

**Федеральное агентство по образованию**

---

**Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«МАТИ» - Российский государственный технологический  
университет имени К.Э. Циолковского**

---

**Кафедра «Высшая математика»**

**В. В. Горбачевич**

**РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ  
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ  
И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ**

**Москва 2009**

## Введение

Это пособие предназначено, прежде всего, для преподавателей математики в ВУЗах. В нем приводятся некоторые рекомендации по методике проведения практических занятий по курсам теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. При этом предполагается, что читатель достаточно квалифицирован – в частности, что он знаком со стандартным материалом по указанным разделам (включая основные определения, примеры и доказательства). Именно в силу этого ограничения данное пособие не очень приспособлено для студентов, хотя оно все же может быть им полезно как дополнение к лекционному курсу и к практическим занятиям или же при самостоятельном изучении (в дополнение к стандартным учебникам) некоторых разделов указанных курсов.

Пособие написано на основании семестровой программы (см. Приложение), составленной автором для одного из лекционных потоков в МАТИ (в котором на этот курс отводится один семестр – 1 лекция в неделю и 1 практическое занятие в неделю). Для других вариантов программ можно использовать не все пособие целиком, а только те или иные его разделы, так как методические рекомендации для отдельных разделов программы в этом пособии связаны между собой не очень сильно.

Это пособие является естественным дополнением к опубликованному ранее автором методическому пособию

«РЕКОМЕНДАЦИИ К ЧТЕНИЮ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ». МАТИ-РГТУ, каф. «Высш. мат.», 2007.

Данное пособие рассчитано на преподавателей, работающих со студентами XXI-го века. Некоторые темы и примеры, которые содержатся в задачниках (в том числе и в хороших задачниках) нынешним студентам не очень понятны. Поэтому современным преподавателям нужно исключить из рассмотрения на занятиях «классические» задачи про «урны с шарами» (кто их видел, эти урны?), про перфокарты и т.п. Стрелки в мишень наводят на нехорошие мысли (о киллерах и т.п.). Современная тематика – это компьютеры, Интернет, мобильные телефоны, полезны и задачи технической направленности, связанные с предполагаемой будущей профессией студента.

При выборе задач автор ориентировался на задачник В.Е.Гмурмана и на опубликованное в МАТИ пособие Н.Д.Выск и Ю.В.Селиванова (сокращенно Гм и В-С, см. список литературы

ниже). Они содержат хорошие подборки задач, хотя там немало и устаревших тем, а при изучении некоторых вычислительных разделов приводящиеся там методики решения следует модифицировать, введя использование компьютерной программы Excel. Данное пособие можно рассматривать как некоторое дополнение к пособию В-С. В данном пособии не говорится о рекомендуемых задачах для домашних заданий, так как тут выбор задач должен быть согласован конкретно с теми задачами, которые преподаватель рассмотрел на практическом занятии со студентами.

В данном пособии неоднократно встречаются указания на использование широко распространенной компьютерной программы Excel (входящей в пакет Microsoft Office). Хотя она пока не входит в обязательный курс, для современных студентов эта программа (или ее аналоги) и ее использование представляют значительный интерес. Познакомиться подробнее со статистическими функциями в Excel можно по системе подсказок («Справка») самой этой программы, а также по пособию [4].

В тексте пособия названия отдельных тем практических занятий выделены курсивом, а сами методические указания набраны обычным прямым шрифтом.

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### ЗАНЯТИЕ 1.

#### *Алгебра случайных событий.*

Здесь очень важно научить студентов записывать составные события в виде комбинаций более простых событий (используя операции над событиями). Примеры задач приведены в В-С (в Гм. таких задач нет).

#### *Классическое определение вероятности.*

Тут нужно обязательно подчеркнуть, что «стандартное» общее определение вероятности как предела относительных частот неверно (на самом деле нужно говорить о группировке относительных частот). Далее, студенты должны научиться объяснять понятными словами, что именно означают выражения «вероятность равна  $\frac{1}{2}$ », «вероятность очень мала» и т.п. В Гм. дается очень неточное определение вероятности, там за вероятность в общем случае предлагается принять просто относительную частоту. В В-С общее определение вероятности не упоминается вообще.

