Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«МАТИ» - Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к лабораторной и курсовой работам по курсам «Вычислительная математика» и «Информатика. Раздел «Численные методы» »

Составитель Гурьев Е.К.

Москва 2007

Данное руководство предназначено для студентов, изучающих численные методы в рамках курсов «Вычислительная математика» и «Информатика» и выполняющих лабораторные и курсовые работы. В методических указаниях рассмотрены постановка задачи численного решения нелинейных уравнений, основные этапы её решения, итерационные методы деления отрезка пополам, простой итерации, Ньютона, хорд, секущих, обратной квадратичной интерполяции. Для каждого из этих методов приводятся блок-схемы алгоритмов и их программная реализация на языке Паскаль на конкретных примерах. Кроме того, рассматривается применение графических и стандартных процедур интегрированного пакета Mathcad 11 для решения нелинейных уравнений. Дан пример выполнения и оформления курсовой работы по указанному разделу изучаемого курса. Приводятся варианты заданий для студентов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

6. Образец оформления курсового проекта по курсу «Вычислительная математика (Информатика)» по теме «Методы решения нелинейных уравнений» 68

Решение нелинейных уравнений

1. Постановка задачи. Основные этапы ее решения

Пусть задано нелинейное уравнение

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ – функция одной переменной x. Требуется найти корни (или решения) этого уравнения, то есть те значения $\bar{x}$, при подстановке которых уравнение обращается в тождество $f(\bar{x})=0$. Геометрически корень $\bar{x}$ уравнения (1) соответствует точке пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью OX (см. рис. 1).

Корень $\bar{x}$ уравнения (1) называется простым, если $f'(\bar{x})\neq 0$. График функции $y=f(x)$ пересекает в этом случае ось абсцисс в точке $x=\bar{x}$ под ненулевым углом (см. пример 1, рис. 1).

Корень $\bar{x}$ называется корнем кратности m, если $f^{(k)}(\bar{x})=0$ для $k=\overline{1,m-1}$ и $f^{(m)}(\bar{x})\neq 0$. График функции $y=f(x)$ пересекает в этом случае ось абсцисс в точке $x=\bar{x}$ под нулевым углом, т.е. касается в этой точке оси абсцисс.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим уравнение вида $x^3-2x-4=0$. Уравнение может быть представлено в виде $(x-2)(x^2+2x+2)=0$. Отсюда следует, что оно имеет единственный действительный корень $\bar{x}=2$. График функции $f(x)=x^3-2x-4$ приведен на рис. 1. Производная $f'(x)=3x^2-2$. Уравнение касательной к кривой

$y = x^3 - 2x + 4$ в точке $\bar{x} = 2$ записывается следующим образом $y1 = 10(x-2)$. В этом случае график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс в точке $\bar{x} = 2$ под ненулевым углом $a = arctg\,10$.

$y(x) := x^3 - 2 \cdot x - 4$ $y1(x) := 10 \cdot (x - 2)$

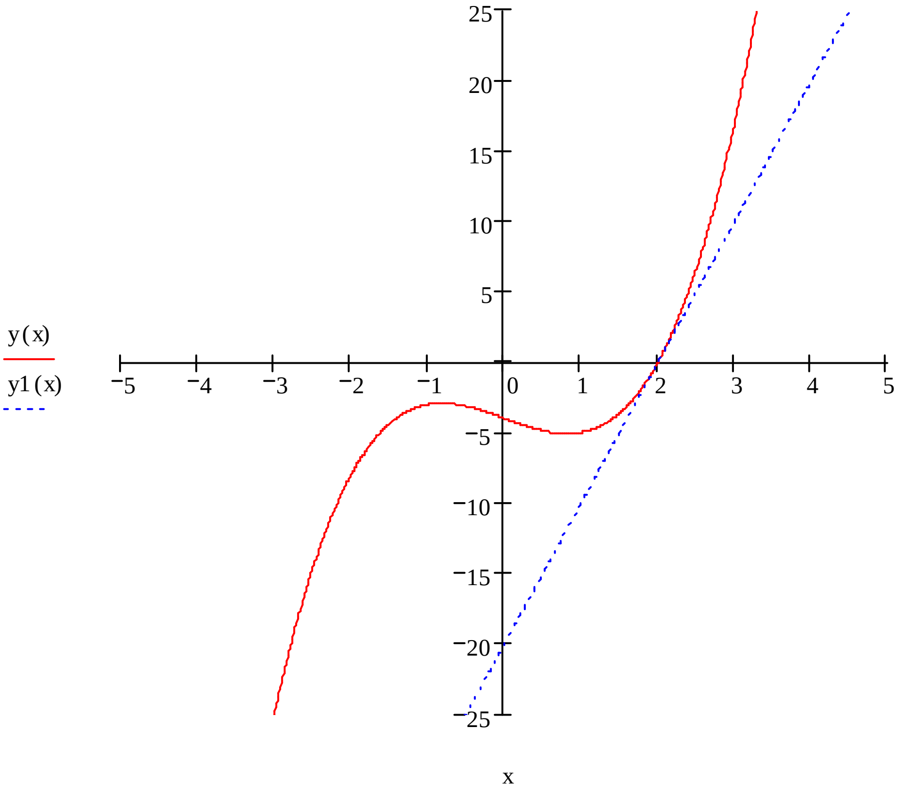


Рис. 1

2. Уточнение постановки задачи. Основные этапы решения.

Под задачей решения уравнения (1) будем понимать задачу вычисления корней этого уравнения с заданной точностью ε. Приближенное решение нелинейного уравнения осуществляется в два этапа:

1) отделение (локализация) корней;

2) итерационное уточнение корней.

2.1. Отделение корней

Отрезок $[a,b]$, содержащий только один корень $\bar{x}$ уравнения

(1), называют отрезком локализации корня $\bar{x}$. Можно указать некоторые типичные приемы отделения корней:

1) в некоторых задачах отрезок локализации известен из физических соображений (физической сущности задачи);

2) графический способ, когда уравнение (1) представляется в виде $f_1(x) = f_2(x)$, строятся графики функций $y = f_1(x)$, $\mathrm{y{=}f}_2(x)$ и отрезки, содержащие точки пересечения этих графиков, могут приниматься за отрезки локализации корней;

3) табличный способ, когда строится таблица значений функции $y = f(x)$ вида $x_i, y_i = f(x_i)$, $\mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{n}}$, а о наличии корня на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ судят по перемене знака функции на концах этого отрезка, опираясь на следующую теорему.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$: $f(x) \in C[a,b]$, и на его концах принимает значения разных знаков, то есть $f(a)f(b) < 0$, то отрезок $[a,b]$ содержит, по крайней мере, один корень уравнения (1).

Для отделения всех корней уравнения (1) отрезок $[a,b]$ разбивается на более мелкие отрезки, например, с равным шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$, где $n-$ заданное число мелких отрезков и на каждом из них проверяется условие $f(x_{i-1})f(x_i) \le 0$. Если это неравенство обращается в равенство, то это говорит о наличии корня на одном из концов отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Решению задачи отделения корней в этих условиях может способствовать использование следующей теоремы.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$: $f(x) \in C^1[a,b]$, ее производная сохраняет знак внутри $[a,b]$: $\mathrm{sign}\,(f'(x)) = \mathrm{const},\ x \in (a,b)$, функция $f(x)$ на концах отрезка принимает значения разных знаков $f(a)f(b)<0$, то на отрезке $[a,b]$ находится только один $\bar{x}$ корень уравнения (1).

Блок-схема алгоритма отделения корней приведена на рис.2. В алгоритме использован табличный способ отделения корней. Рассмотрим отделение корней на примере решения уравнения $2arctg\ \mathrm{x}\text{-}0.5\mathrm{x}^3=0$.

Программа otd на языке Pascal, реализующая этот алгоритм для уравнения, приведена ниже.

```
program otd;
uses crt;
const a=-10;
     b=10;
     h=0.7;
function f(x:real):real;
     begin
        f:=2*arctan(x)-0.5*x*x*x
      end;
var a1,b1:real;
     y1,y2:real;
begin
clrscr;
a1:=a;
y1:=f(a1);
while a1<=b do
    begin
    b1:=a1+h;
    y2:=f(b1);
```

```
    if y1*y2<=0 then writeln(' Корень находится на отрезке'
[',a1:4:6,',',b1:4:6,']');
    a1:=b1;
    y1:=y2;
  end;
readln
end.
```

Ответ:

Корень находится на отрезках [-1.60000,-0.900000],
[-0.200000,0.500000], [1.200000,1.900000]

2.2. Итерационное уточнение корней

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения $x^{(0)}$. Каждый такой шаг называется итерацией.

На этом этапе для вычисления каждого из корней с точностью $e > 0$ используется тот или иной итерационный метод, позволяющий построить последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ приближений к корню $\bar{x}$. Если последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ сходится к корню $\bar{x}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \bar{x}$, то итерационный метод называется сходящимся.

Введем несколько определений.

Итерационный метод называется <u>одношаговым</u>, если для вычисления очередного приближения $x^{(n+1)}$ используется одно предыдущее приближение $x^{(n)}$. Итерационный метод называется k-<u>шаговым</u>, если для вычисления $x^{(n+1)}$ используется k предыдущих приближений $x^{(n-k+1)}, x^{(n-k+2)}, \ldots, x^{(n)}$.

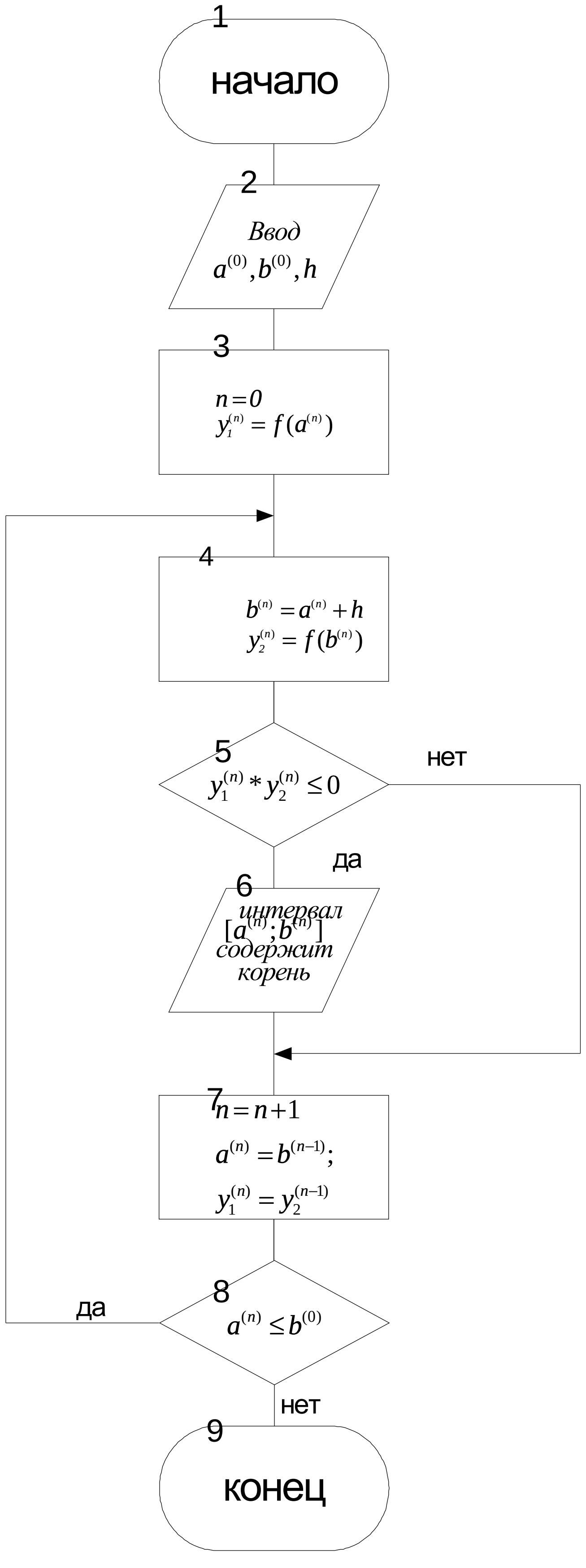


Рис. 2. Блок-схема алгоритма отделения корней

Для построения итерационной последовательности одношаговым методом требуется знание только одного начального приближения $x^{(0)}$, а при построении k-шаговым методом – k начальных приближений $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k-1)}$.

Одной из важнейших характеристик итерационных методов является скорость сходимости. Говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$, если для всех n имеет место оценка

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| < C_0 q^n, \tag{2}$$

где C_0 – некоторая постоянная величина.

Отсюда следует сходимость метода, так как при $n \to \infty$ имеем $\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \to 0$.

Если для одношагового итерационного метода существует такая s-окрестность корня $\bar{x}$, что имеет место оценка

$$\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| \le C_1 \left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^p, \tag{3}$$

где $C_1 > 0, p \ge 1$ – постоянные (приближение $x^{(n)}$ принадлежит s-окрестности), то число p называется порядком сходимости.

Говорят, что метод обладает линейной скоростью сходимости в указанной s-окрестности, если $p=1, C_1 > 0$. Говорят о сверхлинейной скорости сходимости, если $p>1$. В частности, если $p=2$, имеем квадратичную скорость сходимости, а если $p=3$ – кубическую.

Сформулируем лемму, которая позволяет свести исследование сходимости итерационных методов к получению оценки (3).

Лемма 1. Если одношаговый итерационный метод обладает линейной скоростью сходимости в некоторой s-окрестности корня $\bar{x}$, то при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$ из этой s-окрестности итерационная последовательность $x^{(n)}$ не выходит за пределы этой s-окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = C_1$ и справедлива оценка погрешности

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le q^n \left|x^{(0)} - \bar{x}\right|, n \ge 0. \qquad (4)$$

Аналогично определяется скорость сходимости многошаговых методов. Сравнение различных итерационных методов следует проводить по числу вычислительных операций при реализации одной итерации и по скорости сходимости. При прочих равных условиях тот метод уточнения корней будет более эффективен, в котором результат с той же самой погрешностью найден за меньшее число раз вычисления функции $f(x)$.

2.2.1. Метод деления отрезка пополам.

Пусть требуется найти с заданной точностью $e > 0$ корень $\bar{x}$ уравнения (1). Будем считать, что корень отделен, т.е. известен отрезок локализации $[a,b]$, содержащий только один корень $\bar{x}$. Кроме того, здесь и всюду в дальнейшем полагаем, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$: $\mathrm{f(x)} \in C[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, что означает выполнение соотношения

$$f(a)\,f(b) < 0. \qquad (5)$$

Пусть для определенности, как показано на рис. 3, $f(a) < 0, f(b) > 0$. Обозначим $[a,b] = [a^{(0)}, b^{(0)}]$. Примем за приближенное значение корня середину отрезка $x^{(0)} = \dfrac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$.

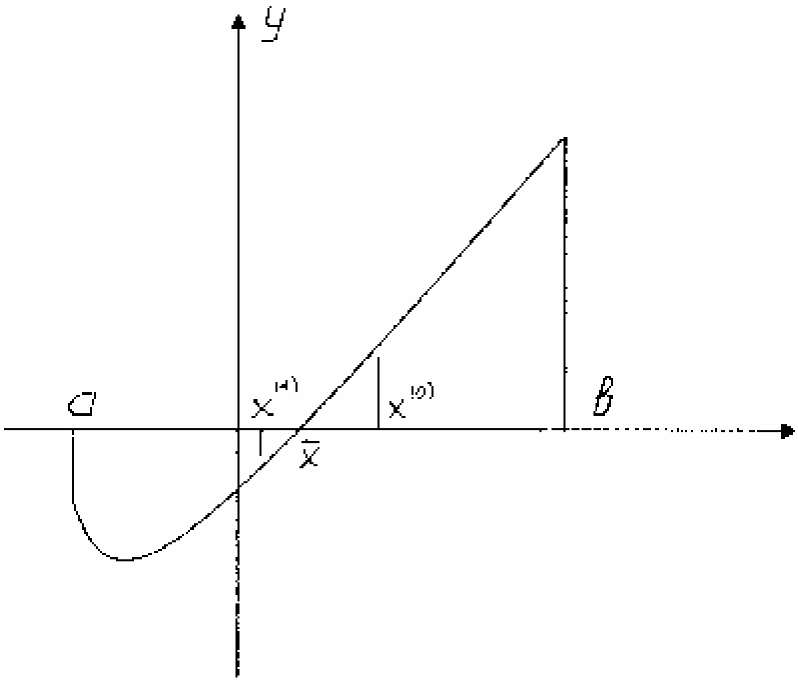


Рис. 3. Геометрическая иллюстрация метода деления отрезка пополам

Положение корня $\bar{x}$ на $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ неизвестно и можно утверждать, что погрешность приближения не превышает половины длины отрезка: $\left|x^{(0)} - \bar{x}\right| \le \dfrac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2}$.

Уточним отрезок локализации, заменяя начальный отрезок $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ отрезком $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ вдвое меньшей длины. Согласно методу деления отрезка пополам (дихотомии, бисекции и т.п.) выбирается тот из отрезков $[a^{(0)}, x^{(0)}]$, $[x^{(0)}, b^{(0)}]$, на концах которого выполняется условие $f(a^{(1)})f(b^{(1)}) \le 0$. Этот отрезок содержит искомый корень. Если $f(a^{(1)})f(b^{(1)}) < 0$, то наличие корня $\bar{x}$ следует из теоремы 1. Если $f(a^{(1)})f(b^{(1)}) = 0$, то корнем является один из концов отрезка.

Середина этого отрезка $x^{(1)} = \dfrac{a^{(1)} + b^{(1)}}{2}$ дает следующее приближение к корню, оценка погрешности которого составляет $\left|x^{(1)} - \bar{x}\right| \le \dfrac{b^{(1)} - a^{(1)}}{2} = \dfrac{b-a}{2^2}$.

За следующее уточнение отрезка локализации $[a^{(2)}, b^{(2)}]$ берут один из отрезков $[a^{(1)}, x^{(1)}]$, $[x^{(1)}, b^{(1)}]$, на концах которого выполняется условие $f(a^{(2)}) f(b^{(2)}) \le 0$.

Очередная (n+1)-я итерация метода. Пусть уже найден отрезок $[a^{(n)}, b^{(n)}]$ и вычислены значения $x^{(n)}$, $f(a^{(n)})$, $f(b^{(n)})$.

Производятся следующие действия:

1) вычисляется $f(x^{(n)})$;

2) если $f(a^{(n)}) f(b^{(n)}) \le 0$, то в качестве отрезка локализации $[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}]$ принимается отрезок $[a^{(n)}, x^{(n)}]$. В противном случае - $f(a^{(n)}) f(b^{(n)}) \ge 0$ и за отрезок $[a^{(n+1)}, b^{(n+1)}]$ принимается $[x^{(n)}, b^{(n)}]$;

3) вычисляется $x^{(n+1)} = \dfrac{a^{(n+1)} + b^{(n+1)}}{2}$.

Середина отрезка $[a^{(n)}, b^{(n)}]$ $x^{(n)} = \dfrac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}$ дает приближение к корню $\bar{x}$ с оценкой погрешности

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le \frac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что метод деления отрезка пополам сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = \dfrac{1}{2}$.

Итерации нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$b^{(n)} - a^{(n)} < 2e\ . \qquad (7)$$

Тогда в силу (6) можно принять $x^{(n)}$ за приближение к корню с точностью e.

