреляции вводятся функция автокорреляции (описывающие взаимную зависимость двух сечений одной случайной функции) и их нормированных аналогов (аналогов коэффициента корреляции). Обратить внимание на сходства и различия с теорией случайных величин. Сформулировать свойства корреляционных функций. Обязательно рассмотреть простейшие примеры вычислений корреляционных функций.

Интегрирование и дифференцирование случайных функций.

Здесь нужно дать определения дифференцирования и указать, что предел (отношения приращения функции к приращению аргумента) тут понимается в новом, непривычном смысле. Предел тут можно брать по вероятности (вероятность отклонения от предельного значения - уменьшается) или по дисперсии. Затем обязательно нужно рассмотреть конкретные примеры. Свойства дифференцирования - аналогичны обычным свойствам производной из математического анализа. Далее нужно рассказать о некоторых теоретико-вероятностных характеристиках в связи с дифференцированием - о математическом ожидании производной случайной функции, о ее автокорреляционной функции (а вот выражение для дисперсии тут довольно непростое и его приводить необязательно).

Интеграл от случайной функции можно определять двумя способами - через предел интегральных сумм (тут тоже предел берется в теоретико-вероятностном смысле) или через первообразную по формуле Ньютона-Лейбница (второй подход более грубый, но он более простой, чем первый и он быстрее ведет к цели - к возможности решать задачи).

Для иллюстрации понятий дифференцирования и интегрирования случайных функций очень полезно ввести понятие стохастического дифференциального уравнения и на примере показать, как решаются такие уравнения (совершенно аналогично обычным дифференциальным уравнениям).

Стационарные случайные процессы и функции. Примеры.

Для начала нужно привести примеры вычисления автокорреляционной функции для гармонической случайной функции $U*\cos(at)+V\sin(at)$(при некоторых предположения относительно U,V) и убедиться, что тут функция автокорреляции зависит только от разности временных аргументов.

Далее дается определение стационарной случайной функции в узком смысле этого слова. Показывается, что математическое ожидание для такого случайной функции постоянно, а функция автокорреляции зависит только от разности аргументов. После этого можно переходить к определению стационарной случайной функции в широком смысле этого слова.

Приводятся примеры стационарных процессов в узком смысле («установившиеся» случайные процессы). Для выявления значения понятия стационарного процесса в широком смысле полезно рассказать хотя бы вкратце о спектральном разложении таких случайных функций.

В заключение - некоторые рекомендуемые автором пособия (в том числе и для студентов) учебники, имеющиеся в библиотеке МАТИ и в продаже:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.

Очень искусно написанная книга. Тут основные теоретические сложности обойдены так, что это почти незаметно. Однако некоторые разделы книги (связанные с вычислениями в математической статистике) безнадежно устарели.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.

Учебник содержит много полезной информации, но ее непросто выловить студенту, так как в книге имеется много второстепенных подробностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММА КУРСА (примерная)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЛЕКЦИЯ 1. Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Относительная частота и вероятность случайного события. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности. Основные формулы комбинаторики.

ЛЕКЦИЯ 2. Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Формула полной вероятности.

ЛЕКЦИЯ 3. Формула Байеса. Схема и формула Бернулли. Теоремы Пуассона и Лапласа.

ЛЕКЦИЯ 4. Случайные величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

ЛЕКЦИЯ 5. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Равномерное распределение вероятностей.

ЛЕКЦИЯ 6. Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Показательное распределение.

ЛЕКЦИЯ 7. Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, моменты. Их свойства и примеры. Правило трех сигм.

ЛЕКЦИЯ 8. Случайные векторы. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения двумерной случайной величины, их свойства. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область.

Числовые характеристики двумерных случайных величин: начальные и центральные моменты. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.

ЛЕКЦИЯ 9. Закон больших чисел. Теоремы Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема Ляпунова.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ЛЕКЦИЯ 10. Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд, статистический ряд. Выборочная функция распределения и гистограмма. Числовые характеристики статистического распределения: выборочное среднее, оценки дисперсии, начальных и центральных моментов.

ЛЕКЦИЯ 11. Основные свойства статистических оценок параметров распределения: несмещенность, состоятельность. Несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки математического ожидания. Смещенность выборочной дисперсии. Пример несмещенной оценки дисперсии.

ЛЕКЦИЯ 12. Интервальное оценивание неизвестных параметров. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Построение доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения. Доверительный интервал для вероятности.

ЛЕКЦИЯ 13. Статистическая проверка статистических гипотез. Общие принципы проверки гипотез. Понятия статистической гипотезы, ошибок первого и второго рода, статистического критерия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о значимости отличия от нуля коэффициента корреляции. Проверка гипотезы о виде распределения (критерий хи-квадрат).

ЛЕКЦИЯ 14. Корреляционный анализ и регрессионный анализ.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ЛЕКЦИИ 15-16. Понятие случайного процесса и случайной функции. Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайной функции. Взаимная корреляционная функция. Интегрирование и дифференцирование случайных функций. Стационарные случайные процессы. Примеры.