Для классического определения вероятности нужно рассмотреть простые примеры (например, задачи Гм. 3,6,8 и т.п.), некоторые из которых полезно, немного переделав, соотнести с современной жизнью (Интернет, мобильные телефоны и т.п.) – это подогревает интерес студентов к изучаемому предмету.

*Простейшие свойства вероятности.*

Тут важно усвоить, что вероятность меняется между 0 и 1, но равенства вероятности нулю и единице вовсе не обязательно означают, что событие невозможно или достоверно (соответствующие примеры проще всего привести в разделе про геометрические вероятности).

*Элементы комбинаторики.*

Обязательно разобрать примеры на каждый вид простейших соединений элементов (перестановки, сочетания, размещения), подробно объясняя разницу между ними. Нужно рассмотреть применения принципа умножения при образовании сложных соединений (как комбинаций простейших соединений).

## ЗАНЯТИЕ 2.

*Геометрические вероятности.*

Полезно разобрать примеры, в которых используются пространства исходов разной размерности (1, 2 и 3), используя соответствующие меры (длина, площадь, объем).

*Теорема сложения вероятностей.*

Особенно важно усвоить следствие этой теоремы, позволяющее находить вероятность противоположного события. Оно часто существенно упрощает вычисление вероятностей. Обязательно проиллюстрировать эффективность такого подхода примером.

## ЗАНЯТИЕ 3.

*Условная вероятность.*

Тут важно показать, как именно, в какой форме в условиях той или иной задачи заданы условные вероятности (они вовсе не обязательно будут названы именно условными вероятностями, а будут описаны в совсем других терминах). Привести примеры

зависимых и независимых событий в связи с понятием условной вероятности.

*Теорема умножения вероятностей.*

Кроме обычных задач по этой теме очень наглядны и полезны задачи о многократном повторении события, например, о вероятности попадания в цель при стрельбе из большого числа винтовок – в В-С таких задач, к сожалению, нет (сходные задачи см. Гм. 84–88).

*Формула полной вероятности.*

Тут желательно разбирать простые по форме, но содержательные задачи (например, Гм. 96), а вот стандартные задачи про урны с шарами рассматривать не нужно. Лучше заменить их задачами производственной тематики.

#### ЗАНЯТИЕ 4.

*Формула Байеса.*

В отличие от авторов В-С, я советую приводить более близкие к реальной жизни задачи – например Гм. 1–5, 9–13 (исключив задачи про домино, кинескопы и т.п.). Особенно интересны задачи про студентов и экзамены (Гм. 9, 12), или о деталях вместо приевшихся костей домино, урн в шарах и т.п.

*Формулы Бернулли и Пуассона.*

Здесь нужно разобрать последовательно три задачи, из которых первая решается непосредственно по формуле Бернулли (например Гм. 111, 114, 115 и др.), вторая при применении этой формулы приводит к неудобным вычислениям и для ее решения лучше применять формулу Пуассона (задачи типа Гм. 176–180), а третьей должна быть совершенно необходима теорема Лапласа (задачи типа Гм. 121, 122). Объяснить студентам, с чем связана необходимость применения той или иной из трех указанных формул в конкретных случаях.

#### ЗАНЯТИЕ 5.

*Контрольная работа "Элементарная теория вероятностей".*

В этой контрольной работе нужно в первую очередь проверять умение студентов определять тип задачи (понимать, «про что» она) и выбирать адекватный метод решения.

## ЗАНЯТИЕ 6.

### *Закон распределения дискретных случайных величин.*

Тут полезно напомнить понятия дискретной и непрерывной случайных величин. При этом стоит пояснить смысл слова «дискретный» (современные студенты обычно не знают толком, что оно означает) – говоря об изменении значений величины скачками и т.п.

Нужно предложить студентам привести примеры случайных величин, встречаемых ими в обыденной жизни.

### *Функция распределения.*

Полезно построить для несложного закона распределения соответствующую функцию распределения и на примере показать, как для дискретных случайных величин по функции распределения можно восстановить закон распределения.

Разобрать задачи на вычисление вероятности попадания случайной величины в интервал, подчеркнул роль знаков строго и нестрогого неравенства в этой формуле справа и слева:  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$  (в В-С слева стоит строгое неравенство, что неверно, особенно это проявляется в дискретном случае).