Используя соотношение (6) в виде $b^{(n)} - a^{(n)} = \dfrac{b-a}{2^n}$ и условие окончания итерационного процесса $b^{(n)} - a^{(n)} < 2e$, получим оценку количества итераций n, требуемого для достижения заданной точности, которая определяется из неравенства

$$n > \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon} \qquad (8)$$

и зависит лишь от длины отрезка локализации $[a,b]$ и требуемой точности нахождения корня e. В качестве требуемого числа итераций k возьмем наименьшее из натуральных чисел n, удовлетворяющих условию (8),

$$k = \left[\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}\right] + 1, \qquad (9)$$

где $[x]$ - целая часть числа x.

В качестве условия окончания итерационного процесса, альтернативного условию (7), можно использовать условие

$$\left|f(x^{(n)})\right| < \varepsilon_1, \qquad (10)$$

которое имеет смысл невязки, полученной на n-ой итерации.

Метод деления отрезка пополам всегда сходится, прост и предъявляет к функции $f(x)$ минимальные требования: для его применения достаточно непрерывности функции $f(x)$, выполнения неравенства (5) и верного определения знака $f(x)$. Его недостатком является медленная сходимость по сравнению с другими методами. Этот метод очень надежен. Он гарантирует точность приближения, примерно равную радиусу интервала неопределенности $\bar{\varepsilon}$, устойчив к ошибкам округления.

Блок-схема алгоритма метода деления отрезка пополам приведена на рис. 4.

Далее приводится программа dichot на языке Pascal, реализующая этот алгоритм. В качестве критерия окончания итераций используется $\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| < \varepsilon$.

Вычисление абсциссы середины отрезка, содержащего корень, по формуле $x = a^{(1)} + (b^{(1)} - a^{(1)})/2$ позволяет избегать выхода средней точки за пределы отрезка $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ при округлении по дополнению в последнем разряде.

Критерии (7) и (10) окончания итерационного процесса полностью эквивалентны, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке локализации и $\bar{x}$ является простым корнем уравнения (1).

Работа алгоритма метода деления отрезка пополам показана на примере уравнения $2arctg\ \mathrm{x}\text{-}0.5\mathrm{x}^3 = 0$. Выбираем $e = 0.00001$. Программа dichot, реализующая рассмотренный алгоритм метода деления отрезка пополам, приведена ниже.

```
program dichot;
uses crt;
const a=-1.6;
      b=-0.9;
     eps=0.00001;
function f(x:real):real;
        begin
        f:=2*arctan(x)-0.5*x*x*x
       end;
```

```
var x,a1,b1:real;
    y1,y2,y:real;
begin
clrscr;
a1:=a;
b1:=b;
y1:=f(a1);
y2:=f(b1);
x:=a1+(b1-a1)/2;
while abs(b1-a1)>eps do
 begin
 x:=a1+(b1-a1)/2;
 y:=f(x);
 If y1*y<0 then b1:=x
               else if y=0 then
                                begin
                                      a1:=x;
                                      b1:=x
                                end
                           else a1:=x;
 end;
writeln (' корень уравнения x=',x:2:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке [–1.600000,-0.900000] корень уравнения $\bar{x} = =-1.592757$;

на отрезке [-0.200000,0.500000] корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;

на отрезке [1.200000,1.900000] корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

2.2.2. Метод сканирования

В методе сканирования используется табличный способ отделения корней. Отрезок локализации $[a,b]$ делится на малые отрезки длиной, равной заданной погрешности нахождения корня e, на концах этих отрезков вычисляются значения функции $f(x)$. На каждом из этих отрезков проверяется условие (5) и в случае его выполнения выбирается отрезок, где функция меняет знак (или точно равна нулю). В качестве решения можно взять любую точку выделенного отрезка $[x^{(i)}, x^{(i+1)}]$: левую $x^{(i)}$ или правую $x^{(i+1)}$ границу этого отрезка или середину отрезка $x* = \dfrac{x^{(i)} + x^{(i+1)}}{2}$, что гораздо лучше.

В любом из этих случаев погрешность решения не будет превышать заданную величину ε, даже если точное значение решения неизвестно.

Часто весь отрезок разбивается на маленькие отрезки длиной $2e$. За приближение к искомому корню берется середина того отрезка, где функция $f(x)$ меняет знак. Эта разница не принципиальна, так как результаты поиска полностью совпадают по значению корня и по затратам на его поиск, если в первом варианте сразу взять погрешность вдвое больше необходимой.

С целью повышения эффективности метода уточнение корня проводится в несколько этапов:

1) сначала задается большое значение e, находится отрезок, где функция меняет знак (грубое нахождение корня);

2) найденный отрезок делится на части с более мелким шагом и корень находится более точно и т.д.

Действия п.2 повторяются несколько раз, после чего находится корень с заданной точностью в целом за меньшее число раз вычисления функции $f(x)$.

Блок-схема алгоритма метода сканирования приведена на рис. 2.

2.2.3. Метод простой итерации

2.2.3.1. Описание метода

Использование метода простой итерации для решения уравнения (1) связано с преобразованием его к равносильному уравнению вида

$$x = j(x). \qquad (12)$$

Такое преобразование называется приведением уравнения к виду, удобному для итерации, и может быть выполнено различными способами. Функция $j(x)$ называется итерационной функцией.

Выбирая начальное приближение к корню $x^{(0)}$ и подставляя его в правую часть (12), получим $x^{(1)} = j(x^{(0)})$. Подставив $x^{(1)}$ в правую часть (12), получим $x^{(2)} = j(x^{(1)})$. Продолжая неограниченно этот процесс, получим последовательность приближений к корню, вычисляемую по формуле

$$x^{(n+1)} = j(x^{(n)}), n > 0. \qquad (13)$$

Метод простой итерации является одношаговым. Если существует предел этой последовательности $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} j(x^{(n)})$ то, переходя к пределу в равенстве (13) и полагая функцию $j(x)$ непрерывной, получим равенство

$$\bar{x} = j(\bar{x}), \qquad (14)$$

которое означает, что $\bar{x}$ - корень уравнения (12).

2.2.3.2. Геометрическая интерпретация

Геометрическая интерпретация метода простой итерации приведена на рис. 5. Построим графики функций $y = x$ и $y = j(x)$. Корень $\bar{x}$ уравнения (12) является абсциссой точки пересечения графиков этих функций. Возьмем некоторое начальное приближение $x^{(0)}$. Ему соответствует точка $M_0(x^{(0)}, y^{(0)})$ на кривой $y = j(x)$, координаты которой связаны соотношением $x^{(1)} = j(x^{(0)})$. Соединим M_0 отрезком прямой $y = x^{(1)}$ с точкой $N_1(x^{(1)}, y^{(1)})$, лежащей на прямой $y = x$. Проведем через точку $N_1(x^{(1)}, y^{(1)})$ вертикальную прямую $x = x^{(1)}$ до пересечения с кривой $y = j(x)$ в точке $M_1(x^{(1)}, x^{(2)})$. Продолжая этот процесс, получим ломаную линию $M_0 N_1 M_1 N_2 M_2 \ldots$, для которой абсциссы точек M_n представляют собой последовательные приближения $x^{(n)}$ к решению $\bar{x}$.

2.2.3.3. Сходимость метода простой итерации

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема 3. Если в некоторой s- окрестности корня $\bar{x}$ уравнения (1) функция $y = j(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенству $|j'(x)| \le q$, где $0 \le q < 1$ - постоянная, то независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$ из указанной s-окрестности итерационная последовательность $x^{(n)}$ не выходит из этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q и справедлива следующая оценка погрешности

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le q^n \left|x^{(0)} - \bar{x}\right|, n \ge 0. \qquad (15)$$

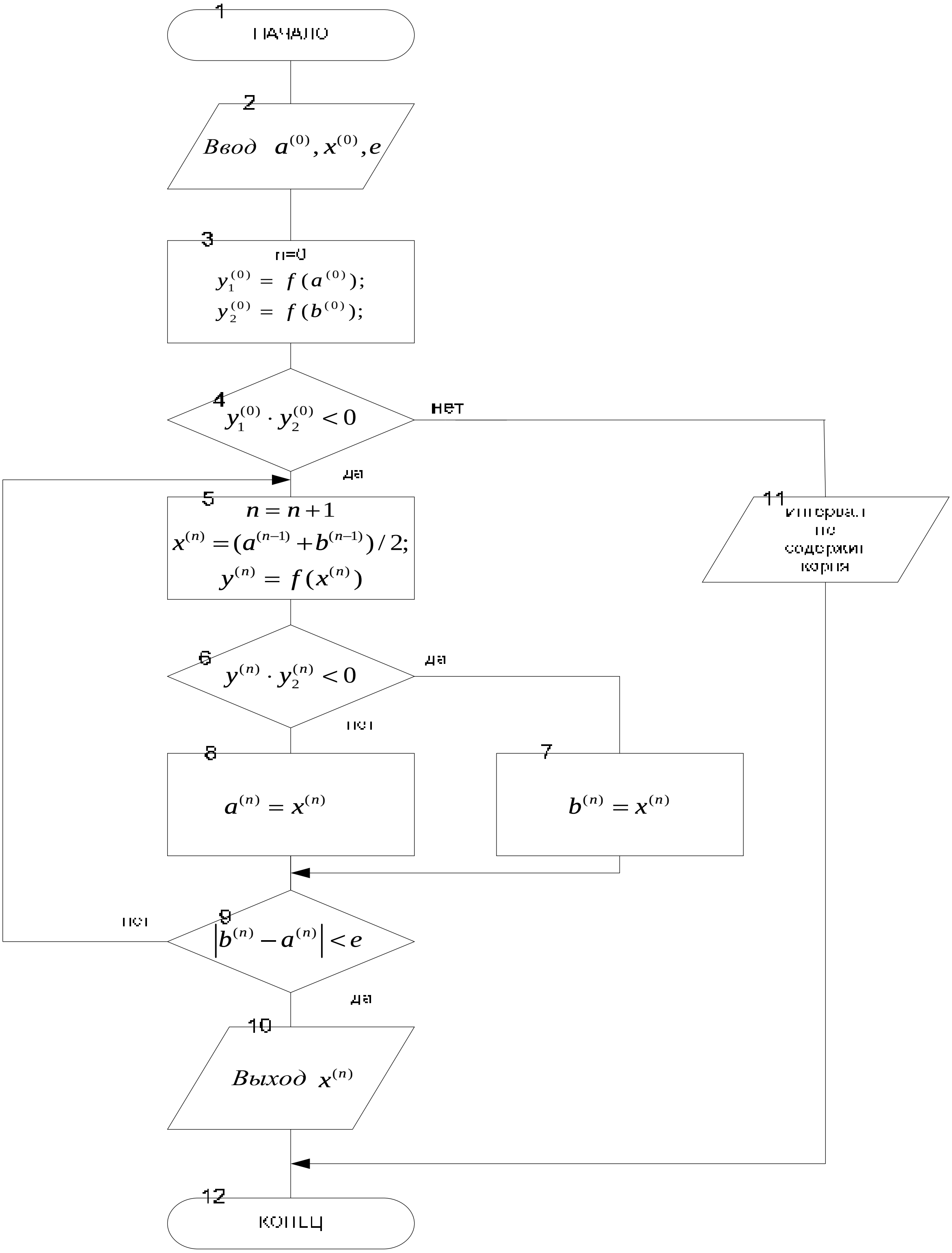


Рис.4.Блок-схема алгоритма метода деления отрезка пополам

Соотношение (15) не используется для практической оценки погрешности, так как значение $\bar{x}$, входящее в правую часть оценки, неизвестно. Кроме того, соотношение (15) приводит к завышенной оценке погрешности.

Условие сходимости метода простой итерации $|j'(x)| < 1$ является только достаточным. Его выполнение гарантирует сходимость итерационного процесса (13), при этом все приближения должны

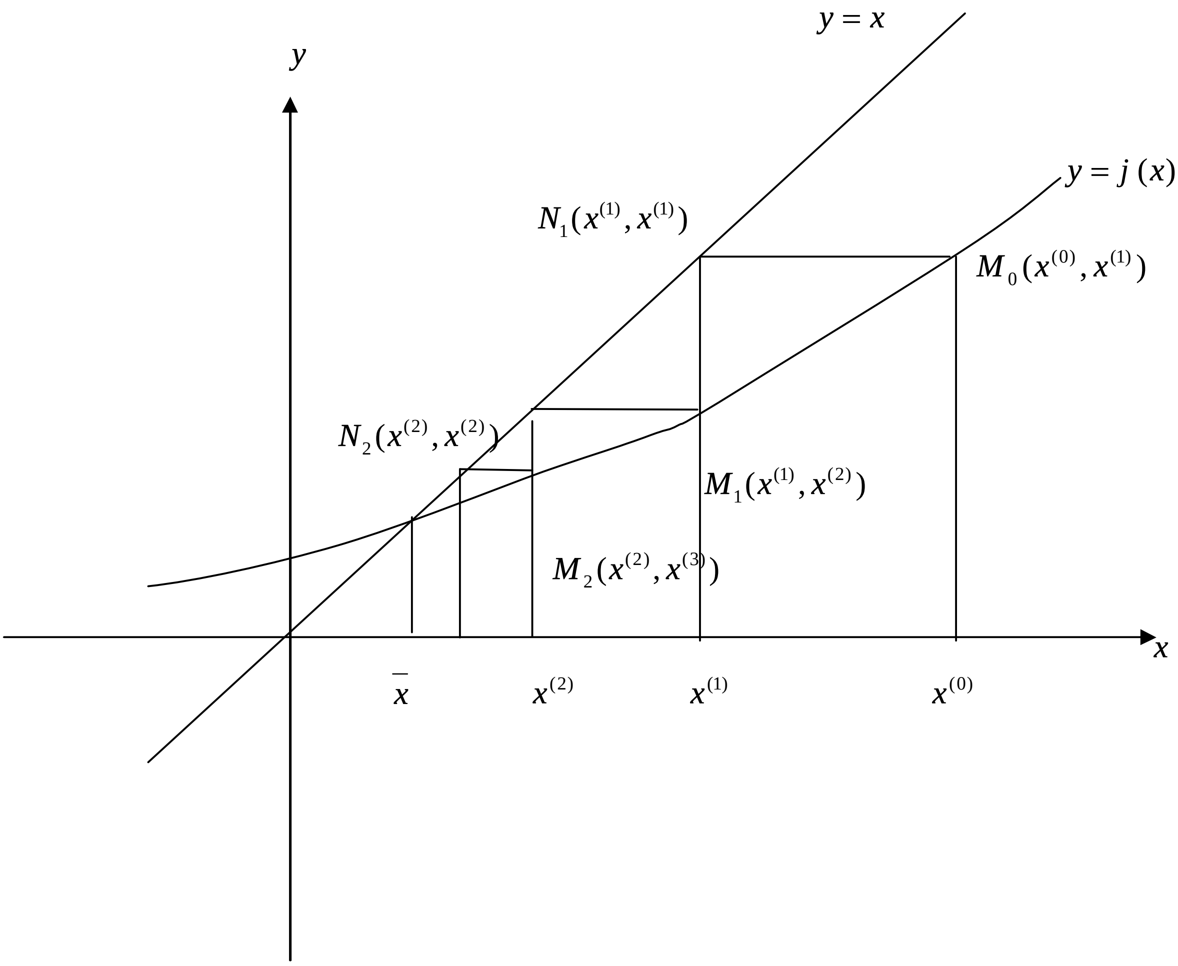


Рис. 5. Геометрическая интерпретация метода простой итерации.

попадать в отрезок локализации корня. Невыполнение условия $|j'(x)|<1$ в общем случае не означает, что итерационный процесс расходится.

2.2.3.4. Апостериорная оценка погрешности

Апостериорная оценка погрешности, пригодная для практического применения, строится на основе теоремы 4.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $x^{(0)} \in (\bar{x}-s, \bar{x}+s)$. Тогда верна следующая апостериорная оценка погрешности

$$\left|x^{(n)}-\bar{x}\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right|, n \ge 1. \qquad (16)$$

Согласно теореме 4 вычисления следует вести до выполнения неравенства

$$\frac{q}{1-q}\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right| < e$$

или равносильного ему неравенства

$$\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right| < \frac{1-q}{q}e. \qquad (17)$$

Если это условие выполняется, то можно считать, что $x^{(n)}$ является приближением к корню с точностью e.

Замечание. В практике вычислений вместо (17) часто используется критерий вида

$$\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right| < e. \qquad (18)$$

При $0<q\le\frac{1}{2}$ использование критерия (18) оправдано, так как $\frac{q-1}{q}\ge 1$ и выполнение неравенства (17) влечет выполнение

неравенства (18). При $\frac{1}{2} < q < 1$ использование критерия (18) может привести к преждевременному окончанию итераций. При определенных условиях можно использовать следующий практический критерий окончания итерационного процесса

$$\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| \le \left|\frac{1 - j'(\tilde{x}^{(n)})}{j'(\tilde{x}^{(n)})}\right| e ,$$

где $\tilde{x}^{(n)} \in (x^{(n-2)}, x^{(n-1)})$.

2.2.3.5. Алгоритм метода простой итерации

1. Ввод концов отрезка локализации корней $[a,b]$, начального приближения $x^{(0)}$ и требуемой точности решения e.

2. Вычисление текущего приближения по формуле $x^{(n+1)} = j\,(x^{(n)})$.

3. Проверка условия окончания итераций $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < e$. Если оно выполняется, итерационный процесс заканчивается и полученное решение выводится на экран дисплея. В противном случае итерационный процесс продолжается и осуществляется переход к п.2 настоящего алгоритма.

В большинстве случаев в качестве начального приближения выбирается один из концов отрезка локализации корня $[a,b]$.

Блок – схема алгоритма метода простой итерации приведена на рис. 6.

Программа iteratio, реализующая алгоритм метода простой итерации, для уравнения $2arctg\ \mathrm{x}\text{-}0.5\mathrm{x}^3 = 0$ приведена ниже.

```
program iteratio;
uses crt;
function f(x:real):real;
```

```
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp:real;
begin
clrscr;
x:=a;
repeat
xp:=x;
x:=xp+0.0769*f(xp);
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('корень уравнения x=',x:4:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке [-1.600000,-0.900000] корень уравнения $\bar{x} = -1.592757$ при $a = 0.0769$;

на отрезке [-0.200000,0.500000] корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$ при $a = -0.0769$;

на отрезке [1.200000,1.900000] корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$ при $a = 0.0769$.

2.2.3.6. Выводы и рекомендации

Достоинствами методами простой итерации являются его простота, общность и самоисправляемость, т.е. его способность компенсировать ошибки, возникающие в результате вычислений или сбоев ЭВМ. Ошибка вычислений эквивалентна некоторому ухудшению очередного приближения, что приводит к росту числа итераций, но не влияет на точность результата. Недостатком этого метода является его сходимость в малой окрестности корня и вытекающая отсюда необходимость выбора начального приближения к корню из этой малой окрестности. В противном случае итерационный процесс расходится или сходится к другому корню этого уравнения.

