

Министерство образования Российской Федерации
МАТИ – Российский Государственный Технологический Университет
им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

Неопределённый интеграл

Методические указания к курсовому проекту по теме
«Вычисление интегралов»

Составители: Р.П. Горелова.
Р.Д. Кулакова.

Москва 2002 г.

Введение

Домашнее задание по теме “Неопределенный интеграл” предназначено для студентов дневного и вечернего отделения. Для отыскания неопределенного интеграла используют таблицы основных интегралов и тождественных преобразований, непосредственное интегрирование, а так же применяют различные методы, которые приводят исходные интегралы к табличным.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X , если $F'(x)=f(x)$ для всех $x \in X$. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то $\Phi(x)=F(x)+c$, $c=\text{const}$. Совокупность всех первообразных $F(x)$ функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и, следовательно по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$ (1)

C – называется произвольной постоянной.

Методы вычисления неопределенного интеграла

1. Замена переменной

$$\int f(x)dx = \int f(y(t))y'(t)dt = \int g(t)dt \quad (2)$$

причем должна существовать $t=y(x)$

2. Формула интегрирования по частям

$$\int u(x)dV(x) = U(x)V(x) - \int V(x)dU(x) \quad (3)$$

где $U(x), V(x)$ – дифференцируемые функции

3. Интегрирование рациональных дробей

Для неправильной дроби

$\frac{Pm(x)}{Qn(x)}$, ($m \geq n$) следует выделить целую часть :

$$\frac{Pm(x)}{Qn(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{Rr(x)}{Qn(x)} \quad (4)$$

где $M_{m-n}(x)$ и $Rr(x)$ – многочлены степени $(m-n)$ и r , причем $r < n$.

Разложение правильной дроби $\frac{Pm(x)}{Qn(x)}$, ($m < n$) на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{Pm(x)}{Qn(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)} + \dots + \frac{B_1(x) + C_1}{(p^2 + px + q)^n} + \\ & + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)} \end{aligned} \quad (5)$$

Для вычисления коэффициентов A_i, B_i, C_i следует последнее равенство (5) привести к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомым коэффициентов. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения.

Простейшие дроби, а правой части (5) интегрируется следующим способом

$$a) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$b) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

$$e) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bt + (c - \frac{BP}{2})}{t^2+a^2} dt = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ + \frac{2C - BP}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q+p^2}} + C$$

где x^2+px+q не имеет действительных корней; $t = x + \frac{p}{2}$; $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

$$z) \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{Bt + (C - \frac{BP}{2})}{(t^2+a^2)^n} dt = -\frac{B}{2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \\ + (C - \frac{BP}{2}) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

$n \geq 2$ и интеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ считается по рекуррентной формуле:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-1}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$$

$$\text{где } I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

4. Интегрирование простейших иррациональных функций.

$$\int R(x, (\frac{a_x+b}{c_x+d})^{\frac{m1}{n1}}, (\frac{a_x+b}{c_x+d})^{\frac{m2}{n2}}, \dots) dx$$

где R-рациональная функция своих аргументов

$m1, n1, m2, n2, \dots$ целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{a_x+b}{c_x+d} = t^S$

где S-общий знаменатель дробей: $\frac{m1}{n1}; \frac{m2}{n2}$

5. Интегрирование простейших иррациональных функций.

Интегралы вида: $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Где R-рациональная функция, заменой $U = x + \frac{b}{2a}$ приводятся к одной из видов:

$$1) \int R(U, \sqrt{e^2 - U^2}) dU;$$

$$2) \int R(U, \sqrt{e^2 + U^2}) dU$$

$$3) \int R(U, \sqrt{U^2 - e^2}) dU$$

Последние интегралы соответствующей подстановкой:

$$1) U = A \sin t \quad \text{или} \quad U = A \tan t$$

$$2) U = A \tan t \quad \text{или} \quad U = A \sinh t$$

$$3) U = A \sec t \quad \text{или} \quad U = A \cosh t$$

Приводится к интегралам вида:

$$\int R(\sin t, \cos t) dt \quad \text{или} \quad \int R(\cosh t, \sinh t) dt,$$

которые в свою очередь решаются с использованием тригонометрической

$$\text{подстановки: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

б. Интегрирование тригонометрических выражений.