### *Плотность распределения.*

Задачи, которые здесь разбираются, требуют умения легко вычислять несложные интегралы. Особенно полезны переходы от функции распределения к функции плотности и обратно (напр. Гм. 263 и 267), а также задачи на вычисление вероятности попадания случайной величины в интервал (тут нужно объяснить, почему для непрерывных случайных величин можно говорить не о полуинтервале, а об интервале или даже об отрезке).

## ЗАНЯТИЕ 7.

### *Равномерное и нормальное распределения.*

Решая задачи про эти распределения, нужно обязательно объяснить смысл этих распределений и причины, по которым многие случайные величины распределены именно по нормальному закону (т.е. сформулировать центральную предельную теорему – в упрощенной форме). Очень желательно рассматривать не абстрактные

задачи, а имеющие практическое значение – например такие, как Гм. 309–311 (равномерное распределение) и 318, 319 (нормальное). Функцию Лапласа полезно вычислять не только с помощью таблиц (приведенных, например, в Гм.), но и с помощью программы Excel и других математических пакетов. Вычисление этой функции (как и многих других функций математической статистики) реализовано также на карманных компьютерах и даже для многих типов мобильных телефонов.

## ЗАНЯТИЕ 8.

*Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.*

Разобрать примеры вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения (как в дискретном, так и в непрерывном случае). Дать понятие о вычислении более сложных характеристик – моментов высших порядков. К сожалению, и в Гм. и в В-С по этому разделу рассматриваются только абстрактные случайные величины. Рекомендуется привлечь дополнительные задачки для подбора более конкретных задач.

Полезно подробнее остановиться на смысле математического ожидания (отметив, что называть его «средним значением» случайной величины неточно) и дисперсии (указав на ее связь с точностью измерений). Не нужно без необходимости тратить много времени на вычисления высших моментов (выше второго порядка), если нет намерения использовать эти моменты в дальнейшем обучении.

Ни в коем случае не нужно тратить время на изучение специальных приемов проведения вычислений, которые подробно описаны в устаревших ныне учебниках (включая в целом хороший учебник В.Е.Гмурмана и множество подобных ему пособий).

## ЗАНЯТИЕ 9.

*Двумерные случайные величины.*

Нужно подчеркнуть, что речь обычно идет просто о совместном рассмотрении нескольких случайных величин, которые иногда удобно задавать в виде «случайных» координат некоторого вектора (иногда такая векторная интерпретация является очень информативной).

Разобрать примеры задания случайных векторов – как комбинации нескольких величин, имеющих дискретные или

непрерывные распределения. Полезно попросить студентов самих указать примеры случайных векторов из окружающей их жизни (можно даже ограничиться примерами, находящимися в пределах учебной аудитории). Желательно избегать чисто формально заданных функций распределения. В Гм. в задачах на эти темы имеется много примеров функций распределения, которые на самом деле не абстрактны, а вполне конкретны и связаны с реальными физическими и информационными процессами. Однако это там явно не указано, так это потребовало бы от студентов дополнительных знаний, не входящих в обязательную программу этого курса.

*Числовые характеристики случайных векторов.*

Особое внимание нужно уделить парам независимых случайных величин (как дискретных, так и непрерывных) и связям их характеристик с частными распределениями и их характеристиками. Решать нужно в основном задачи, где вычисления не требуют вычисления сложных интегралов (т.е. задачи для случаев независимых координат). Для двух зависимых координат можно отметить только двумерное нормальное распределение. Решать про него задачи – только в группах, где хорошо освоено вычисление двойных интегралов.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

### ЗАНЯТИЕ 10.

*Построение выборочной функции распределения и гистограммы.*

Выборочная функция распределения особенно наглядна для конкретных случайных величин (в Гм. таких задач, к сожалению, нет). В В-С предлагается некая абстрактная выборка из 150 значений, но будет лучше, если преподаватель придаст этим значениям какой-то смысл (например, полагая, что в В-С приведены данные о возрасте сотрудников некоторой фирмы и т.п.).

Полезно отметить, что гистограммы – причем разного вида – можно вычислить, используя широко распространенную программу Excel (Excel->Вставка->Гистограмма). Указать на отличие гистограмм от широко распространенных «бизнес-диаграмм» разного рода (которые тоже реализованы в Excel).