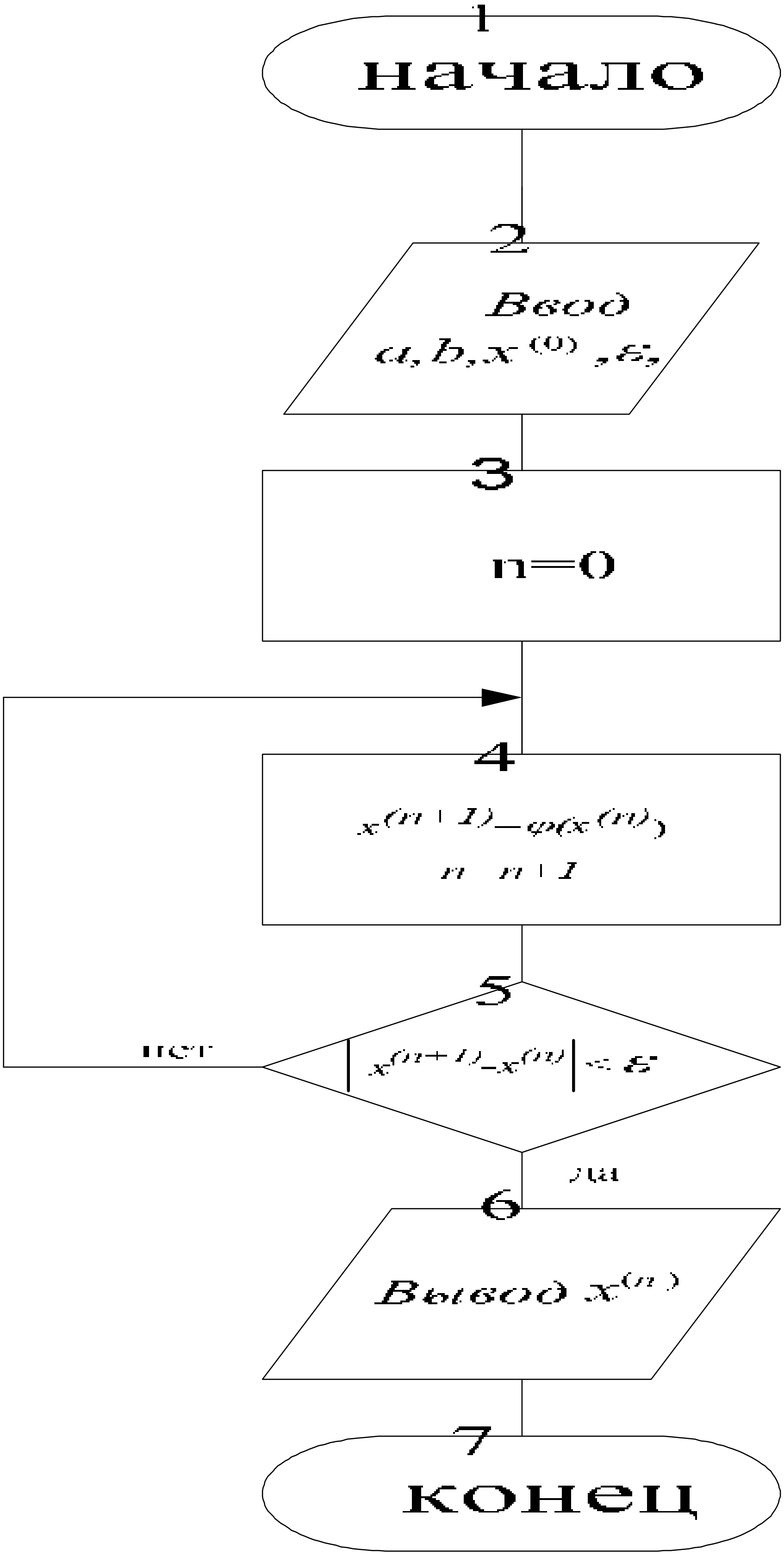


Рис.6 . Блок-схема алгоритма метода простой итерации

2.2.4. Метод Ньютона

Метод Ньютона является одним из самых эффективных методов решения нелинейных задач. Расчетная формула может быть получена с помощью различных подходов.

2.2.4.1. Геометрическая интерпретация.

Выведем расчетную формулу метода Ньютона для решения уравнения (1) из простых геометрических соображений. Рассмотрим геометрическую интерпретацию, приведенную на рис. 7. Пусть $x^{(0)}$ – заданное начальное приближение к корню $\bar{x}$. В точке $M_0(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$, имеющую уравнение $y = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)})$, и за новое приближение к корню $x^{(1)}$ примем абсциссу точки пересечения касательной с осью OX, т.е. $f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$. При условии $f'(x^{(0)}) \neq 0$ отсюда получим

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}.$$

В точке $M_1(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$, которая пересекает ось OX в точке $x^{(2)}$, абсцисса которой находится из соотношения

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}$$

при условии $f'(x^{(0)}) \neq 0$. Продолжая этот процесс аналогично, получим последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ приближений к корню $\bar{x}$. В итоге получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, n \geq 0. \tag{19}$$

В силу изложенной здесь геометрической интерпретации этот метод называется методом касательных.

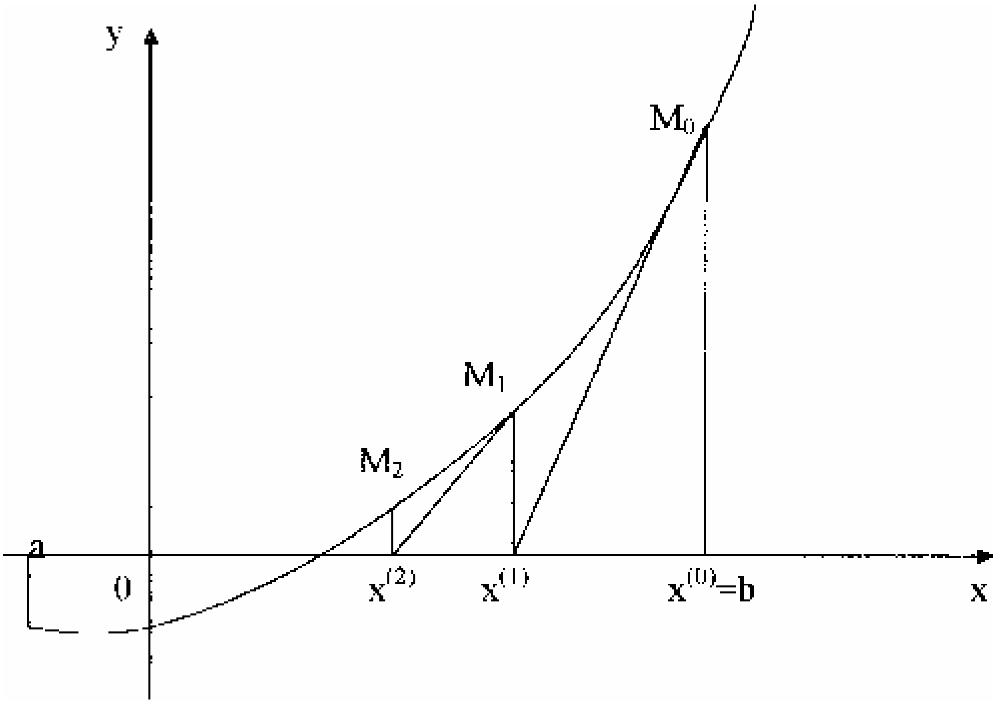


Рис 7. Геометрическая интерпретация метода касательных (метода Ньютона)

2.2.4.2. Основная теорема о сходимости метода Ньютона

Теорема 5. Пусть $\bar{x}$ - простой корень уравнения (1). В некоторой окрестности корня $\bar{x}$ функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, т.е. $f(x) \in C^2[a,b]$. Тогда найдется такая малая s - окрестность корня $\bar{x}$, что при произвольном выборе начального приближения $x^{(0)}$ из этой окрестности итерационная последовательность метода Ньютона не выходит за пределы окрестности и справедлива оценка

$$\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| \le C\left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^2, \quad n \ge 0, \tag{20}$$

где $C = \dfrac{1}{\sigma}$, означающая, что метод сходится с квадратичной скоростью.

Следствием оценки (20) является априорная оценка

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le s\, q^{2^n}, \tag{21}$$

где $q = \dfrac{\left|x^{(0)} - \bar{x}\right|}{s}$.

Итак, при выборе начального приближения из достаточно малой окрестности корня метод Ньютона сходится квадратично. Это означает, что на каждой итерации число верных цифр приближения примерно удваивается. Оценки погрешности (20), (21) являются априорными и их использование в практике вычислений для количественной оценки погрешности неэффективно и чаще всего невозможно.

2.2.4.3. Критерий окончания

Введем простой апостериорный критерий окончания итераций, справедливость которого обосновывается следующей теоремой.

<u>Теорема 6</u>. Пусть выполнены условия теоремы 5 и $x^{(0)} \in (\bar{x} - \frac{s}{2}, \bar{x} + \frac{s}{2})$. Тогда для всех $n \ge 1$ верна оценка

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le \left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right|. \tag{22}$$

Эта оценка позволяет сформулировать следующий простой критерий окончания итераций метода Ньютона.

При заданной точности $e > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство

$$\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| < e. \tag{23}$$

Блок-схема алгоритма метода Ньютона приведена на рис. 6. Программа newton на языке Pascal, реализующая этот алгоритм для уравнения $2arctg\ x\text{-}0.5x^3 = 0$, приводится ниже.

```
program newton;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
function df(x:real):real;
begin
df:=2/(1+x*x)-1.5*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp:real;
n:integer;
begin
clrscr;
x:=a;
repeat
xp:=x;
x:=xp-f(xp)/df(xp);
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('Корень уравнения x=',x:2:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = =-1.592757$;

на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;

на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

2.2.4.5. Связь с методом простой итерации

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простой итерации с итерационной функцией $j(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, которая получается в результате приведения уравнения (1) $f(x) = 0$ к виду, удобному для итераций. Легко видеть, что производная итерационной функции определяется выражением $j'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Тогда её значение в точке $\bar{x}$ равно нулю, т.е. $j'(\bar{x}) = 0$, что определяет сверхлинейный характер сходимости в окрестности корня $\bar{x}$.

2.2.5. Метод хорд

2.2.5.1. Связь метода хорд с методом Ньютона

Метод хорд является частным случаем метода Ньютона. Рассмотрим приближенное равенство

$$f'\left(x^{(n)}\right) \approx \frac{f\left(z^{(n)}\right) - f\left(x^{(n)}\right)}{z^{(n)} - x^{(n)}}. \tag{24}$$

Это равенство верно при условии $z^{(n)} \approx x^{(n)}$ и следует из определения производной $f'(x) = \lim\limits_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$. Пусть c -

фиксированная точка в окрестности простого корня $\bar{x}$. Заменим в расчетной формуле метода Ньютона (19) производную $f'\left(x^{(n)}\right)$ правой частью приближенного равенства (24), полагая $z^{(n)} = c$. В результате получаем расчетную формулу метода хорд

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{(c - x^{(n)}) f(x^{(n)})}{f(c) - f(x^{n})}, n \geq 0. \tag{25}$$

2.2.5.2. Геометрическая интерпретация метода хорд

Соединим точки $M(c, f(c))$ и $M_0(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ прямой линией MM_0, которая пересекает ось абсцисс OX в точке $x^{(1)}$. Через точки $M(c, f(c))$ и $M_1(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$ проведем новую прямую MM_1, которая пересекает ось OX в точке $x^{(2)}$. Через точки $M(c, f(c))$ и $M_2(x^{(2)}, f(x^{(2)}))$ проведем новую прямую MM_2, которая пересекает ось OX в точке $x^{(3)}$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим числовую последовательность $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$, сходящуюся к корню $\bar{x}$. Выведем итерационное соотношение (25) из геометрических соображений. Уравнение прямой MM_0 имеет вид

$$\frac{x - x^{(0)}}{c - x^{(0)}} = \frac{f(x) - f\left(x^{(0)}\right)}{f(c) - f\left(x^{(0)}\right)}$$

или $f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + \dfrac{f(c) - f\left(x^{(0)}\right)}{c - x^{(0)}}\left(x - x^{(0)}\right)$.

Так как в точке $x^{(1)}$ имеет место равенство $f(x^{(1)}) = 0$, получаем $f\left(x^{(1)}\right) = f\left(x^{(0)}\right) + \dfrac{f(c) - f\left(x^{(0)}\right)}{c - x^{(0)}}\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right) = 0$. Отсюда находим

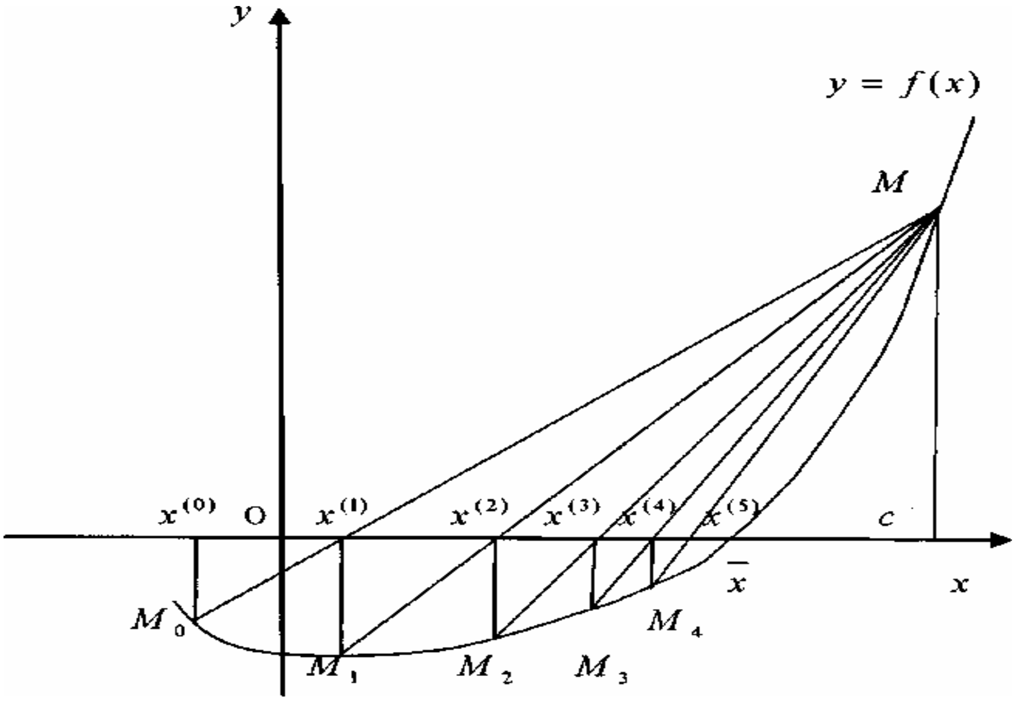


Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода хорд.

$x^{(1)} = x^{(0)} - \dfrac{(c - x^{(0)}) f(x^{(0)})}{f(c) - f(x^{(0)})}$. Запишем уравнение прямой MM_1

$\dfrac{x - x^{(1)}}{c - x^{(1)}} = \dfrac{f(x) - f(x^{(1)})}{f(c) - f(x^{(1)})}$ или $f(x) = f(x^{(1)}) + \dfrac{f(c) - f(x^{(1)})}{c - x^{(1)}}(x - x^{(1)})$. Абсциссу точки $x^{(2)}$ найдем из условия

$$f(x^{(2)}) = f(x^{(1)}) + \frac{f(c) - f(x^{(1)})}{c - x^{(1)}}(x^{(2)} - x^{(1)}) = 0.$$

Тогда находим $x^{(2)} = x^{(1)} - \dfrac{(c - x^{(1)}) f(x^{(1)})}{f(c) - f(x^{(1)})}$. Продолжая этот процесс, получаем

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{(c - x^{(n)}) f(x^{(n)})}{f(c) - f(x^{(n)})}, n \ge 0,$$

что полностью совпадает с соотношением (25).

Метод хорд обладает линейной скоростью сходимости. Его можно рассматривать как метод простой итерации с итерационной функцией

$$j(x) = x - \frac{(c-x)f(x)}{f(c) - f(x)}.$$

Метод хорд применим только для монотонных функций $f(x)$. Если $f(b)f''(b) > 0$, то текущая хорда имеет правый закрепленный конец и итерационная последовательность $x^{(n)}$ приближается к корню $\bar{x}$ слева. Если же $f(a)f''(a) > 0$, то текущая хорда имеет левый закрепленный конец и итерационная последовательность $x^{(n)}$ приближается к корню $\bar{x}$ справа. В качестве критерия окончания итераций, как и в методе Ньютона, принимаем $\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| < e$. Блок-схема алгоритма метода хорд приведена на рис. 6.

Программа hord, реализующая этот алгоритм для уравнения $2arctg\ x\text{-}0.5x^3 = 0$, приведена ниже. Здесь будем считать $\varepsilon = 10^{-6}$.

```
program hord;
uses crt;
function f(x: real): real;
        begin
            f:=2*arctan(x)-x*x*x*0.5
        end;
const a=-1.6;
         b=-0.9;
         eps=0.000001;
var   x, xp, c: real;
begin
clrscr;
x:=(a+b)/2;
c:=a;
repeat
```

```
    xp:=x;
    x:=xp-f(xp)*(xp-c)/(f(xp)-f(c));
until abs(x-xp)<=eps;
writeln('Корень уравнения x=', x: 11: 6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = =-1.592757$;

на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;

на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

2.2.6. Метод секущих

2.2.6.1. Связь метода секущих с методом Ньютона

Заменим производную $f'(x^{(n)})$ в формуле метода Ньютона (19) приближением $f'(x^{(n)}) \approx \dfrac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})}{x^{(n-1)} - x^{(n)}}$ (левая производная) и получим расчетную формулу метода секущих

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)}), n \geq 1. \tag{26}$$

Этот метод двухшаговый, так как для нахождения очередного приближения $x^{(n+1)}$ требуется знание двух предыдущих приближений $x^{(n)}$ и $x^{(n-1)}$. Для того чтобы начать вычисления, надо задать два начальных приближения $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Все ранее рассмотренные методы были одношаговыми, так как требовали для вычисления $x^{(n+1)}$ только знание $x^{(n)}$.

2.2.6.2. Геометрическая интерпретация метода секущих

Геометрическая интерпретация метода секущих приведена на рис. 8 . Очередное приближение $x^{(n+1)}$ получается как абсцисса точки пересечения с осью OX секущей, соединяющей точки $M_{n-1}(x^{(n-1)}, f(x^{(n-1)}))$ и $M_n(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$ графика функции $y = f(x)$.