Интегралы вида: $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция, используется универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t;$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ то интеграл вычисляется с помощью подстановки $\cos x = t$;

Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечётная функция относительно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используется подстановка $\sin x = t$;

Если $R(\sin x, \cos x)$ - четная функция относительно $\sin x, \cos x$: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ то интеграл вычисляется с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t$;

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$,

Если n – нечётное положительное число, то $\sin x = t$;

Если m – нечётное положительное число, то $\cos x = t$;

Если m, n – чётные положительные числа, тогда используют формулы:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx, \int \operatorname{ctg}^m x dx$, m – целое положительное число, тогда

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$
 $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x dx$

n – целое положительное число, тогда $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
 $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$

Интегралы вида $\int \sec^{2n+1} x dx$
 $\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x dx$

Используются рекуррентные формулы :

$$\int \sec^{2n+1} x dx = \frac{1}{2n} \times \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \sec^{2n-1} x dx$$

$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x dx = -\frac{1}{2n} \times \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \operatorname{cosec}^{2n-1} x dx$$

$$\int \sin mx \cos nx dx$$

Интегралы вида $\int \cos mx \cos nx dx$

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

Варианты заданий могут быть использованы по желанию преподавателя в укороченном виде для контрольных работ на вечернем и дневном отделениях.

1 Вариант.

$$1. \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 5}$$

$$2. \int \frac{x^3 + 3}{x^3 + x^2} dx$$

$$3. \int \cos 4x \cos 5x dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x - 5}}$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$6. \int \frac{dx}{5\sin x - \cos x}$$

$$7. \int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$8. \int x^2 \ln x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt{x}}$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^5 x \times \sin^3 x}}$$

2 Вариант.

$$1. \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$2. \int \frac{e^{2x} dx}{9 - e^{2x}}$$

$$3. \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$4. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1 + x}}$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$$

$$6. \int x^3 \ln x dx$$

$$7. \int \frac{xdx}{x^3 - 8}$$

$$8. \int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\frac{1}{4} + x^2} dx$$

$$9. \int \sin 3x \cos 7x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{4 - 5\sin^2 x}$$

3 Вариант.

$$1. \int \frac{\arcsin 3x dx}{1 + 9x^2}$$

$$2. \int x \sin 2x dx$$

$$3. \int \frac{x - 1}{1 + x^3} dx$$

$$4. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+5} - \sqrt[3]{1+x}}$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$$

$$6. \int \frac{dx}{2 + 3\sin x + 4\cos x}$$

$$7. \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

$$8. \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} dx$$

$$9. \int \sin 3x \sin 4x dx$$

$$10. \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

5 Вариант.

4 Вариант.

$$1. \int \sin^3 x dx$$

$$2. \int \frac{xdx}{\sqrt{x-5}}$$

$$3. \int x^2 \cos x dx$$

$$4. \int \frac{xdx}{x\sqrt{4+x} + x^2}$$

$$5. \int \sqrt{25 - x^2} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{2 - \sin x}$$

$$7. \int \frac{\sqrt{2 + \ln x} dx}{x}$$

$$8. \int \sin 2x \cos 3x dx$$

$$9. \int \frac{1 - x^4}{x^3 + x^2} dx$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{1 - x^2}$$

6 Вариант.

1. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^7 x}$
2. $\int \frac{1-x}{x^4+x^2} dx$
3. $\int \cos 5x \cos 4x dx$
4. $\int \frac{dx}{7-3\cos^2 x}$
5. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$
6. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$
7. $\int e^{3x^2+5} x dx$
8. $\int \sqrt{4-9x^2} dx$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 1} dx}{x}$

7 Вариант.