*Выдача КР 1.*



Рекомендуемая тема курсовой работы – линейная регрессия. При этом должны быть вычислены оценки для математического ожидания и дисперсии, а также для коэффициента корреляции. После этого на основании полученных результатов выписываются два уравнения линейной регрессии ( $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ ) и сравниваются между собой.

Сами **данные – пары значений двух случайных величин (не менее 10-12 пар)** – не должны быть просто рядами абстрактных чисел. Студентам полезнее всего найти исходные данные самостоятельно, причем в той сфере, которая именно им особенно интересна (спорт, Интернет, торговля, здоровье, музыка и др.).

Очень желательно, чтобы в курсовую работу входили в качестве обязательного элементы вычисления уравнения регрессии с помощью программы Excel.

#### ЗАНЯТИЕ 11. *Оценки неизвестных параметров.*

Обязательно показать на конкретном примере разницу между смещенной и несмещенной оценкой для дисперсии. Указать на возможность применения программы Excel для вычисления простейших оценок и на то, как именно эти оценки в этой программе реализованы (ДИСП, ДИСПР).

Не стоит рассматривать много примеров по сложным методам построения оценок – по методу максимального правдоподобия и по методу моментов. Построение хорошей оценки – это задача для специалистов, а пользователи должны не разрабатывать новые оценки, а в нужных ситуациях применять уже известные. Можно ограничиться одним иллюстративным примером (например, взять Задачу 1 из В-С, Занятие 12, но при этом упомянуть, что здесь фактически рассматривается очень важное в теории обслуживания показательное распределение). Понятия состоятельности и эффективности оценок можно упомянуть на лекции, но на практических занятиях рассмотрение этих понятий не очень уместно. Поэтому много времени задачам по вычислению оценок для математического ожидания и дисперсии уделять не стоит. Освободившееся время лучше потратить на рассказ о программе Excel и о других компьютерных программах и пакетах.

#### ЗАНЯТИЕ 12. *Доверительные интервалы.*

Нужно подробно пояснить тот факт, что доверительный интервал – это случайный интервал, который может содержать оцениваемый параметр только с некоторой (доверительной) вероятностью, а вовсе не всегда.

Не нужно рассматривать абстрактные задачи на построение доверительного интервала для «некоторой случайной величины» (типа Гм. 501, 502), а лучше рассматривать задачи с практическим наполнением (например, Гм. 503–505, 508 и др.). В Excel имеется функция ДОВЕРИТ, о которой полезно упомянуть, рассчитывая на естественный интерес современных студентов к компьютеру. Также с помощью компьютерных программ можно находить критические значения для распределений Стьюдента, Фишера и др., а не ограничиваться только краткими таблицами, прилагаемыми к задачникам.

#### ЗАНЯТИЕ 13, 14. *Применение критериев согласия.*

Тут нужно уделить особое внимание самой идее статистической проверки гипотез, обсудить возможность применения статистических методов к проверке гипотез из реальной жизни и производственной практики. Можно проанализировать, например, равномерность выпадения разных номеров в какой-то лотерее.

Основной изучаемый в курсе инструмент тут – критерий Пирсона. При этом можно для простых задач вычисления производить «вручную» (точнее, с использованием калькуляторов), а критические значения – находить не только из таблиц, как в 20-м веке, но и с помощью программ Excel, MathCad. Но еще лучше научить студентов использовать компьютерные программы в полную силу, а не учить производить их вычисления по старинке (через построение статистических рядов и т.п., как в Гм.).

Полезно рассмотреть несколько разных видов задач по применению критериев согласия (много таких задач приведено в Гм.). Выбор конкретных критериев и типов примеров полезно увязать со специализацией студентов.

#### ЗАНЯТИЕ 15.

*Корреляционный и регрессионный анализ.*

В Excel имеется пакет анализа (загружается дополнительно). В нем реализованы вычислительные процедуры регрессионного анализа.