Выведем итерационное соотношение (26) из геометрических соображений. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки M_0 и M_1,

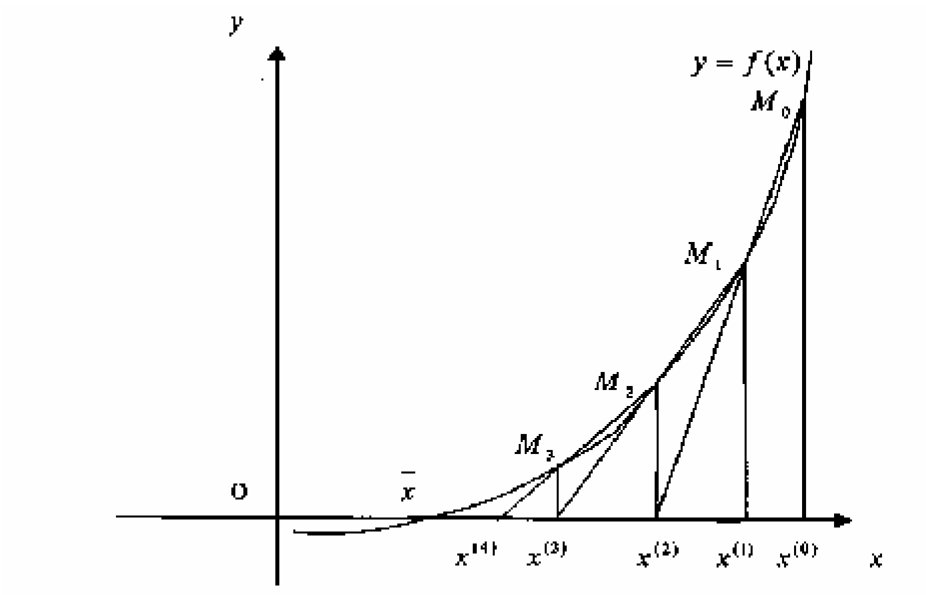


Рис. 8. Геометрическая интерпретация метода секущих

$\dfrac{x - x^{(1)}}{x^{(0)} - x^{(1)}} = \dfrac{f(x) - f(x^{(1)})}{f(x^{(0)}) - f(x^{(1)})}$ или $f(x) = f(x^{(1)}) + \dfrac{f(x^{(0)}) - f(x^{(1)})}{x^{(0)} - x^{(1)}}\left(x - x^{(1)}\right)$. Так как в точке $x^{(2)}$ пересечения этой прямой с осью OX $f(x^{(2)}) = 0$, то получаем соотношение

$f(x^{(1)}) + \dfrac{f(x^{(0)}) - f(x^{(1)})}{x^{(0)} - x^{(1)}}(x^{(2)} - x^{(1)}) = 0$, из которого выражаем $x^{(2)}$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{x^{(0)} - x^{(1)}}{f(x^{(0)}) - f(x^{(1)})} f(x^{(1)}).$$

Отсюда видим, что абсцисса $x^{(2)}$ точки M_2 находится по абсциссам $x^{(0)}, x^{(1)}$ известных точек M_0, M_1. Проведем секущую M_1M_2 и запишем её уравнение

$$\frac{x - x^{(2)}}{x^{(1)} - x^{(2)}} = \frac{f(x) - f(x^{(2)})}{f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})}.$$

С помощью аналогичных преобразований найдем отсюда абсциссу x$^{(3)}$ точки M_3 пересечения секущей M_1M_2 с осью OX

$x^{(3)} = x^{(2)} - \dfrac{x^{(1)} - x^{(2)}}{f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})} f(x^{(2)})$. Продолжая этот процесс, получим расчетное соотношение метода секущих (26). Метод секущих является частным случаем метода простой итерации с итерационной функцией $j(x) = x - \dfrac{x^{(n-1)} - x}{f(x^{(n-1)}) - f(x)} f(x)$. Метод секущих сохраняет свойство сверхлинейной сходимости метода Ньютона при нахождении простых корней. Блок-схема алгоритма метода секущих приведена на рис. 6.

Программа secuch, реализующая этот алгоритм для уравнения $2arctg\ \mathrm{x}\text{-}0.5\mathrm{x}^3 = 0$, приведена ниже.

```
program sekuch;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp,c:real;
begin
```

```
clrscr;
x:=a;
c:=x+(b-a)/100;
repeat
xp:=c-f (c)*(c-x)/(f( c)-f(x));
x:=c;
c:=xp;
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('Корень уравнения x=',x:11:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x}==-1.592757$;

на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x}=0.000000$;

на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x}=1.592757$.

2.2.6. Метод обратной квадратичной интерполяции

Пусть, как и ранее, корень $\bar{x}$ уравнения $f(x)=0$ отделен на отрезке $[a,b]$. *Ф*ункция $f(x)$ предполагается строго монотонной. Предположим, что приближения $x^{(n-2)}, x^{(n-1)}, x^{(n)}$ к корню $\bar{x}$ уже найдены и различны, а в силу этого соответствующие значения $f(x^{(n-2)}), f(x^{(n-1)}), f(x^{(n)})$ функции $f(x)$ различны.

Рассмотрим обратную задачу интерполяции. В качестве независимой переменной будем рассматривать значения функции $f(x)$, а в качестве зависимой переменной - соответствующие им значения x. Построим интерполяционный многочлен второго порядка $P_2(y)$ от переменной y, удовлетворяющий условиям

$x^{(i)} = P_2(f(x^{(i)}))$ для $i = n-2; n-1; n$. За очередное приближение к корню $\bar{x}$ принимается $x^{(n+1)} = P_2(0)$. Естественно предположить, что многочлен $P_2(y)$ записывается в виде $P_2(y) = a_1 y^2 + b_1 y + c_1$. Коэффициенты этого полинома a_1, b_1, c_1 определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1(f(x^{(n-2)}))^2 + b_1 f(x^{(n-2)}) + c_1 = x^{(n-2)}, \\ a_1(f(x^{(n-1)}))^2 + b_1 f(x^{(n-1)}) + c_1 = x^{(n-1)}, \\ a_1(f(x^{(n)}))^2 + b_1 f(x^{(n)}) + c_1 = x^{(n)} \end{cases} \tag{27}$$

Решение этой системы записывается следующим образом

$$a_1 = \frac{x^{(n-2)}}{(f(x^{(n-2)}) - f(x^{(n-1)}))(f(x^{(n-2)}) - f(x^{(n)}))} + \frac{x^{(n-1)}}{(f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)}))(f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)}))} +$$
$$+ \frac{x^{(n)}}{(f(x^{(n)}) - f(x^{(n-2)}))(f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)}))}$$
$$b_1 = \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})} + a_1(f(x^{(n-2)}) + f(x^{(n-1)})), \tag{28}$$
$$c_1 = x^{(n-2)} - b_1 f(x^{(n-2)}) - a_1(f(x^{(n-2)}))^2.$$

Здесь вычисление корней квадратного уравнения не требуется. Очередное приближение к корню $\bar{x}$ находится следующим образом $x^{(n+1)} = c_1$. Метод обратной квадратичной интерполяции является трехшаговым. Для начала его работы надо задать три начальных приближения $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}$. Геометрическая интерпретация метода обратной квадратичной интерполяции приведена на рис. 9.

Этот метод обладает локальной сходимостью с порядком $p \approx 1.839$, так как имеет место следующая оценка скорости сходимости

$$\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| \le C\left|x^{(n)} - \bar{x}\right|^p, \tag{29}$$

где $C > 0, p = 1.839$. В качестве критерия окончания итерационного процесса используется соотношение вида (23) $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < e$.

Блок-схему алгоритма метода обратной квадратичной интерполяции см. на рис. 10.

Программа obrparabolinterp, реализующая этот алгоритм для уравнения $2arctg\ x\text{-}0.5x^3 = 0$, приведена ниже.

```
program obrparabolinterp;
uses crt;
const n=100;
      a=-1.6;
      b=-0.9;
      eps=0.000001;
label 10;
var
    x,y0,y1,y2,a1,b1,c1:real;
    i:integer;
    x0:array[0..n] of real;
function f(x:real):real;
begin
   f:=2*arctan(x)-0.5*x*x*x;
end;
begin
clrscr;
x0[0]:=a;x0[1]:=(a+b)/2;x0[2]:=b;
y0:=f(x0[0]); y1:=f(x0[1]); y2:=f(x0[2]);
i:=0;
while  abs(x0[i+2]-x0[i+1])>=eps do
begin
if (y0=y1)or(y1=y2)or(y2=y0) then
```

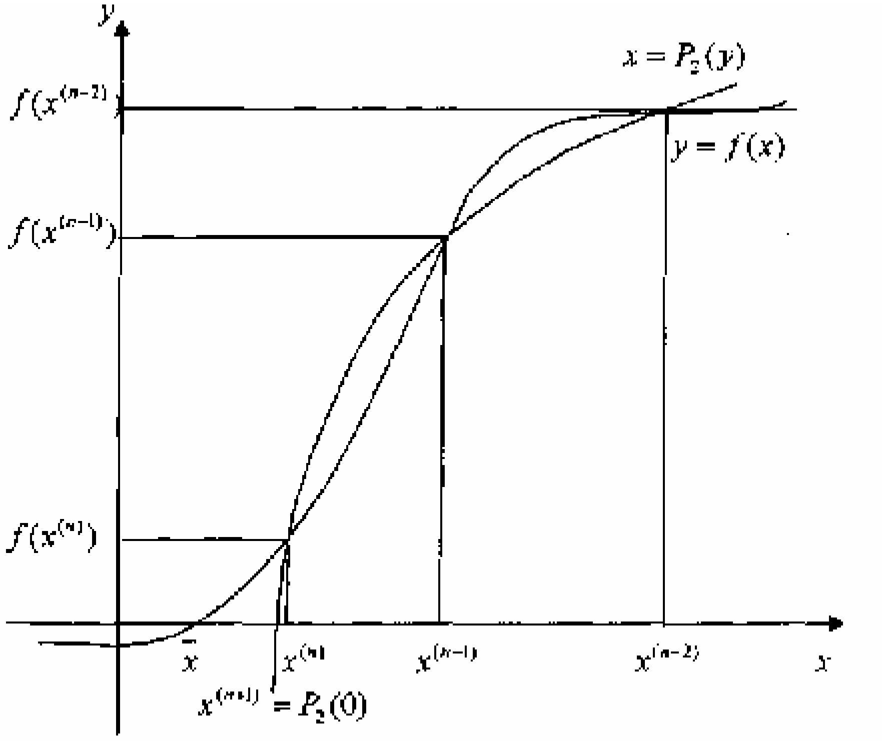


Рис. 9. Геометрическая интерпретация метода обратной квадратичной интерполяции

```
                    begin
writeln('Уравнение не имеет решений, так как y0=y1 или y1=y2
или y2=y0');
                       goto 10;
                    end;
a1:=x0[i]/((y0-y1)*(y0-y2))+x0[i+1]/((y1-y0)*(y1-y2))+
  x0[i+2]/((y2-y0)*(y2-y1));
b1:=(x0[i+1]-x0[i])/(y1-y0)-a1*(y1+y0);
c1:=x0[i]-b1*y0-a1*sqr(y0);
x0[i+3]:=c1;
i:=i+1;
```

```
if (x0[i+2]<a)or(x0[i+2]>b) then
                    begin
writeln('Корень находится вне отрезка [a,b]: уравнение не имеет
решений');
                        goto 10;
                    end;
y0:=f(x0[i]); y1:=f(x0[i+1]); y2:=f(x0[i+2]);
end;
writeln('Корень уравнения x0[',i+2,']=',x0[i+2]:11:6);
readln;
10:end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = =-1.592757$;

на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;

на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

.

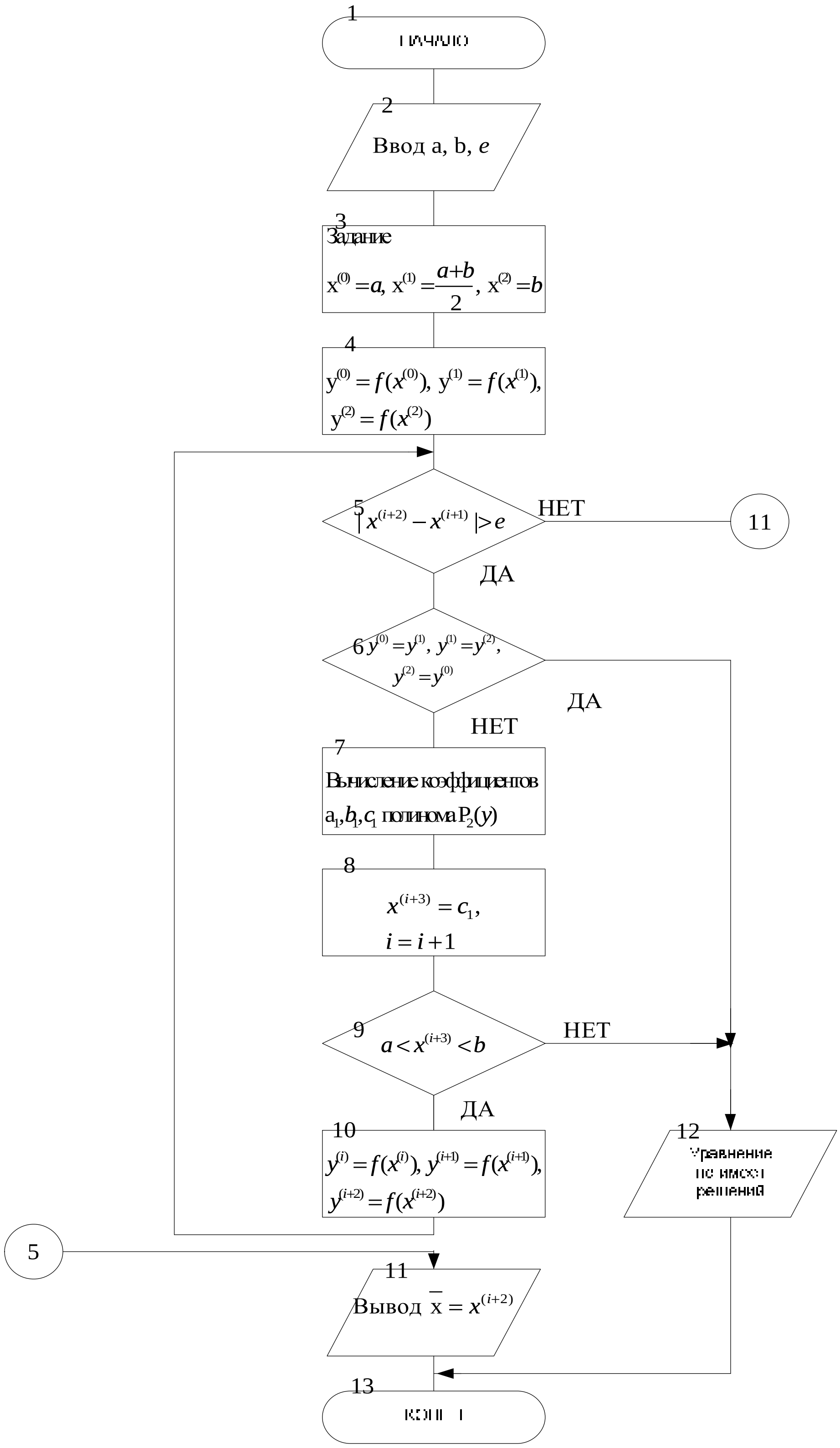


Рис. 10. Блок-схема алгоритма метода обратной квадратичной интерполяции.

3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТАНДАРТНЫХ ПРОЦЕДУР MATHCAD

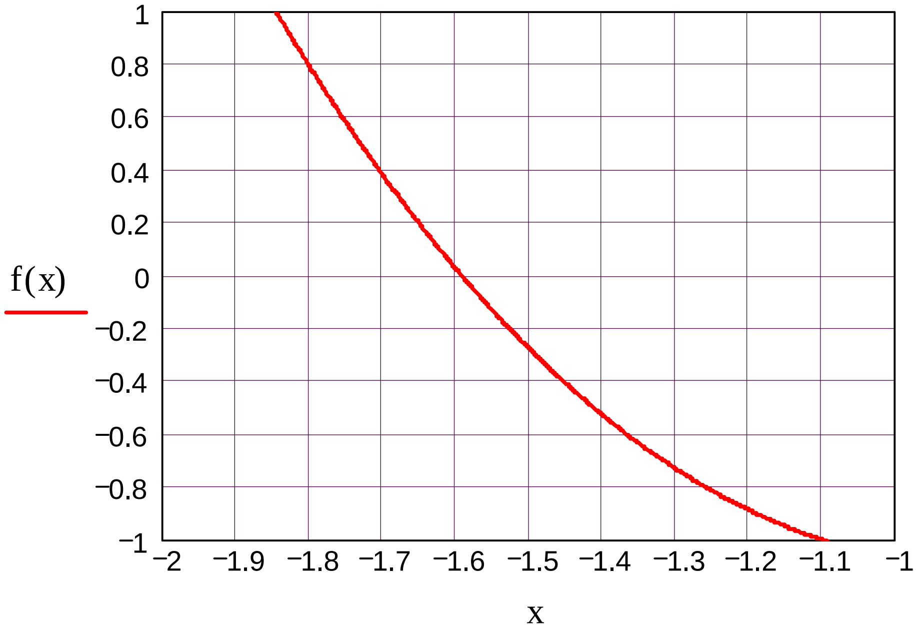
3.1. Графическое решение

3.1.1. Строим график функции y=f(x)=$2\cdot\operatorname{atan}(x) - \frac{x^3}{2}$.

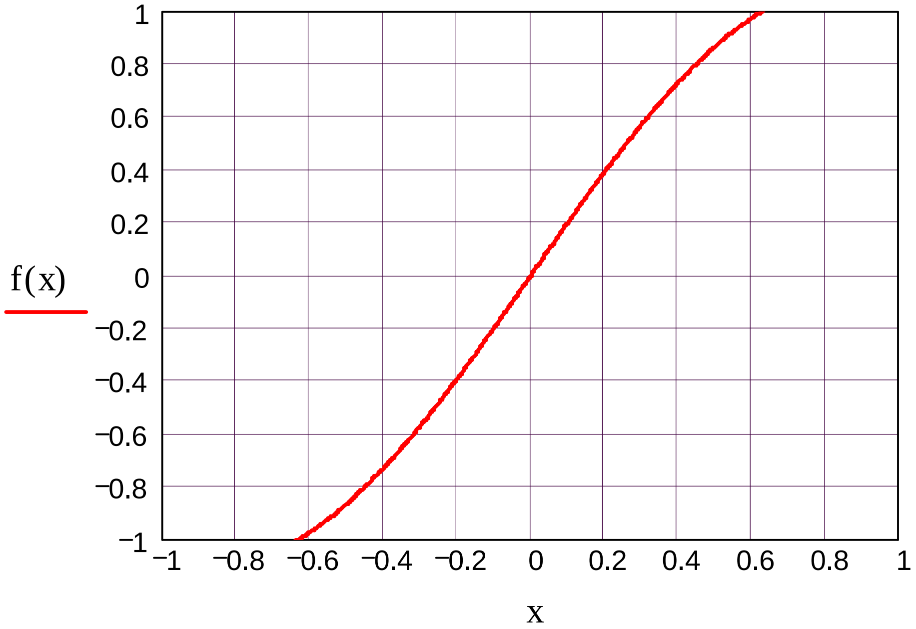
Вводим функцию $f(x) := 2\cdot\operatorname{atan}(x) - \frac{x^3}{2}$, набирая с клавиатуры f(x),Shift+ ;(или с панели "Арифметика" :=), 2,*, atan(x) выбираем в меню функция "f(x)=" категорию Тригонометрические в окне "Имя" , - , x^3 , / , 2 на панели "Арифметика". Выбираем с помощью левой кнопки мыши(ЛКМ) в меню "Вид" подменю "Панели инструментов", в котором ставим галочку в позиции "Графики". На панели "Графики" щелкаем ЛКМ по иконке "Декартов график" и в появившемся квадрате записываем в нижнем черном прямоугольнике x, а в прямоугольнике слева - f(x). В черных прямоугольниках нижней строки записываем слева - -10, а справа - 10, т.е. указываем максимально возможный диапазон изменения аргумента. В черных прямоугольниках левой колонки записываем снизу - -10, а вверху - 10, т.е. интервал возможных значений переменной y выбираем симметричным относительно оси OX для отображения положения корней на оси OX. Затем наносим координатную сетку с помощью панели "Formatting Currently Selected X-Y Plot", в которой выбираем подменю "Оси X-Y" и ставим галочки в квадратиках "Линии Сетки", "Нумерация", "Автомасштабирование", "Показать метки", а также числа 10 в квадратиках "Размер сетки" для обеих осей X и Y. В рамке "Стиль оси" поставим точку в кружочке "Ограничения". После этого надо 2 раза щёлкнуть ЛКМ вне поля графика. Полученный график отображает топологию функции $f(x)$.

$$f(x) := 2 \cdot \mathrm{atan}(x) - \frac{x^3}{2}$$

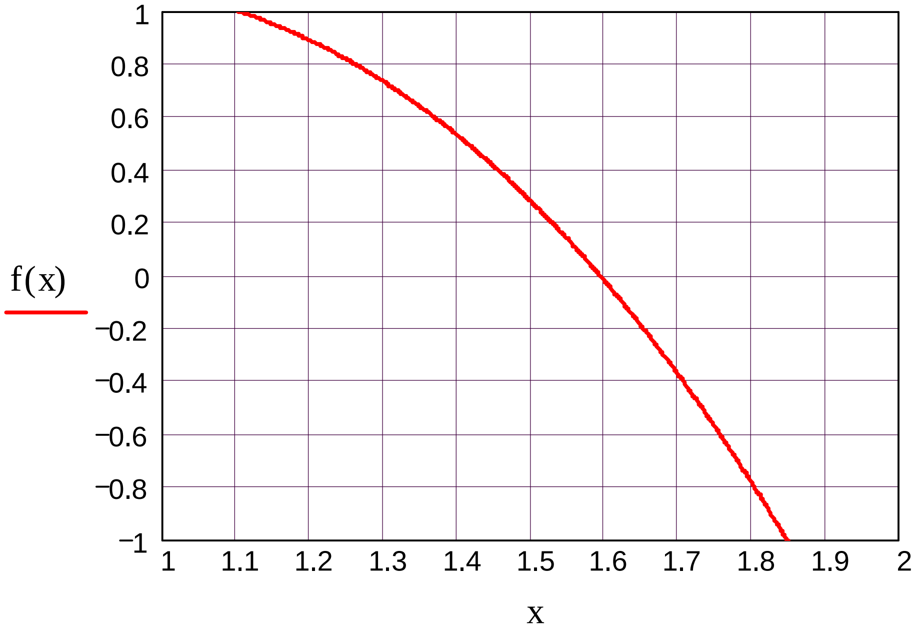
Из графика видно, что корни находятся на отрезках [-2,-1], [-1,1], [1,2]. Строим более подробные графики на этих отрезках.