1. $\int x \sin^2 x dx$
2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $\int \frac{2-x^3}{x^4+4x^2} dx$
4. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{18+6x-x^2}}$
5. $\int \frac{dx}{1-3\sin x}$
6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2}}$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$
8. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$
9. $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{1-x^2}}$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8 Вариант.

$$1. \int \frac{dx}{3 + 2\sin^2 x - 5\cos^2 x}$$

$$2. \int (x - 1)\cos x dx$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{9 + x^2}}$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^6 x dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x - 1} - \sqrt[3]{x - 1}}$$

$$6. \int \frac{(2x - 1)dx}{1 + x^3}$$

$$7. \int \frac{dx}{x(\ln 2x - 4)}$$

$$8. \int \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} dx$$

$$9. \int \cos 2x \sin 5x dx$$

$$10. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 + e^{2x}}}$$

9 Вариант.

$$1. \int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$2. \int x^3 e^{-x} dx$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{7 - x^3}$$

$$4. \int \frac{dx}{7 - 3\cos^2 x}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$$

$$6. \int \cos 3x \cos 7x dx$$

$$7. \int \frac{3x + 4}{\sqrt{4x - x^2}} dx$$

$$8. \int (\sqrt{x} + 1)\ln x dx$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$1. \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$2. \int \frac{xdx}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$3. \int \cos x \cos 4x \cos 7x dx$$

$$4. \int \ln^2 x dx$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{5 - 2x - x^2}}$$

$$7. \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1 - x^2}}$$

$$8. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{25 - e^{2x}}}$$

$$9. \int \frac{dx}{3 + 2\sin x - 5\cos x}$$

$$10. \int \frac{(1 - 3x)dx}{x^4 + x}$$

10 Вариант.

$$1. \int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{x^2 - x - 1}}$$

$$2. \int \cos^6 x dx$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2e^x}}$$

$$4. \int x^3 \operatorname{arctg} x dx$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$6. \int \sqrt{\cos x \sin 2x} dx$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x - 1} + 1}{\sqrt[3]{x - 1}} dx$$

$$8. \int \frac{1 - x^3}{x^3 + 1} dx$$

$$9. \int 2^{\frac{3x-1}{2}} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{7 + 2\cos x - \sin x}$$

11 Вариант.

$$1. \int \frac{dx}{5\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

$$2. \int \frac{x^3 - 2}{x^3 - 4x^2} dx$$

$$3. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 11}}$$

$$4. \int \frac{xdx}{\sin^4 x \cos^2 x}$$

$$5. \int \frac{dx}{x\sqrt{4+x+x^2}}$$

$$6. \int \frac{\sqrt{\ln x - 8} dx}{x}$$

$$7. \int x \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$8. \int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}} dx$$

$$9. \int \sqrt{3-x^2} dx$$

$$10. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}}$$

13 Вариант.

$$1. \int \frac{xdx}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 8}$$

$$3. \int \frac{dx}{4 - 5\cos x}$$

$$4. \int (\sqrt{x} + 1) \ln x dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$$

$$6. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$7. \int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

$$8. \int \sin 2x \sin 5x dx$$

$$9. \int x\sqrt{3+x} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

12 Вариант.

$$1. \int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$$

$$2. \int x^2 \ln x dx$$

$$3. \int \frac{x-5}{\sqrt{18-6x-x^2}} dx$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$$

$$5. \int \frac{dx}{3+2\sin x - 5\cos x}$$

$$6. \int \frac{\operatorname{arctg}^5 2x dx}{1+4x^2}$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^7 x \cos x}}$$

$$8. \int \sqrt{25-36x^2} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2+3x^2+2}$$

$$10. \int \cos^2 2x \sin^3 2x dx$$

14 Вариант.

$$1. \int \frac{xdx}{\sqrt{4-x-x^2}}$$

$$2. \int \frac{x^3+3}{x^3+x^2} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{1-3\sin x}$$

$$4. \int x^2 e^{-4x} dx$$

$$5. \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

$$7. \int \frac{x}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} dx$$

$$8. \int e^{3-5x} dx$$

$$9. \int \sin 3x \cos 15x dx$$

$$10. \int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{8x-x^2}}$$

15 Вариант.

$$1. \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^6 x}$$

$$2. \int \frac{x}{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt{x+2}} dx$$

$$3. \int x^2 \cos 2x dx$$

$$4. \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

$$5. \int \sqrt{50-x^2} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{7-4\sin x}$$

$$7. \int \frac{\ln^3 x + 3}{x} dx$$

$$8. \int \sin 4x \sin 9x dx$$

$$9. \int \frac{2x^4 - 1}{x^4 - x^3} dx$$

$$10. \int \frac{2^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

17 Вариант.