При изучении регрессионного анализа стоит ограничиться простейшими вычислениями коэффициента корреляции и построением линейной регрессии. Не нужно следовать методикам проведения вычислений, описанным на этот счет в Гм. – они уже безнадежно устарели. Нужно указать на функции КОРРЕЛ, НАКЛОН и ОТРЕЗОК в Excel. Очень неплохо было бы освоить одну из простейших операций корреляционного анализа – исследования значимости отличия коэффициента корреляции от нуля. Полезно также проиллюстрировать на примерах различие двух уравнений регрессии –  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ .

## СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### ЗАНЯТИЕ 16.

*Примеры случайных функций. Вычисление характеристик случайных функций.*

Здесь нужно разобрать несколько задач, в которых задаются случайные функции на основе некоторых стандартных случайных величин (например, Гм. 756, 757, 759, 761). Желательно конкретизировать эти примеры, выбирая для фигурирующих в них случайных величин вполне конкретные распределения (например, для величины  $U$  из Гм. в указанных выше задачах) – равномерное, нормальное и др. Тут также полезно проиллюстрировать на примерах понятия реализации случайной функции и ее сечений. Для более интересных примеров следует обратиться к более специальным учебным пособиям. Например, много примеров случайных величин имеется в учебнике Е.С.Вентцель и Л.А.Овчарова (Глава 1).

Характеристики случайных величин – это, прежде всего, математическое ожидание и дисперсия. Примеры задач – Гм. 768–771. Кроме того, нужно обязательно разобрать задачу про корреляционную функцию (именно эта характеристика – основа содержательного изучения случайных функций). Примеры задач – Гм. 765, 767.

В качестве итоговых задач по данной теме – задачи типа Гм. 775, 776, 779. Они очень полезны для итогового усвоения теоретического материала.

Прием КР 1.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных функций и ее инженерные приложения. М. Наука, 1991.
2. Выск Н.Д., Селиванов Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к проведению практических занятий. М., МАТИ, 2005.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 2003 (и некоторые более ранние издания, но нумерация задач в совсем старых изданиях другая и задач там меньше).
4. Макарова Н.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel. М., Финансы и статистика, 2003.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММА КУРСА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ (примерная)

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЛЕКЦИЯ 1. Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Относительная частота и вероятность случайного события. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности. Основные формулы комбинаторики.

ЛЕКЦИЯ 2. Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Формула полной вероятности.

ЛЕКЦИЯ 3. Формула Байеса. Схема и формула Бернулли. Теоремы Пуассона и Лапласа.

ЛЕКЦИЯ 4. Случайные величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

ЛЕКЦИЯ 5. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Равномерное распределение вероятностей.

ЛЕКЦИЯ 6. Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Показательное распределение.

ЛЕКЦИЯ 7. Основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, моменты. Их свойства и примеры. Правило трех сигм.

ЛЕКЦИЯ 8. Случайные векторы. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения двумерной случайной величины, их свойства. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область. Числовые характеристики двумерных случайных величин: начальные и центральные моменты. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.

ЛЕКЦИЯ 9. Закон больших чисел. Теоремы Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема Ляпунова.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ЛЕКЦИЯ 10. Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд, статистический ряд. Выборочная функция распределения и гистограмма. Числовые характеристики статистического распределения: выборочное среднее, оценки дисперсии, начальных и центральных моментов.

ЛЕКЦИЯ 11. Основные свойства статистических оценок параметров распределения: несмещенность, состоятельность. Несмещенность и состоятельность выборочного среднего как оценки математического ожидания. Смещенность выборочной дисперсии. Пример несмещенной оценки дисперсии.

ЛЕКЦИЯ 12. Интервальное оценивание неизвестных параметров. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Построение доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения. Доверительный интервал для вероятности.

ЛЕКЦИЯ 13. Статистическая проверка статистических гипотез. Общие принципы проверки гипотез. Понятия статистической гипотезы, ошибок первого и второго рода, статистического критерия. Проверка гипотезы о значении параметров нормального

распределения. Проверка гипотезы о значимости отличия от нуля коэффициента корреляции. Проверка гипотезы о виде распределения (критерий хи-квадрат).

ЛЕКЦИЯ 14. Корреляционный анализ и регрессионный анализ.

#### СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ЛЕКЦИИ 15-16. Понятие случайного процесса и случайной функции. Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайной функции. Взаимная корреляционная функция. Интегрирование и дифференцирование случайных функций. Стационарные случайные процессы. Примеры.