3.1.2. Находим корень на отрезке [-2,-1]. Значения корней на графике находятся с помощью трассировки. Щелкаем ЛКМ по графику. Затем на панели "Графики" - по иконке "Слежение". Появляется панель X-Y Trace. (Тоже самое достигается нажатием правой кнопки мыши и щёлканьем ЛКМ по подменю "Трассировка".). Устанавливаем остриё курсора в точку пересечения графика и оси OX. В окне X-Value панели X-Y Trace поляяется приближенное значение корня "-1.592", а в окне Y-Value панели X-Y Trace - погрешность отклонения указанной точки от оси OY. Копируя содержимое окна X-Value, фиксируем значение корня x=-1.592.



3.1.3. Повторяя действия п. 1.2, находим корень на [-1,1] x=0.004



3.1.4. Повторяя действия п. 1.2, находим корень на [1,2] x=1.593

3.2. Решение с помощью стандартной процедуры ROOT(f(x),x,a,b)

3.2.1. Решение на интервале

$$\mathrm{root}(f(x), x, -2, -1) = -1.592757$$

$$\mathrm{root}(f(x), x, -1, 1) = 0$$

$$\mathrm{root}(f(x), x, 1, 2) = 1.592757$$

3.2.2. Решение с начальным приближением

$$x := -2$$

$$\mathrm{root}(f(x), x) = -1.592783$$

$x := -0.3$

$root(f(x), x) = 1.127 \times 10^{-6}$

$x := 1$

$root(f(x), x) = 1.592755$

3.3. Решение с помощью стандартной процедуры find(x) и решающего блока given

3.3.1. Решение на отрезке [-2,-1]

Задаем начальное значение переменной $x := -2$

В следующей строке набираем ключевое слово given. Далее записываем $f(x) = 0$. Знак = набирается нажатием ЛКМ на булевской панели инструментов на кнопку ∎ = ∎. В левый черный квадрат записываем f(x), а в правый - 0. На оставшихся отрезках действуем аналогично.

$x := -2$

Given

$f(x) = 0$

$Find(x) = -1.592757$

3.3.2. Решение на отрезке [-1,1]

$x := -0.5$

Given

$f(x) = 0$

$Find(x) = 0$

3.3.3. Решение на отрезке [1,2]

$x := 1$

Given

$f(x) = 0$

$\mathrm{Find}(x) = 1.592757$

3.4. Приближенное решение с помощью стандартной процедуры minerr(x) и решающего блока given

Приближенное решение с помощью стандартной процедуры minerr(x) и решающего блока given осуществляется аналогично п. 3.3.

3.4.1. Решение на отрезке [-2,-1]

$x := -2$

Given

$f(x) = 0$

$\mathrm{Minerr}(x) = -1.592757$

3.4.2. Решение на отрезке [-1,1]

$x := -0.5$

Given

$f(x) = 0$

$\mathrm{Minerr}(x) = 0$

3.4.3. Решение на отрезке [1,2]

$x := 1$

Given

$f(x) = 0$

$\mathrm{Minerr}(x) = 1.592757$

4. Задания для лабораторных и курсовых работ

Таблица 1

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$x^6+27x^5-0.3x^4+12x^3-0.7x^2+10x+0.34=0$	[-10;10]
2	$x^6+12x^5-34x^4+0.7x^3-3x^2+4x+0.67=0$	[-10;10]
3	$x^6+0.6x^5-23x^4-12x^3+0.9x^2+3x+0.04=0$	[-10;10]
4	$x^6+6x^5-7x^4+0.9x^3-0.5x^2+0.7x-0.06=0$	[-10;10]
5	$x^6-12x^5-8x^4+6x^3-3x^2+2x+0.07=0$	[-10;10]
6	$x^6+1.2x^5-3x^4+2x^3-4x^2+7x+0.84=0$	[-10;10]
7	$x^6+5x^5-7x^4+3x^3-6x^2+x+12=0$	[-10;10]
8	$x^6+0.5x^5-0.7x^4+0.3x^3-0.6x^2+0.1x+1.2=0$	[-10;10]
9	$x^6-13x^5+34x^4+7x^3-2x^2+13x+45=0$	[-10;10]
10	$x^6-0.3x^5-0.4x^4+0.7x^3-0.2x^2+0.3x+4.5=0$	[-10;10]
11	$x^6+4x^5-0.4x^4-5x^3-0.5x^2+7x+1.79=0$	[-10;10]
12	$x^6+0.4x^5-4x^4+0.5x^3-5x^2-0.7x+17.9=0$	[-10;10]
13	$x^6+6x^5-0.7x^4+0.4x^3-0.5x^2+3x+13=0$	[-10;10]
14	$x^6+0.6x^5-7x^4+4x^3-0.3x^2+8x+4=0$	[-10;10]
15	$x^6+0.8x^5-4x^4+12x^3-65x^2+11x-7.1=0$	[-10;10]
16	$x^6+8x^5+0.4x^4+0.2x^3+0.6x^2+0.1x+71=0$	[-10;10]
17	$x^6+3x^5-2x^4+9x^3-8x^2+7x+1.2=0$	[-10;10]
18	$x^6+0.3x^5-0.2x^4+0.9x^3-0.8x^2+0.7x+12=0$	[-10;10]
19	$x^6-0.3x^5+0.2x^4-0.9x^3+0.8x^2-0.7x-12=0$	[-10;10]
20	$x^6+3x^5-0.3x^4+9x^3-0.3x^2+7x+0.5=0$	[-10;10]
21	$x^6-0.3x^5+3x^4-0.9x^3+3x^2-0.7x-5=0$	[-10;10]
22	$x^6-3x^5+0.3x^4+0.9x^3+0.3x^2+0.7x+12=0$	[-10;10]
23	$x^6+5x^5-0.6x^4+8x^3-0.1x^2-0.1x+0.18=0$	[-10;10]
24	$x^6+2x^5-3x^4+4x^3-5x^2+6x+7=0$	[-10;10]
25	$x^6+7x^5-8x^4+9x^3-0.1x^2+0.2x+0.3=0$	[-10;10]
26	$x^6+9x^5-8x^4+7x^3-6x^2+5x+4=0$	[-10;10]
27	$x^6+3x^5-2x^4+0.1x^3-0.2x^2+0.3x+0.4=0$	[-10;10]
28	$x^6+0.3x^5-0.2x^4+10x^3-20x^2+3x+40=0$	[-10;10]
29	$x^6+0.7x^5-0.8x^4-0.9x^3+0.1x^2-0..3x+4.5=0$	[-10;10]
30	$x^6+x^5-2x^4+3x^3-4x^2+5x+6=0$	[-10;10]

Таблица 2

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	[-10;10]
2	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$	[-10;10]
3	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	[-10;10]
4	$x^3 - 12x^2 + 6 = 0$	[-10;10]
5	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	[-10;10]
6	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$	[-10;10]
7	$2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$	[-10;10]
8	$x^3 - 3x^2 + 2.5 = 0$	[-10;10]
9	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$	[-10;10]
10	$x^3 + 3x^2 + 3.5 = 0$	[-10;10]
11	$x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$	[-10;10]
12	$x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$	[-10;10]
13	$2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$	[-10;10]
14	$x^3 - 12x + 10 = 0$	[-10;10]
15	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$	[-10;10]
16	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$	[-10;10]
17	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$	[-10;10]
18	$x^3 - 4x^2 + 2 = 0$	[-10;10]
19	$x^3 - 12x - 5 = 0$	[-10;10]
20	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$	[-10;10]
21	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	[-10;10]
22	$2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$	[-10;10]
23	$x^3 - 3x^2 + 1.5 = 0$	[-10;10]
24	$x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0$	[-10;10]
25	$x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$	[-10;10]
26	$x^3 - 12x - 10 = 0$	[-10;10]
27	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$	[-10;10]
28	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$	[-10;10]
29	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$	[-10;10]
30	$x^3 - 3x^2 + 3.5 = 0$	[-10;10]

Таблица 3

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$	[-10;10]
2	$x^3 - 6x - 8 = 0$	[-10;10]
3	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	[-10;10]
4	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$	[-10;10]
5	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	[-10;10]
6	$x^3 + x - 5 = 0$	[-10;10]
7	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$	[-10;10]
8	$x^3 + 3x + 1 = 0$	[-10;10]
9	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$	[-10;10]
10	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$	[-10;10]
11	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$	[-10;10]
12	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$	[-10;10]
13	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$	[-10;10]
14	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$	[-10;10]
15	$x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$	[-10;10]
16	$x^3 + 4x - 6 = 0$	[-10;10]
17	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0{,}8 = 0$	[-10;10]
18	$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$	[-10;10]
19	$x^3 - 0.2x^2 + 0.3x + 1.2 = 0$	[-10;10]
20	$x^3 - 2x + 4 = 0$	[-10;10]
21	$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$	[-10;10]
22	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$	[-10;10]
23	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 1.2 = 0$	[-10;10]
24	$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1 = 0$	[-10;10]
25	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$	[-10;10]
26	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0$	[-10;10]
27	$x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0$	[-10;10]
28	$x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0$	[-10;10]
29	$x^3 + x - 3 = 0$	[-10;10]
30	$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.4 = 0$	[-10;10]

Таблица 4

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$x - \sin x = 0.25$	[-10;10]
2	$tg(0.58x + 0.1) = x^2$	[-10;10]
3	$\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0$	[-10;10]
4	$tg(0.4x + 0.4) = x^2$	[-10;10]
5	$\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$	[-10;10]
6	$tg(0.5x + 0.2) = x^2$	[-10;10]
7	$3x - \cos x - 1 = 0$	[-10;10]
8	$x + \lg x = 0.5$	[-10;10]
9	$tg(0.5x + 0.1) = x^2$	[-10;10]
10	$x^2 + 4\sin x = 0$	[-10;10]
11	$ctg1.05x - x^2 = 0$	[-10;10]
12	$tg(0.4x + 0.3) = x^2$	[-10;10]
13	$x\lg x - 1.2 = 0$	[-10;10]
14	$1.8x^2 - \sin 10x = 0$	[-10;10]
15	$ctgx - \frac{x}{4} = 0$	[-10;10]
16	$tg(0.3x + 0.4) = x^2$	[-10;10]
17	$x^2 - 20\sin x = 0$	[-10;10]
18	$ctgx - \frac{x}{3} = 0$	[-10;10]
19	$tg(0.47x + 0.2) = x^2$	[-10;10]
20	$x^2 + 4\sin x = 0$	[-10;10]
21	$ctgx - \frac{x}{2} = 0$	[-10;10]
22	$2x - \lg x - 7 = 0$	[-10;10]
23	$tg(0.44x + 0.3) = x^2$	[-10;10]
24	$3x - \cos x - 1 = 0$	[-10;10]
25	$ctgx - \frac{x}{10} = 0$	[-10;10]
26	$x^2 + 4\sin x = 0$	[-10;10]
27	$tg(0.36x + 0.4) = x^2$	[-10;10]
28	$x + \lg x = 0.5$	[-10;10]
29	$ctgx - \frac{x}{5} = 0$	[-10;10]
30	$2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$	[-10;10]

Таблица 5

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$\ln(x-1) = 3\cos x$	[-10; 10]
2	$\sqrt{1-x^2}$ - $tg\,\frac{x}{2} = 0$	[-10; 10]
3	$\frac{p}{2}\cos x = arctg\ 2x$	[-10; 10]
4	$\sqrt{1-x^2} - 2arctgx = 0$	[-10; 10]
5	$e^{-x^2} = \sqrt{2p}\cdot x$	[-10; 10]
6	$arctgx - (x-1)^4 = 0$	[-10; 10]
7	$\ln(x-1) = e^{-x^2}$	[-10; 10]
8	$x - \cos^3 px = 0$	[-10; 10]
9	$\frac{1}{x} = 2\ln(x-2)$	[-10; 10]
10	$\frac{1}{x} - arctg\,3x = 0$	[-10; 10]
11	$arctgx = tg\,\frac{x}{2}$	[-10; 10]
12	$e^{-x} - 2 + x^2 = 0$	[-10; 10]
13	$3 - x = 5\ln x$	[-10; 10]
14	$2\sqrt{x} - \cos\frac{px}{2} = 0$	[-10; 10]
15	$\frac{1}{1+x^2} = \sin x$	[-10; 10]
16	$tgx + x - 3 = 0$	[-10; 10]
17	$\ln(x-1) = \frac{1}{x^2}$	[-10; 10]
18	$x^2 - ctg\,\frac{px}{3} = 0$	[-10; 10]
19	$1 - \sin x = 5x\sqrt{x}$	[-10; 10]
20	$\ln x + \sqrt{x} = 0$	[-10; 10]

Продолжение таблицы 5

Номер варианта	Уравнение	Интервал
21	$\sin 3x = \ln(x-2)$	[-10; 10]
22	$e^{2x} + x^2 - 3 = 0$	[-10; 10]
23	$\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{x}$	[-10; 10]
24	$2(x-1)^2 - e^{-x} = 0$	[-10; 10]
25	$tgpx = \sqrt{x-1{,}9}$	[-10; 10]
26	$(x-2)^4 = e^{-x^2}$	[-10; 10]
27	$tgx - \sqrt{0{,}5 - x^2 = 0}$	[-10; 10]
28	$e^x = \ln(x+10)$	[-10; 10]
29	$x\sin x = \dfrac{1}{3}$	[-10; 10]
30	$4xtgx - 1 = 0$	[-10; 10]

Таблица 6

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$100x^3 - 45x^2 - 12x = 2{,}5 = 0$	[-10;10]
2	$10x^3 + 20x^2 - 0{,}1x - 0{,}2 = 0$	[-10;10]
3	$x^3 - 4{,}05x^2 - 0{,}03x + 0{,}02 = 0$	[-10;10]
4	$x^3 - 79{,}9x^2 - 1988x - 200 = 0$	[-10;10]
5	$x^3 - 4{,}6x^2 - 52x - 20 = 0$	[-10;10]
6	$x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}5x = 0$	[-10;10]
7	$200x^3 + 78x^2 - 41{,}2x + 0{,}42 = 0$	[-10;10]
8	$2x^3 0{,}6x^2 + 0{,}06x - 0{,}002 = 0$	[-10;10]
9	$0{,}5x^3 - 2{,}3x^2 - 26x - 10 = 0$	[-10;10]
10	$-0{,}1x^3 + 0{,}405x^2 + 0{,}003x - 0{,}002 = 0$	[-10;10]
11	$\sin x \cdot \cos^2 x - 3{,}2\cos^2 x - 3{,}75\sin x + 3{,}9 = 0$	[-10;10]
12	$2\cos^3 x + 6{,}4\sin^2 x + 5{,}5\cos x - 7{,}8 = 0$	[-10;10]
13	$x^2 \sin^2 x - 0{,}2x\cos 2x - 0{,}08\sin^2 x + 0{,}2x = 0$	[-10;10]
14	$x^2 \cos^2 x + 0{,}7\cos^2 x - 0{,}8\cos x + x^2 \sin^2 x + 0{,}7x\sin^2 x$ $-0{,}8\sin^2 x = 0$	[-10;10]
15	$tg^2 x \sin x - 2{,}15 tgx \sin x + 1{,}15\sin x = 0$	[-10;10]
16	$2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 6\sin x\cos x = 0$	[-10;10]
17	$-\cos^2 x\sin x + 3{,}5\sin^2 x - 2\sin x = 0$	[-10;10]
18	$-\cos^2 x\sin x + \sin^2 x - 5\sin x = 0$	[-10;10]
19	$tg^3 x - 2{,}15 tg^2 x + 1{,}15 tgx = 0$	[-10;10]
20	$1{,}5\sin^2 x - 0{,}5\cos^2 x\sin x + 4{,}5\sin x - 12 = 0$	[-10;10]
21	$x\ln x - \ln x^{0,2} = 0$	[-10;10]
22	$x^2 \ln(x^x) - x\ln(x0 + \ln(x^{0,25}) = 0$	[-10;10]
23	$\ln(x^x) - 0{,}1\ln(x) = 0$	[-10;10]
24	$x\ln(x-2) - 0.4\ln(x-2) = 0$	[-10;10]
25	$\ln(x) - x\ln 2 - 0{,}3\ln(x^2/4) = 0$	[-10;10]
26	$x\ln(2x) - 0{,}3\ln(x) - 0{,}3\ln 2 = 0$	[-10;10]
27	$x\ln(x^{0,5}) - \ln(x^{0,25}) = 0$	[-10;10]
28	$x\ln(x) - 0{,}4\ln(x^{0,5}) = 0$	[-10;10]
29	$\ln(x^{\ln(x)}) - \ln(x) = 0$	[-10;10]
30	$x\ln(x) - 2\ln(x) = 0$	[-10;10]

Таблица 7

Номер варианта	**Уравнение**	**Интервал**
1	$(0{,}2x)^3 = \cos x$	$[-10;10]$
2	$x - 10\sin x = 0$	$[-10;10]$
3	$2^{-x} = \sin x$	$[-10;10]$
4	$2^x - 2\cos x = 0$	$[-10;10]$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	$[-10;10]$
6	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	$[-10;10]$
7	$x\sin x - 1 = 0$	$[-10;10]$
8	$8\cos x - x = 6$	$[-10;10]$
9	$\sin x - 0{,}2x = 0$	$[-10;10]$
10	$10\cos x - 0{,}1x^2 = 0$	$[-10;10]$
11	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$	$[-10;10]$
12	$4\cos x + 0{,}3x = 0$	$[-10;10]$
13	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	$[-10;10]$
14	$1{,}2x^4 + 2x^3 - 24{,}1 = 13x^2 + 14{,}2x$	$[-10;10]$
15	$2x^2 - 5 = 2^x$	$[-10;10]$
16	$2^{-x} = 10 - 0{,}5x^2$	$[-10;10]$
17	$4x^4 - 6{,}2 = \cos 0{,}6x$	$[-10;10]$
18	$3\sin 8x = 0{,}7x - 0{,}9$	$[-10;10]$
19	$1{,}2 - \ln x = 4\cos 2x$	$[-10;10]$
20	$\ln(x+6{,}1) = 2\sin(x-1{,}4)$	$[-10;10]$
21	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	$[-10;10]$
22	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	$[-10;10]$
23	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	$[-10;10]$
24	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$	$[-10;10]$
25	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	$[-10;10]$
26	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$	$[-10;10]$
27	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$	$[-10;10]$
28	$x^3 - 12x + 6 = 0$	$[-10;10]$
29	$x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0$	$[-10;10]$
30	$2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$	$[-10;10]$