16 Вариант.

$$1. \int \frac{3x^4 - 1}{x^4 + x^2} dx$$

$$2. \int \sqrt{4-9x^2} dx$$

$$3. \int \frac{\cos x}{5 + \sin^2 x} dx$$

$$4. \int \ln^3 x dx$$

$$5. \int \frac{dx}{2 - 3\sin x - 4\cos x}$$

$$6. \int x^3 2^{-2x} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^4 3x}$$

$$8. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^{2x} + 1}} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg} x}}$$

18 Вариант.

$$1. \int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^4 + 9x^2} dx$$

$$2. \int \sin 5x \cos 9x dx$$

$$3. \int x \arctg x dx$$

$$4. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

$$5. \int tg^3 x dx$$

$$6. \int \frac{dx}{2 - 3\sin^2 x - 4\cos^2 x}$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x + 2\ln x + 1}}{x} dx$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x+1} - x^2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$9. \int \frac{(x+1)dx}{(x^2 + 2x + 10)^2}$$

$$10. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5}}$$

19 Вариант.

$$1. \int \frac{xdx}{2 + 5\sin x + 4\cos x}$$

$$2. \int \frac{x^2}{5x^6 + 9} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 2x \sin^5 2x}}$$

$$4. \int \frac{e^{\arctg 3x}}{1/9 + x^2} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2x^2 - 1}}$$

$$6. \int \frac{(1-x^3)dx}{x^3 - 3x^2 - 2x}$$

$$7. \int \frac{dx}{x \ln x \sqrt{1 - \ln x}}$$

$$8. \int \sqrt{9 - 25x^2} dx$$

$$9. \int \sin 3x \sin 4x \sin 5x dx$$

$$10. \int x^2 2^{\frac{x+1}{2}} dx$$

20 Вариант.

$$1. \int \frac{dx}{\cos^6 x}$$

$$2. \int x \sqrt{a+x} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x + 1}}$$

$$4. \int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$$

$$5. \int \frac{dx}{11 - 5 \sin x}$$

$$6. \int x \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

$$8. \int e^{3-7x} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

$$10. \int \frac{dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg} 3x}$$

21 Вариант.

$$1. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^8 x}$$

$$2. \int \frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$$

$$3. \int x^2 \cos 3x dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x - 4}}$$

$$5. \int \sqrt{16 - 3x^2} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin^2 x}$$

$$7. \int \frac{\sqrt{\ln x + 2}}{x} dx$$

$$8. \int \sin 10x \cos 4x dx$$

$$9. \int \frac{x+2}{x^4 - x^2} dx$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{5 - 3x^8}$$

$$1. \int \frac{dx}{x \sqrt{9 - 4x^2}}$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^6 3x}$$

$$3. \int \frac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2} dx$$

$$4. \int x^3 \ln(x+2) dx$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x+1} - x^2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{3 + 7 \cos x}$$

$$7. \int \frac{(x-4)dx}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$8. \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$$

$$9. \int e^x \sqrt{2 + e^x} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{(3x+1) \sqrt{x^2 - 1}}$$

22 Вариант.

$$1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x}}}$$

$$2. \int \frac{x^2}{x^6 + 9} dx$$

$$3. \int x^3 \operatorname{arctg} x dx$$

$$4. \int \sqrt{25 - 9x^2} dx$$

$$5. \int \frac{3^{\ln x + 2}}{x} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$$

$$7. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{3 - \cos^2 x}$$

$$9. \int \cos 2x \cos 7x dx$$

$$10. \int \frac{(x^2 + 2)dx}{4x^2 + x^4}$$

23 Вариант.

$$1. \int \frac{2^{\arctg x} dx}{1+x^2}$$

$$2. \int \frac{x^4 + x - 2}{x^4 + 4x^2} dx$$

$$3. \int \cos 3x \cos 4x dx$$

$$4. \int \frac{(1 - \ln^3 x) dx}{x}$$

$$5. \int \frac{dx}{2 - 7\sin^2 x}$$

$$6. \int \sqrt{3 - 2x^2} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$8. \int (x - 3) \sin 2x dx$$

$$9. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x+3}}$$

$$10. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$$

25 Вариант.