Таблица 8

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$x^2 + e^x = 2$	$[-10;10]$
2	$3\sin(x+0{,}7) - 0{,}5x = 0$	$[-10;10]$
3	$\cos x - (x-1)^2 = 0$	$[-10;10]$
4	$5\sin x = x$	$[-10;10]$
5	$x^2 + \cos(2+x) = 1$	$[-10;10]$
6	$x\ln(x+1) = 1$	$[-10;10]$
7	$\ln(x+1) - (x-2)^2 = 0$	$[-10;10]$
8	$2\ln x - 0{,}5x + 1 = 0$	$[-10;10]$
9	$(x-2)\ln x = 1$	$[-10;10]$
10	$\sin(x-0{,}5) - 2x + 0{,}5 = 0$	$[-10;10]$
11	$\cos(x+0{,}3) = x^2$	$[-10;10]$
12	$x^2 - 3\sin x = 0$	$[-10;10]$
13	$x\ln(x+2) = 2$	$[-10;10]$
14	$x^3 - 0{,}5 - \sin x = 0$	$[-10;10]$
15	$\sin(x+1) = 0{,}2x$	$[-10;10]$
16	$x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0$	$[-10;10]$
17	$x^3 - 4x^2 + 2 = 0$	$[-10;10]$
18	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$	$[-10;10]$
19	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$	$[-10;10]$
20	$2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$	$[-10;10]$
21	$x - 5\sin x - 1 = 0$	$[-10;10]$
22	$\ln x + 2x = 0$	$[-10;10]$
23	$4\sin x + 2x = -1$	$[-10;10]$
24	$2x + \ln x + 0{,}5 = 0$	$[-10;10]$
25	$x + 2 - e^x = 0$	$[-10;10]$
26	$2\cos x = 1 - x$	$[-10;10]$
27	$x = (x+1)^3$	$[-10;10]$
28	$x^3 - 2x + 2 = 0$	$[-10;10]$
29	$3x + \cos x + 1 = 0$	$[-10;10]$
30	$2 - x - \ln x = 0$	$[-10;10]$

Таблица 9

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1.	$x^3+2x^2+2=0$	[-10;10]
2.	$x^3 - 3x^2+9x - 10=0$	[-10;10]
3.	$x^3 - 2x+2=0$	[-10;10]
4.	$x^3 + 3x - 1=0$	[-10;10]
5.	$x^3+x - 3=0$	[-10;10]
6.	$x^3+0{,}4x^2+0{,}6x – 1{,}6=0$	[-10;10]
7.	$x^3 – 0{,}2x^2+0{,}4x – 1{,}4=0$	[-10;10]
8.	$x^3 – 0{,}1x^2+0{,}4x+2=0$	[-10;10]
9.	$x^3+3x^2+12x+3=0$	[-10;10]
10.	$x^3 – 0{,}2x^2+0{,}5x - 1=0$	[-10;10]
11.	$x^3 – 0{,}1x^2+0{,}4x+1{,}2=0$	[-10;10]
12.	$x^3 - 3x^2+6x - 5=0$	[-10;10]
13.	$x^3 – 0{,}2x^2+0{,}5x – 1{,}4=0$	[-10;10]
14.	$x^3+2x+4=0$	[-10;10]
15.	$x^3 - 3x^2+12x - 12=0$	[-10;10]
16.	$x^3+0{,}2x^2 +0{,}5x + 0{,}8=0$	[-10;10]
17.	$x^3+4x – 6=0$	[-10;10]
18.	$x^3 + 0{,}1x^2+0{,}4x – 1{,}2=0$	[-10;10]
19.	$x^3 + 3x^2+6x – 1=0$	[-10;10]
20.	$x^3 – 0{,}1x^2 + 0{,}4x – 1{,}5=0$	[-10;10]
21.	$x^3 - 3x^2+6x – 2=0$	[-10;10]
22.	$x^3 – 0{,}2x^2+0{,}3x – 1{,}2=0$	[-10;10]
23.	$x^3 - 3x^2+12x – 9=0$	[-10;10]
24.	$x^3 +0{,}2x^2 +0{,}5x - 2=0$	[-10;10]
25.	$x^3+3x+1=0$	[-10;10]
26.	$x^3 + 0{,}2x^2+0{,}5x\ 1{,}2=0$	[-10;10]
27.	$x^3-3x^2+9x + 2=0$	[-10;10]
28.	$x^3 – 0{,}1x^2+0{,}4x – 1{,}5=0$	[-10;10]
29.	$x^3 - 3x^2+6x + 3=0$	[-10;10]
30.	$x^3 – 0{,}1x^2+0{,}3x – 0{,}6=0$	[-10;10]

Таблица 10

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1.	$\ln x+(x+1)^3=0$	[-10;10]
2.	$x\cdot 2^x=1$	[-10;10]
3.	$\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}$	[-10;10]
4.	$x-\cos x+1=0$	[-10;10]
5.	$3x+\cos x+1=0$	[-10;10]
6.	$x+\ln x=0,5$	[-10;10]
7.	$2-x=\ln x$	[-10;10]
8.	$(x-1)^2=\frac{1}{2}e^x$	[-10;10]
9.	$(2-x)e^x=0,5$	[-10;10]
10.	$2,2x-2^x=0$	[-10;10]
11.	$x^2+4\sin x=0$	[-10;10]
12.	$2x-\lg x=7$	[-10;10]
13.	$5x-8\ln x=8$	[-10;10]
14.	$3x-e^x=0$	[-10;10]
15.	$x(x+1)^2=1$	[-10;10]
16.	$x=(x+1)^3$	[-10;10]
17.	$x^2=\sin x$	[-10;10]
18.	$x^3=\sin x$	[-10;10]
19.	$x=\sqrt{\lg(x+2)}$	[-10;10]
20.	$x^2=\ln(x+1)$	[-10;10]
21.	$2x+\lg x=-0,5$	[-10;10]
22.	$2x+\cos x=0,5$	[-10;10]
23.	$\sin 0,5x+1=x^2$; $x>0$	(0;10]
24.	$0,5x+\lg(x-1)=0,5$	[-10;10]
25.	$\sin(0,5+x)=2x-0,5$	[-10;10]
26.	$\lg(2+x)+2x-0,5$	[-10;10]
27.	$\lg(1+2x)=2-x$	[-10;10]
28.	$2\sin(x-0,6)=1,5-x$	[-10;10]
29.	$x+\lg(1+x)=1,5$	[-10;10]
30.	$x+\cos x=1$	[-10;10]

Таблица 11

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$2^x + 5x + 3 = 0$	[–10,10]
2	$\operatorname{arctg} x - [1/(3x^3)] = 0$	[–10,10]
3	$5^x + 3x = 0$	[–10,10]
4	$2e^x = 5x + 2$	[–10,10]
5	$3^{x-1} - 2 - x = 0$	[–10,10]
6	$2 \operatorname{arctg} x - 1/2x^3 = 0$	[–10,10]
7	$e^{-2x} - 2x + 1 = 0$	[–10,10]
8	$5^x - 6x - 3 = 0$	[–10,10]
9	$\operatorname{arctg}(x - 1) + 2x = 0$	[–10,10]
10	$2 \operatorname{arcctg} x - x + 3 = 0$	[–10,10]
11	$3^x + 2x - 2 = 0$	[–10,10]
12	$2 \operatorname{arctg} x - 3x + 2 = 0$	[–10,10]
13	$3^x + 2x - 5 = 0$	[–10,10]
14	$2e^x + 3x + 1 = 0$	[–10,10]
15	$3^{x-1} - 4 - x = 0$	[–10,10]
16	$\operatorname{arctg} x - [1/(3x^3)] = 0$	[–10,10]
17	$e^x + x + 1 = 0$	[–10,10]
18	$3^x - 2x + 5 = 0$	[–10,10]
19	$\operatorname{arctg}(x - 1) + 3x - 2 = 0$	[–10,10]
20	$2 \operatorname{arcctg} x - x + 3 = 0$	[–10,10]
21	$2^x - 3x - 2 = 0$	[–10,10]
22	$\operatorname{arcctg} x + 2 - 1 = 0$	[–10,10]
23	$3^x + 2x - 3 = 0$	[–10,10]
24	$2e^x - 2x - 3 = 0$	[–10,10]
25	$3^x + 2 + x = 0$	[–10,10]
26	$\operatorname{arcctg}(x - 1) + 2x - 3 = 0$	[–10,10]
27	$e^{-2x} - 2x + 1 = 0$	[–10,10]
28	$3^x - 2x - 5 = 0$	[–10,10]
29	$\operatorname{arctg}(x - 1) + 2x = 0$	[–10,10]
30	$3^x + 5x - 2 = 0$	[–10,10]

Таблица 12

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 – 5 = 0$	[–10,10]
2	$2x^3 – 9x^2 - 60x + 1 = 0$	[–10,10]
3	$x^4 – x – 1 = 0$	[–10,10]
4	$2x^4 – x^2 – 10 = 0$	[–10,10]
5	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 10 = 0$	[–10,10]
6	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	[–10,10]
7	$x^4 + 4x^3 – 8x^2 – 17 = 0$	[–10,10]
8	$x^4 – x^3 – 2x^2 + 3x – 3 = 0$	[–10,10]
9	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1 = 0$	[–10,10]
10	$3x^4 – 8x^3 – 18x^2 + 2 = 0$	[–10,10]
11	$2x^4 – 8x^3 + 8x^2 – 1 = 0$	[–10,10]
12	$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 – 1 = 0$	[–10,10]
13	$x^4 - 4x^3 – 8x^2 + 1 = 0$	[–10,10]
14	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 – 5 = 0$	[–10,10]
15	$2x^3 – 9x^2 - 60x + 1 = 0$	[–10,10]
16	$x^4 – x – 1 = 0$	[–10,10]
17	$2x^4 – x^2 – 10 = 0$	[–10,10]
18	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 10 = 0$	[–10,10]
19	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	[–10,10]
20	$x^4 + 4x^3 – 8x^2 – 17 = 0$	[–10,10]
21	$x^4 – x^3 – 2x^2 + 3x – 3 = 0$	[–10,10]
22	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1 = 0$	[–10,10]
23	$3x^4 – 8x^3 – 18x^2 + 2 = 0$	[–10,10]
24	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 – 5 = 0$	[–10,10]
25	$2x^3 – 9x^2 - 60x + 1 = 0$	[–10,10]
26	$x^4 – x – 1 = 0$	[–10,10]
27	$2x^4 – x^2 – 10 = 0$	[–10,10]
28	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 10 = 0$	[–10,10]
29	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$	[–10,10]
30	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1 = 0$	[–10,10]

Таблица 13

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1.	$x^4 - 3x - 20 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
2.	$x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
3.	$x^3 + 3x + 5 = 0$	[-10;10]
4.	$x^4 + 5x - 7 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
5.	$x^3 - 12x - 5 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
6.	$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
7.	$x + e^x = 0$	[-10;10]
8.	$x^5 - x - 2 = 0$	[-10;10]
9.	$x^3 - 10x + 5 = 0 \quad (x<0)$	[-10;10]
10.	$2 - \ln x - x = 0$	[-10;10]
11.	$x^3 + 2x - 7 = 0$	[-10;10]
12.	$x^3 + x^2 - 11 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
13.	$x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
14.	$2e^x + x - 1 = 0$	[-10;10]
15.	$x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x<0)$	[-10;10]
16.	$2x^3 + x^2 - 4 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
17.	$e^x - x - 2 = 0$	[-10;10]
18.	$(½)e^x - x - 1 = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
19.	$x^2 - \cos x = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
20.	$x^2 + \ln x = 0$	[-10;10]
21.	$\ln x + 0{,}5x - 1 = 0$	[-10;10]
22.	$\ln x - 0{,}5x + 1 = 0 \quad (x>1)$	[-10;10]
23.	$\frac{1}{1+x^2} - \ln(x) = 0$	[-10;10]
24.	$\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^x}{2} = 0 \quad (x>0)$	[-10;10]
25.	$\frac{x}{2+x} - \ln(x) = 0$	[-10; 10]

Таблица 14

Номер варианта	Уравнение	Интервал
1.	$\arccos x^2 - x = 0$	[-10; 10]
2.	$\ln x - 1/(1+x^2) = 0$	[-10; 10]
3.	$\ln\ln x - e^{-x^2} = 0$	[-10; 10]
4.	$\mathrm{arctg}(1/x) - x^2 = 0$	[-10; 10]
5.	$x - e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}} = 0$	[-10; 10]
6.	$x^4 - 13x^2 + 36 - 1/x = 0$	[-10; 10]
7.	$2x^2 - x^4 - 1 - \ln x = 0$	[-10; 10]
8.	$x - (\mathrm{arctg} x)^{-1} = 0$	[-10; 10]
9.	$x^3 - 3x - 2e^{-x} = 0$	[-10; 10]
10.	$x - \mathrm{arctg}(1/x) = 0$	[-10; 10]
11.	$x - \ln\left[x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1}\right] = 0$	[-10; 10]
12.	$\sin x^2 - 6x + 1 = 0$	[-10; 10]
13.	$\cos x^2 - 10x = 0$	[-10; 10]
14.	$\arccos(e^x-3) - x = 0$	[-10; 10]
15.	$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - e^{-x^2} = 0$	[-10; 10]
16.	$e^x - \arccos\sqrt{x} = 0$	[-10; 10]
17.	$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = 0$	[-10; 10]
18.	$\ln^2 x - 1/x = 0$	[-10; 10]
19.	$\lg\ln x - 1/(1+x^2) = 0$	[-10; 10]
20.	$\mathrm{arctg} x - 1/x = 0$	[-10; 10]
21.	$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \cos\left(x^2\right) = 0$	[-10; 10]
22.	$e^{-x^2} - \sqrt{x} = 0$	[-10; 10]
23.	$\mathrm{arctg} x - \ln x = 0$	[-10; 10]
24.	$x - \frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36} = 0$	[-10; 10]
25.	$\frac{1}{3 + 2\cos x} - x^3 = 0$	[-10; 10]

Продолжение таблицы 14

Номер варианта	Уравнение	Интервал
26	$x - e^{2x^2 - x^4 - 1} = 0$	[-10; 10]
27.	$e^x - 3 - \cos x = 0$	[-10; 10]
28.	$e^x - \mathrm{arctg}x = 0$	[-10; 10]
29.	$\frac{1+x}{1-x} - e^{1/x} = 0$	[-10; 10]
30.	$\arccos x^2 - x^3 = 0$	[-10; 10]

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что дает **отделение** корней?
2. Можно ли аналитически отделить корень функции с разрывами?
3. Можно ли произвольно задавать значения на отрезке по оси x для отделения корней?
4. Что при отделении корней называют критическими точками?
5. Сколько корней может быть у функции, если у нее существует лишь одна критическая точка?
6. Какие основные проблемы могут встретиться при аналитическом отделении корней?
7. В чем заключается геометрический смысл метода деления отрезка пополам?
8. Всегда ли позволяет метод деления отрезка пополам вычислить отделенный корень уравнения с заданной погрешностью?
9. Как выбираются концы отрезка следующего интервала в методе деления отрезка пополам?

10. Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы методом деления отрезка пополам можно было гарантированно решить уравнение $f(x)=0$?

11. Что необходимо для нахождения хотя бы одного действительного корня уравнения $f(x)=0$ методом деления отрезка пополам?

12. Можно ли найти корень методом деления отрезка пополам, если он находится на границе интервала?

13. Какие корни позволяет определить метод хорд?

14. В чем заключается геометрический смысл метода хорд?

15. Всегда ли метод хорд позволяет вычислить отделенный корень с заданной погрешностью?

16. Как выбираются концы отрезка интервала в методе хорд?

17. Какими свойствами должна обладать функция $f(x)$ для того, чтобы методом хорд можно решить уравнение $f(x)=0$?

18. Какой конец хорды неподвижен при реализации метода?

19. В чем заключается геометрическая интерпретация метода Ньютона?

20. Исходя из чего выбирается в методе Ньютона первое приближение $x^{(0)}$?

21. Как выбираются концы "закрепленного" отрезка интервала в методе Ньютона при $f \cdot f'' < 0$ на концах интервала?

22. Как выбираются концы "закрепленного" отрезка интервала в методе Ньютона при $f \cdot f'' > 0$ на концах интервала?

23. Что необходимо для того, чтобы уравнение $f(x)=0$ решалось методом Ньютона?

24. В каких случаях применение метода Ньютона не рекомендуется?

25. В чем заключается геометрический смысл метода параболической аппроксимации?

26. Последовательность каких процессов представляет собой метод параболической аппроксимации?

27. Как выбираются концы отрезка интервала в методе параболической аппроксимации на втором и последующих шагах?

28. В каких ситуациях метод параболической аппроксимации не найдет корень?

29. Можно ли утверждать, что в методе парабол последовательные приближения могут лежать» по одну сторону от корня?

30. Может ли метод параболической аппроксимации найти корень, если на начальном участке находится несколько корней?

31. Какой функцией заменяется левая часть уравнения $f(x)=0$ в методе итераций?

32. Что называется сходимостью метода итераций?

33. С какой стороны может осуществляться приближение к корню в процессе итераций - слева или справа?

34. Если на заданном отрезке имеется два корня, то что можно сказать о сходимости метода итераций на этом отрезке?

35. Что означает несходимость процесса итераций?

36. Есть ли отличие условий окончания поиска при "монотонном" и при "колебательном" приближении к корню?

6. Образец оформления курсового проекта по курсу «Вычислительная математика (Информатика)» по теме «Методы решения нелинейных уравнений» приведён ниже.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«МАТИ» - Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра «Высшей математики»

Курсовой проект
по курсу «Вычислительная математика (Информатика.
Раздел «Численные методы» »

Часть 2 «Методы решения нелинейных уравнений»

Вариант 9

Выполнил М. Князев
Группа: 4МТМ-2ДБ-009
Преподаватель Е.К. Гурьев

Москва 2007

Содержание

Задание.

Найти все корни уравнения $2arctg\ x\text{-}0.5x^3 = 0$ с точностью 10^{-6} на отрезке $[-10,10]$.

О.Д.З.: $x \in (-\infty,+\infty)$

1. Постановка задачи:

Значение переменной х, при котором уравнение $f(x)=0$ является тождеством, называется решением уравнения или корнем уравнения. Большое прикладное значение имеют методы приближенного решения уравнения с заданной точностью. Решение задачи можно разбить на 2 этапа:

1) отделение корней, т.е. выделение промежутков внутри которых содержится только один корень уравнения;

2) вычисление корня, принадлежащего выделенному промежутку с заданной точностью.

2. **Отделение корней**

Решение задачи отделения корней для непрерывной функции основано на том, что если функция на концах отрезка $[a,b]$ имеет значение разных знаков, то внутри этого отрезка функция проходит через нуль, т.е. содержится корень этого уравнения. Для отделения корней используется табличный метод. Область предполагаемого нахождения корней разбивается на равные отрезки длиной h и вычисляются значения функции на концах отрезка. Если выполняется условие $f(x)f(x+h) \le 0$, то корень находится внутри или на концах отрезка $[x, x+h]$. Геометрическая интерпретация процедуры отделения корней приведена на рис.1. Блок-схему алгоритма отделения корней см. на рис.2. Программа отделения корней otd приводится ниже.

```
program otd;
uses crt;
const a=-10;
 b=10;
 h=0.7;
```

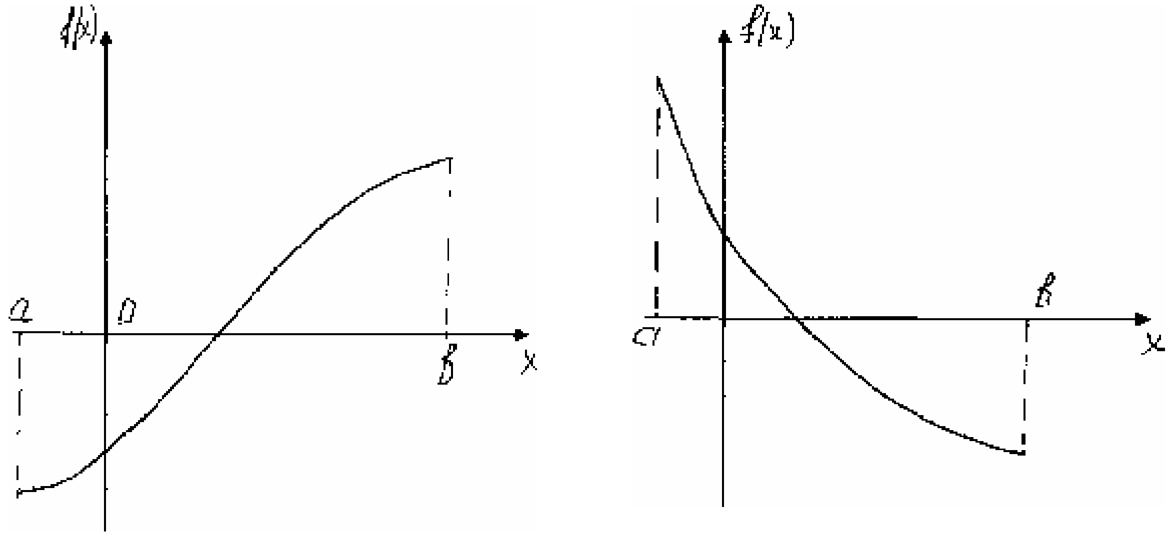


Рис.1. Геометрическая интерпретация метода отделения корней

```
function f(x:real):real;
begin
f:=2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
var a1,b1:real;
y1,y2:real;
begin
clrscr;
a1:=a;
y1:=f(a1);
while a1<=b do begin
b1:=a1+h;
y2:=f(b1);
if y1*y2<=0 then Writeln('Корень находится на отрезке
[',a1:4:6,',',b1:4:6,']');
a1:=b1;
y1:=y2;
end;
readln
end.
```

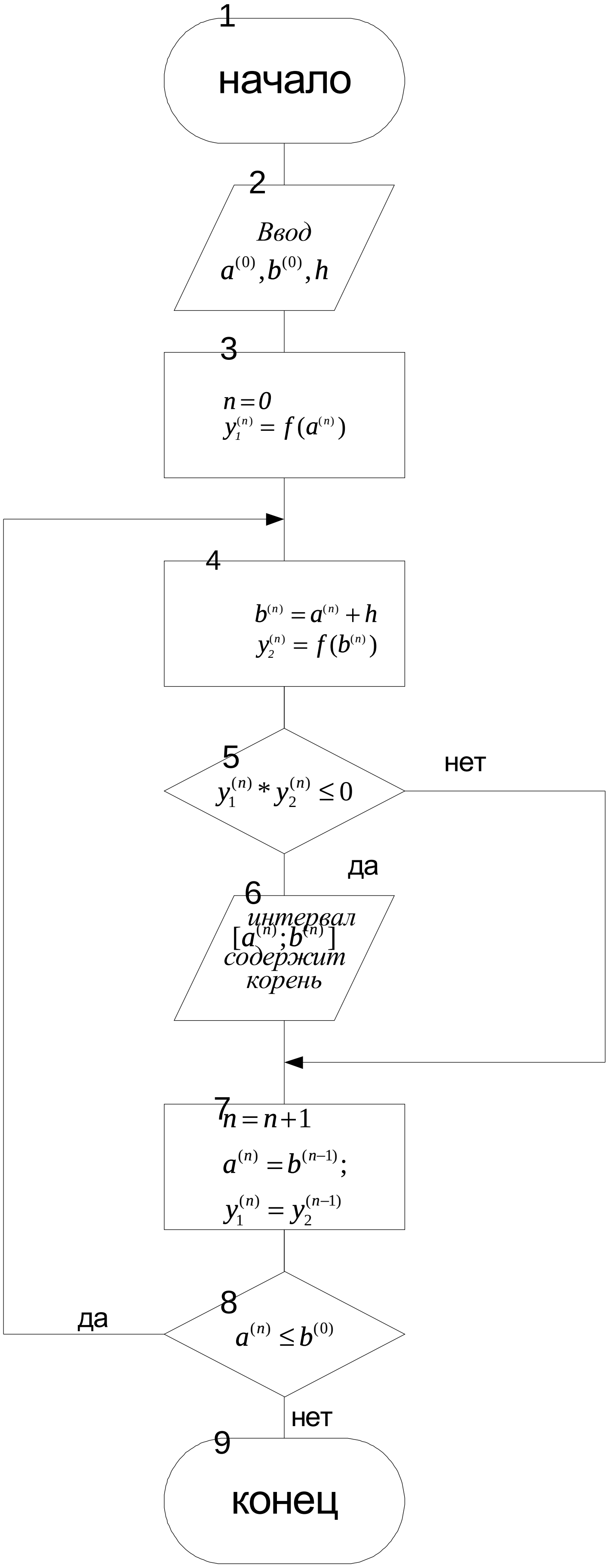


Рис. 2. Блок-схема алгоритма отделения корней

Ответ:

Корни находятся на отрезках [-1.600000,-0.900000];

[-0.200000,0.500000]; [1.200000,1.900000].

3. Итерационное уточнение корней.

Будем далее считать, что корень $\bar{x}$ отделен на отрезке $[a,b]$. Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения $x^{(0)}$. Каждый такой шаг называется итерацией. На этом этапе для вычисления каждого из корней с точностью $e>0$ используется тот или иной итерационный метод, позволяющий построить последовательность $x^{(0)}$, $x^{(1)},\ldots,x^{(n)},\ldots$ приближений к корню $\bar{x}$.

3.1. Метод деления отрезка пополам.

Метод деления отрезка пополам заключается в последовательном делении отрезка локализации $[a,b]$ и выборе той половины отрезка, которая содержит искомый корень $\bar{x}$, из условия $f(a)f(b)\leq 0$. Здесь точка $x^{(0)}$ выбирается как середина отрезка $[a,b]$ - $x^{(0)}=\dfrac{a+b}{2}$, точка $x^{(1)}$ - как середина отрезка $[a,x^{(0)}]$, где $x^{(1)}=\dfrac{a+x^{(0)}}{2}$, и т.д. В качестве критерия окончания итераций используется условие $\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right|<e$. Геометрическая интерпретация метода деления отрезка пополам для случая, когда $f(a)<0$, f(b)>0, приведена на рис.3. Блок-схему алгоритма метода деления отрезка пополам см. на рис.4.

Этот метод всегда сходится, прост и предъявляет к функции $f(x)$ минимальные требования: для его применения достаточно непрерывности функции $f(x)$, выполнения неравенства $f(a)f(b)\leq 0$ и верного определения знака $f(x)$. При использовании метода деления отрезка пополам принципиально важным является правильное определение знака функции $f(x)$. Когда $x^{(n)}$ попадает в интервал неопределенности $(x-e, x-e)$, знак вычисляемого значения $f(x)$ не обязан быть верным и последующие итерации не имеют смысла.

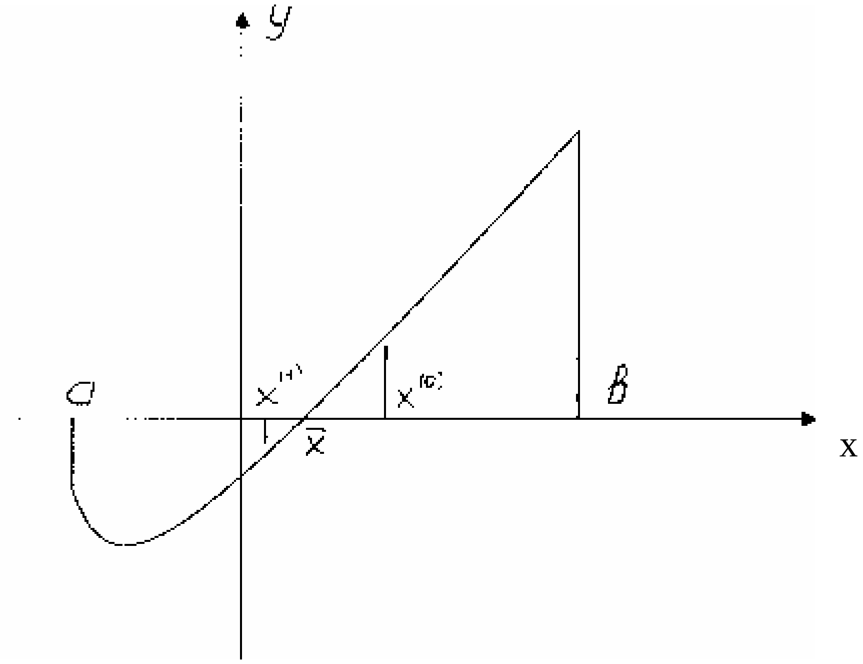


Рис.3. Геометрическая интерпретация метода деления отрезка пополам.

```
program dichot;
uses crt;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
var x,a1,b1:real;
y1,y2,y:real;
begin
clrscr;
a1:=a;
b1:=b;
```

y1:=f(
a1);

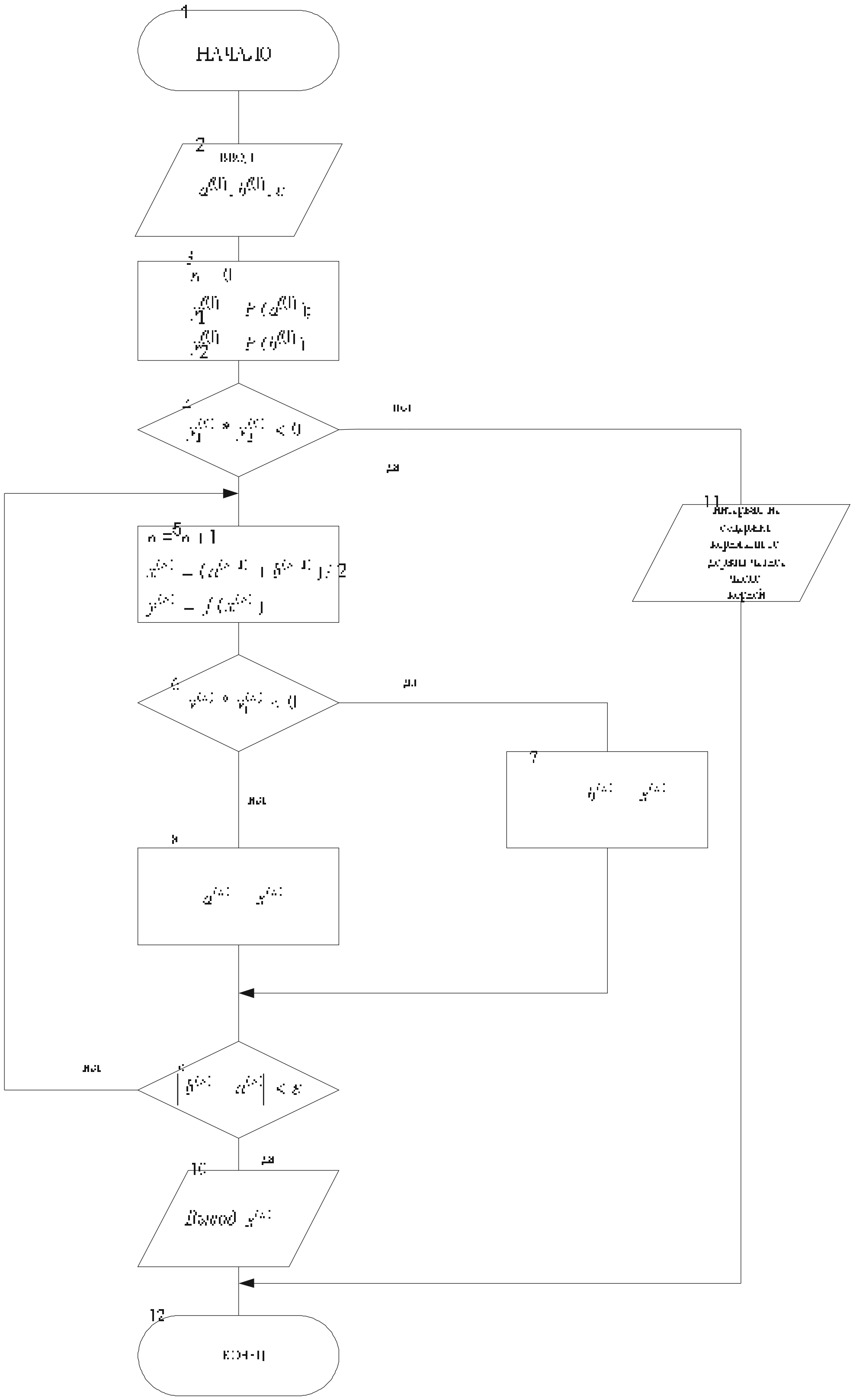


Рис. 4. Блок-схема алгоритма метода деления отрезка пополам

```
y2:=f(b1);
x:=a1+(b1-a1)/2;
while abs(b1-a1)>eps do
begin
x:=a1+(b1-a1)/2;
y:=f(x);
if y1*y<0 then b1:=x
else if y=0 then begin
a1:=x;
b1:=x
end
else a1:=x;
end;
x:=a1+(b1-a1)/2;
writeln (' корень уравнения  x=',x:2:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = -1.592757$;

на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;

на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

3.2. Метод простой итерации

Для решения уравнения $f(x)=0$ составляют равносильное ему уравнение вида $x = j(x)$, где $j(x) = x + a\,f(x)$, причем a является числом.

Такое преобразование называется приведением уравнения $f(x)=0$ к виду, удобному для итераций. Функция $j(x)$ называется итерационной функцией.

Задавая начальное приближение к корню уравнения $x^{(0)}$, составляют последовательность чисел $x^{(0)}$, $x^{(1)} = j(x^{(0)})$, $x^{(2)} = j(x^{(1)})$,…, $x^{(n)} = j(x^{(n-1)})$,…. Тогда предел этой последовательности $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} j(x^{(n)})$, если он существует, является корнем данного уравнения, а числа

$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ называются последовательными приближениями к корню. Итерационное соотношение имеет вид $x^{(n)} = \varphi(x^{(n-1)})$, $n \geq 0$. Геометрическая интерпретация метода простой итерации приведена на рис.5.

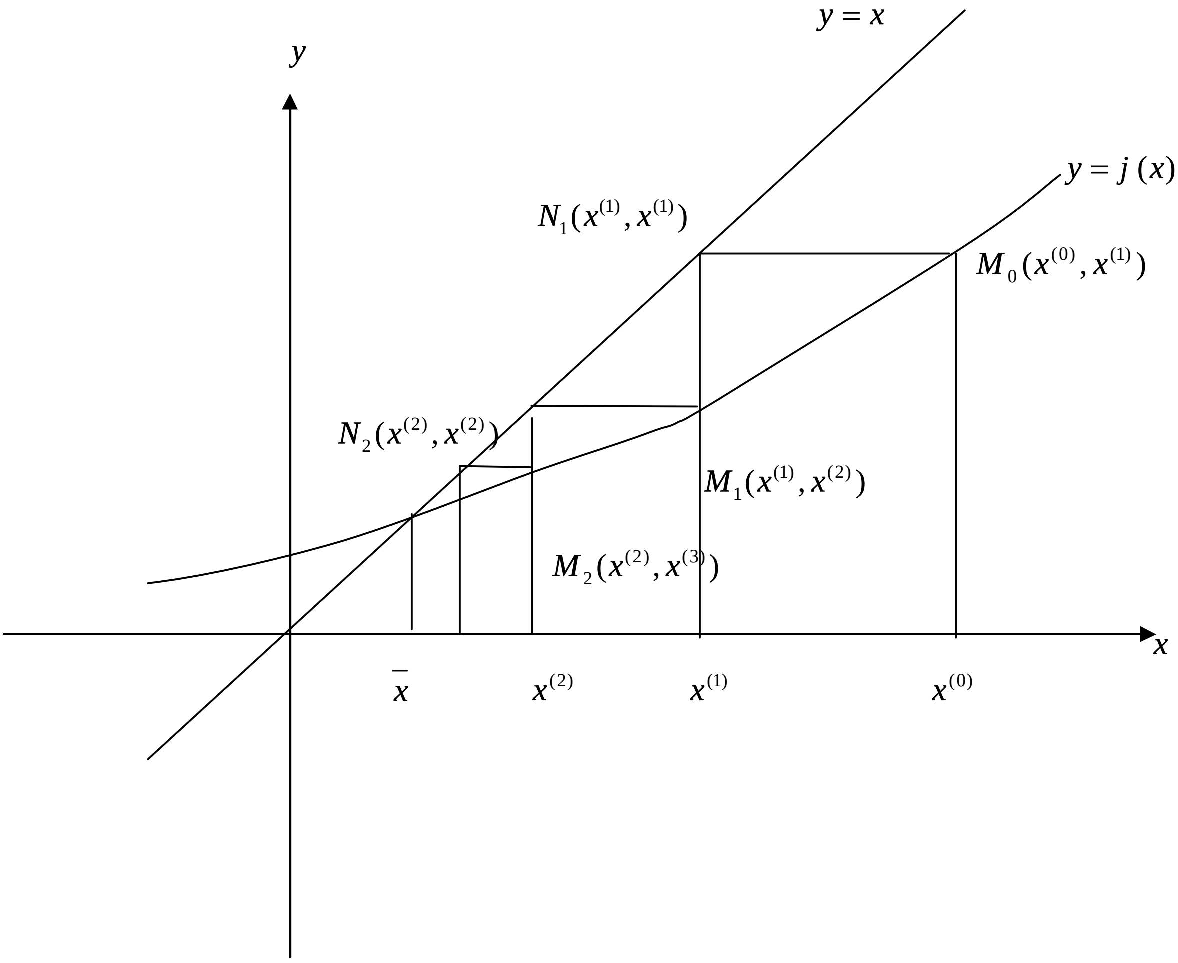


Рис. 5. Геометрическая интерпретация метода простой итерации.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации является выполнение соотношения $|\varphi'(x)| < 1$. Число α, обеспечивающее сходимость итерационного процесса, выбирается из этого условия и для него на отрезке локализации $[a, b]$ имеет место следующая оценка

$$a \in \begin{cases} (-\dfrac{2}{M},0) \text{ ï ðè } f'(x)>0, \\ (0,\dfrac{2}{m}) \quad \text{ ï ðè } f'(x)<0 \end{cases}, \text{ где } M=\max_{[a,b]}\left|f'(x)\right|, \quad m=\min_{[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

Условием окончания итерационного процесса является соотношение $\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right|<e$. Блок-схему алгоритма метода простой итерации см. на рис. 6. Далее приводится программа iteratio, реализующая этот алгоритм.