24 Вариант.

$$1. \int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^4 x}$$

$$2. \int \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$$

$$3. \int (x^2 + 2) \sin x dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x-x^2}}$$

$$5. \int \frac{\sqrt{25-9x^2} dx}{x}$$

$$6. \int \frac{dx}{3+8\sin x}$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{1-\ln x} dx}{x}$$

$$8. \int \cos 2x \sin 3x \cos 4x dx$$

$$9. \int \frac{(3-x) dx}{x^4 + x^2}$$

$$10. \int \frac{x^4 dx}{1-x^{10}}$$

26 Вариант.

$$1. \int \frac{xdx}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 8}$$

$$3. \int \frac{dx}{5\sin x + 2\cos x}$$

$$4. \int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^7 x}$$

$$5. \int \frac{dx}{e^x(3 - e^{-x})}$$

$$6. \int x^5 \ln x dx$$

$$7. \int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{4 - x^8}}$$

$$8. \int \frac{dx}{(1 + 25x^2)\arctg 5x}$$

$$9. \int x\sqrt{3 - x^2} dx$$

$$10. \int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x - x^2}}$$

27 Вариант

$$1. \int \frac{3x + 2}{\sqrt{8x - x^2}} dx$$

$$2. \int x^2 5^x dx$$

$$3. \int \frac{dx}{x \ln 5x}$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} - 2}$$

$$5. \int \frac{dx}{3 + 5\sin 2x}$$

$$6. \int \frac{1 - x^2}{x^3 - 4x^2} dx$$

$$7. \int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}$$

$$8. \int \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$$

$$10. \int \frac{\operatorname{ctg}^7 x}{\sin^2 x} dx$$

29 Вариант

$$1. \int \frac{dx}{3 - 4\sin^2 x + 7\cos^2 x}$$

$$2. \int \frac{3x^4 dx}{2x^{10} + 5}$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin^5 x}}$$

$$4. \int \frac{e^{\arctg 3x}}{1 + 9x^2} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 3}}$$

$$6. \int \frac{5 + x - x^3}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{x\sqrt{5 + \ln x}}$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} dx$$

$$9. \int \sin 5x \sin 8x dx$$

$$10. \int x^3 3^x dx$$

28 Вариант

$$1. \int \frac{(5x - 1)dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$$

$$2. \int \cos^4 3x dx$$

$$3. \int \frac{dx}{e^x + 4}$$

$$4. \int x \arctg 2x dx$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 + x^2}}$$

$$6. \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \sin 2x dx$$

$$7. \int \frac{2 + \sqrt{x + 2}}{\sqrt[3]{x + 2}} dx$$

$$8. \int \frac{3 - x^4}{x^4 + x^2} dx$$

$$9. \int 3^{\frac{2-x}{2}} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{3 + 7\sin x}$$

30 Вариант

$$1. \int \frac{1-x}{x^3+2x^2+x} dx$$

$$2. \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{x \ln 5x}$$

$$4. \int \frac{(\arctg^3 x + 2) dx}{x^2 + 1}$$

$$5. \int \frac{dx}{3 + 4 \sin x (\sin x + 2 \cos x)}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$$

$$7. \int \frac{(7x-1) dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$8. \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$$

$$10. \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$1. \int \frac{\operatorname{tg} x}{3 + 2 \cos^2 x} dx$$

$$2. \int \frac{2^{\arcsin x} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2+x}}$$

$$4. \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$6. \int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^4 + 9x^2} dx$$

$$7. \int \sin 3x \sin 10x dx$$

$$8. \int x \ln^2 x dx$$

$$9. \int \left(x + \frac{3}{2}\right) \sqrt{1-3x-x^2} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+4}}$$