```
program iteratio;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp:real;
begin
clrscr;
x:=a;
repeat xp:=x;
x:=xp+0.0769*f(xp);
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('корень уравнения x=',x:4:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке [-1.600000,-0.900000] корень уравнения $\bar{x}=-1.592757$ при $a=0.0769$;

на отрезке [-0.200000,0.500000] корень уравнения $\bar{x}=0.000000$ при $a=-0.0769$;

на отрезке [1.200000,1.900000] корень уравнения $\bar{x}=1.592757$ при $a=0.0769$.

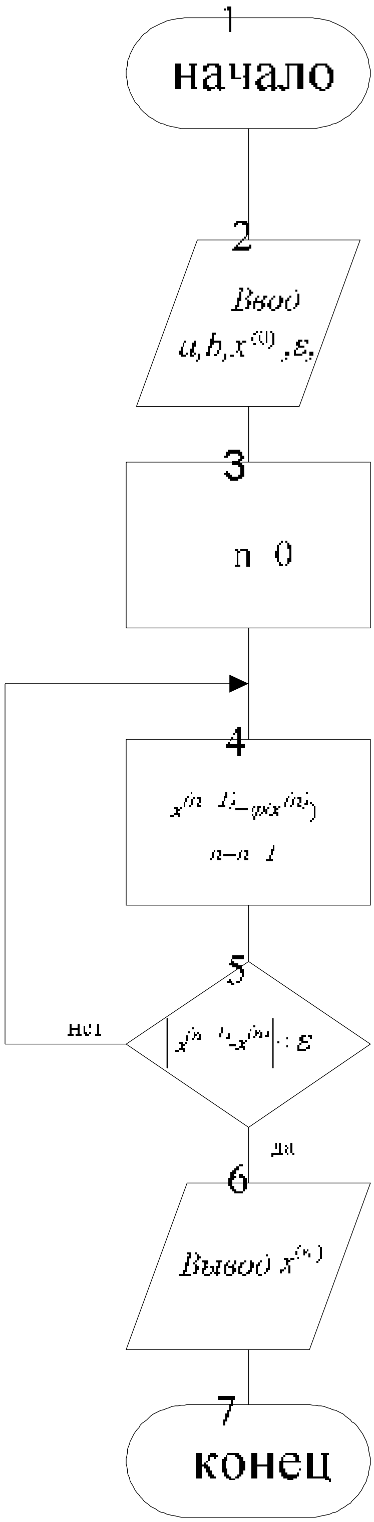


Рис. 6. Блок-схема алгоритма метода простой итерации

3.3. Метод Ньютона.

Получим расчетную формулу метода Ньютона из простых геометрических соображений. Пусть $x^{(0)}$- заданное начальное приближение к корню $\bar{x}$. В точке $M_0(x^{(0)}, f(x^{(0)})$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$, определяемую уравнением $y = f\left(x^{(0)}\right) + f'\left(x^{(0)}\right)\left(x - x^{(0)}\right)$.

Новое приближение $x^{(1)}$ к корню $\bar{x}$ дает точка пересечения касательной с осью ОХ, которая находится из уравнения $f\left(x^{(0)}\right) + f'\left(x^{(0)}\right)\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right) = 0$. При $f'\left(x^{(0)}\right) \neq 0$ получим $x^{(1)} = x^{(0)} - \dfrac{f\left(x^{(0)}\right)}{f'\left(x^{(0)}\right)}$.

Проводя касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_1(x^{(1)}, f\left(x^{(1)}\right))$, найдем следующее приближение к корню

$x^{(2)} = x^{(1)} - \dfrac{f\left(x^{(1)}\right)}{f'\left(x^{(1)}\right)}$ при условии $f'\left(x^{(1)}\right) \neq 0$.

Продолжая этот процесс, приходим к расчетной формуле метода Ньютона $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}, n \geq 0$.

Геометрическая интерпретация метода Ньютона приведена на рис.7. Критерием окончания итераций является условие $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < e$. Скорость сходимости метода Ньютона квадратичная. Метод Ньютона является частным случаем метода простой итерации с итерационной функцией $j(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Блок-схему алгоритма метода Ньютона см. на рис. 6.

Далее приводится программа newton решения уравнения методом Ньютона.

```
program newton;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
function df(x:real):real;
```

```
begin
df:=2/(1+x*x)-1.5*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp:real;
n:integer;
begin
clrscr;
x:=a;
repeat
xp:=x;
x:=xp-f(xp)/df(xp);
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('корень уравнения x=',x:2:4);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = -1.592757$;

на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;

на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

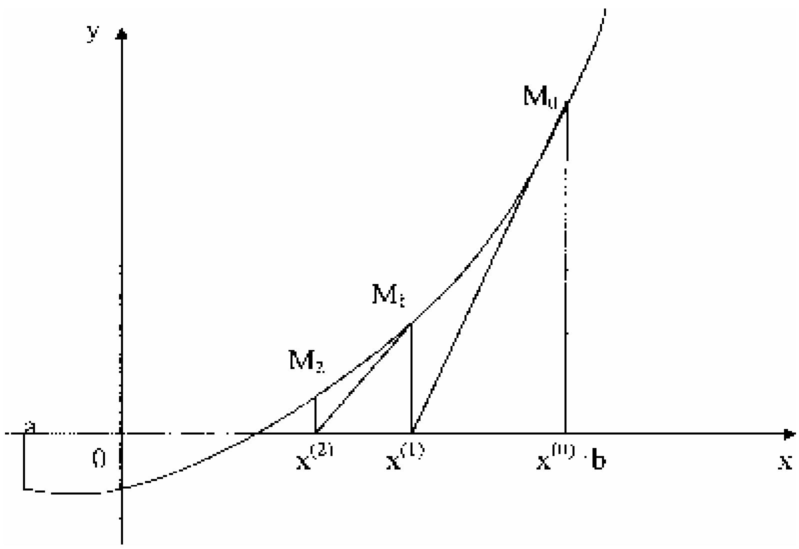


Рис.7. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

3.4. Метод хорд.

Метод хорд является частным случаем метода Ньютона. Рассмотрим приближённое равенство $f'(x^{(n)}) \approx \dfrac{f(z^{(n)}) - f(x^{(n)})}{z^{(n)} - x^{(n)}}$. Это равенство верно при условии $z^{(ï)} \approx x^{(ï)}$ и следует из определения производной $f'(x) = \lim\limits_{z \to x} \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$. Пусть c - фиксированная точка в окрестности простого корня $\bar{x}$. Заменим в расчётной формуле метода Ньютона производную $f'(x^{(n)})$ правой частью приближённого равенства, полагая $z^{(ï)} = ñ$. В результате получаем расчётную формулу метода хорд $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{(c - x^{(n)}) f(x^{(n)})}{f(c) - f(x^{(n)})}$, $n \geq 0$.

Метод обладает линейной скоростью сходимости. Применим только для монотонных функций. Геометрическая интерпретация метода хорд приведена на рис.8. Условием окончания итерационного процесса является соотношение $\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < e$. Метод хорд является частным случаем метода простой итерации с итерационной функцией $j(x) = x - \dfrac{(c - x) f(x)}{f(c) - f(x)}$. Блок-схему алгоритма метода хорд см. на рис. 6.

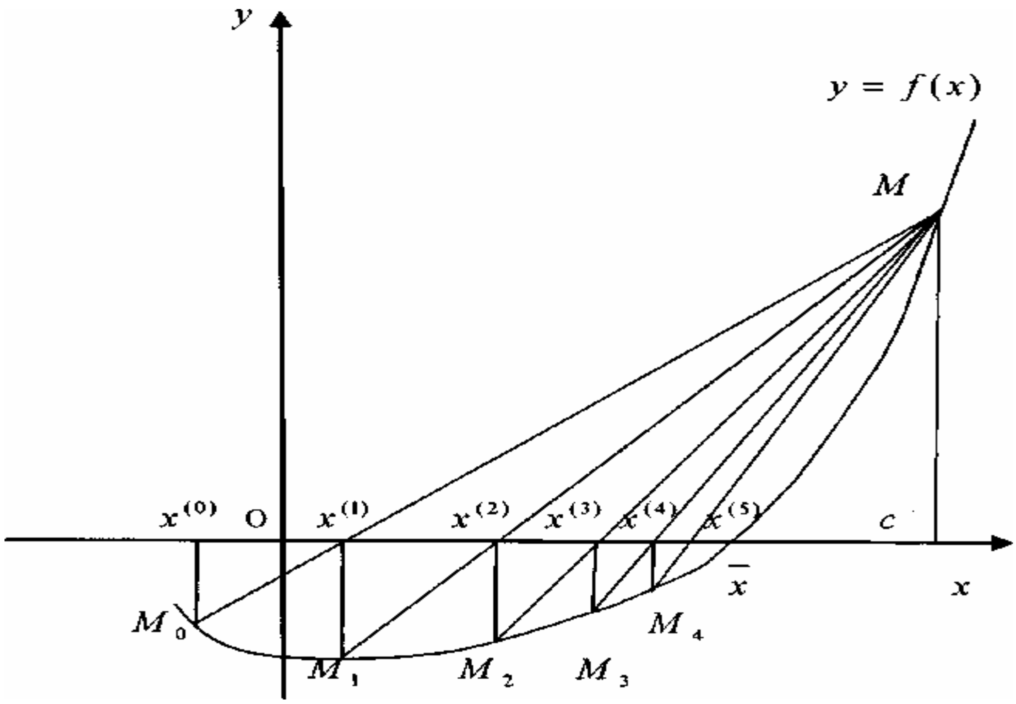


Рис.8. Геометрическая интерпретация метода хорд

Ниже приведена программа hord, реализующая рассмотренный алгоритм.

```
program hord;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp,c:real;
begin
clrscr;
x:=a;
repeat
xp:=x;
x:=xp-f(xp)*(xp-c)/(f(xp)-f(c));
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('корень уравнения x=',x:11:6);
readln
end.
```

Ответ:
на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = -1.592757$;
на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;
на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

3.5. Метод секущих.

Заменим производную $f'(x^{(n)})$ в формуле метода Ньютона приближением $f'(x^{(n)}) \approx \frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})}{x^{(n-1)} - x^{(n)}}$ (левая производная) и получим расчетную формулу метода секущих

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)}),\ n \geq 1.$$

Этот метод двухшаговый, так как для нахождения очередного приближения $x^{(n+1)}$ требуется знание двух предыдущих приближений $x^{(n)}$ и $x^{(n-1)}$. Для того чтобы начать вычисления, надо задать два начальных приближения $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$. Очередное приближение $x^{(n+1)}$ получается как абсцисса точки пересечения с осью OX секущей, соединяющей точки $M_{n-1}(x^{(n-1)}, f(x^{(n-1)}))$ и $M_n(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$ графика функции $y = f(x)$. Геометрическая интерпретация метода секущих приведена на рис. 9. Условием окончания итерационного процесса является соотношение $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < e$. Метод секущих является частным случаем метода простой итерации с итерационной функцией $j(x) = x - \frac{(x^{(n)} - x) f(x)}{f(x^{(n)}) - f(x)}$. Блок-схему алгоритма метода секущих см. на рис. 6. Ниже приводится программа sekuch, реализующая этот алгоритм.

```
program sekuch;
uses crt;
function f(x:real):real;
begin
f:= 2*arctan(x)-0.5*x*x*x
end;
const a=-1.6;
b=-0.9;
eps=0.000001;
var x,xp,c:real;
begin
clrscr;
```

```
x:=a;
c:=x+(b-a)/100;
```

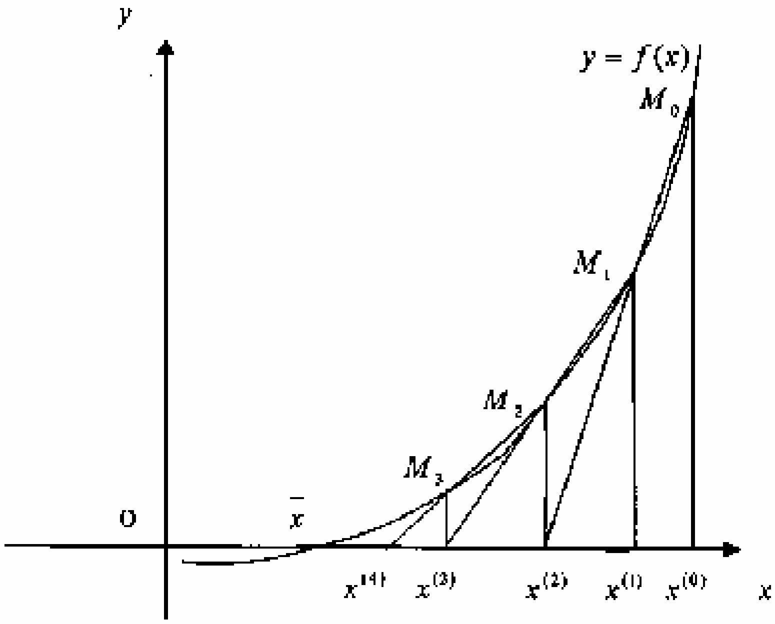


Рис. 9. Геометрическая интерпретация метода секущих

```
repeat
xp:=c-f (c)*(c-x)/(f( c)-f(x));
x:=c;
c:=xp;
until abs(x-xp)<=eps;
writeln ('корень уравнения x=',x:11:6);
readln
end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = -1.592757$;
на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;
на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

3.6. Метод обратной квадратичной интерполяции.

Пусть, как и ранее, корень $\bar{x}$ уравнения $f(x)=0$ отделен на отрезке $[a,b]$. *Функция* $f(x)$ предполагается строго монотонной. Предположим, что приближения $x^{(n-2)}, x^{(n-1)}, x^{(n)}$ к корню $\bar{x}$ уже найдены и различны, а в силу этого соответствующие значения $f(x^{(n-2)}), f(x^{(n-1)}), f(x^{(n)})$ функции $f(x)$ различны.

Рассмотрим обратную задачу интерполяции. В качестве независимой переменной будем рассматривать значения функции $f(x)$, а в качестве зависимой переменной - соответствующие им значения x. Построим интерполяционный многочлен второго порядка $P_2(y)=0$ от переменной y, удовлетворяющий условиям $x^{(i)} = P_2(f(x^{(i)}))$ для $i=n-2;n-1;n$. За очередное приближение к корню $\bar{x}$ принимается $x^{(n+1)} = P_2(0)$. Естественно предположить, что многочлен $P_2(y)$ записывается в виде $P_2(y)=a_1y^2+b_1y+c_1$. Коэффициенты этого полинома a_1, b_1, c_1 определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1(f(x^{(n-2)}))^2 + b_1 f(x^{(n-2)}) + c_1 = x^{(n-2)}, \\ a_1(f(x^{(n-1)}))^2 + b_1 f(x^{(n-1)}) + c_1 = x^{(n-1)}, \\ a\ (f(x^{(n)}))^2 + b_1 f(x^{(n)}) + c_1 = x^{(n)} \end{cases}$$

Решение этой системы записывается следующим образом

$$a_1 = \frac{x^{(n-2)}}{(f(x^{(n-2)}) - f(x^{(n-1)}))(f(x^{(n-2)}) - f(x^{(n)}))} + \frac{x^{(n-1)}}{(f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)}))(f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)}))} +$$

$$+ \frac{x^{(n)}}{(f(x^{(n)}) - f(x^{(n-2)}))(f(x^{(n)}) f(x^{(n-1)}))}$$

$$b_1 = \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})} + a_1(f(x^{(n-2)}) + f(x^{(n-1)})),$$

$$c_1 = x^{(n-2)} - b_1 f(x^{(n-2)}) - a_1(f(x^{(n-2)}))^2.$$

Здесь вычисление корней квадратного уравнения не требуется. Очередное приближение к корню $\bar{x}$ находится следующим образом $x^{(n+1)} = c_1$. Метод обратной квадратичной интерполяции является трехшаговым. Для начала его работы надо задать три начальных приближения $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}$. Геометрическая интерпретация метода обратной квадратичной интерполяции приведена на рис. 10. Этот метод обладает локальной сходимостью с порядком $p \approx 1.839$, так как имеет место следующая оценка скорости сходимости $\left|x^{(n+1)}-\overline{x}\right| \le C\left|x^{(n)}-\overline{x}\right|^{p}$, где $C>0, p=1.839$. В качестве критерия окончания итерационного процесса используется соотношение вида $\left|x^{(n+1)}-x^{(n)}\right|<e$.

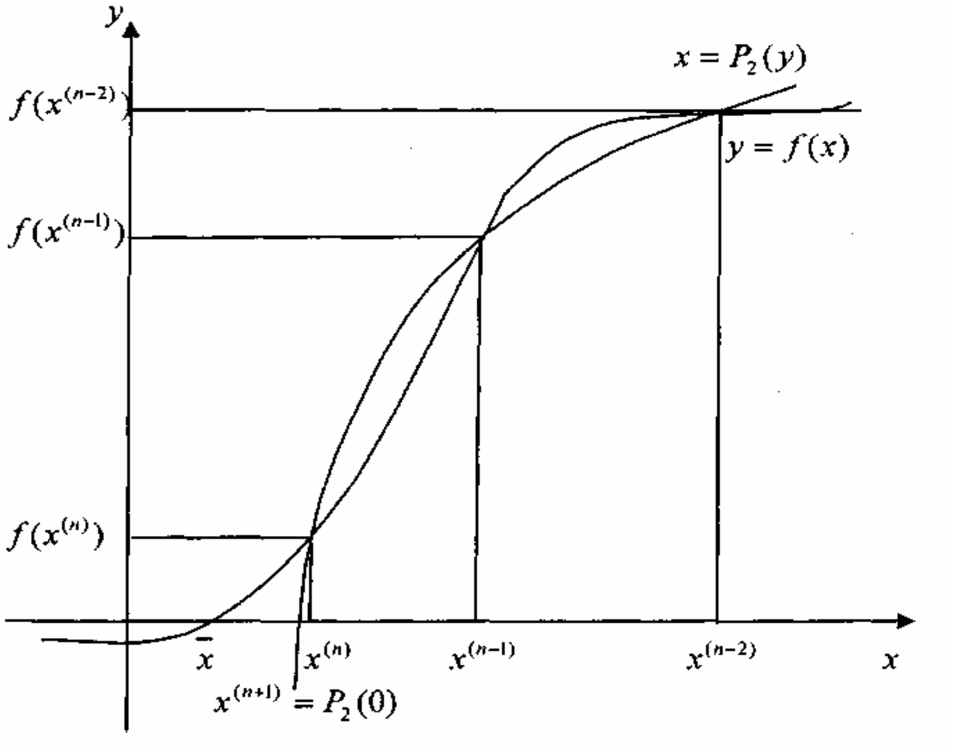


Рис.10. Геометрическая интерпретация метода обратной квадратичной интерполяции

Блок-схему алгоритма метода обратной квадратичной интерполяции см. на рис. 11.

Программа obrparabolinterp реализующая этот алгоритм для уравнения $2arctg\ x\text{-}0.5x^3=0$, приведена ниже.

```
program obrparabolinterp;
uses crt;
const n=100;
    a=-1.6;
    b=-0.9;
```

```
      eps=0.000001;
label 10;
var
   x,y0,y1,y2,a1,b1,c1:real;
   i:integer;
   x0:array[0..n] of real;
function f(x:real):real;
begin
  f:=2*arctan(x)-0.5*x*x*x;
end;
begin
clrscr;
x0[0]:=a;x0[1]:=(a+b)/2;x0[2]:=b;
y0:=f(x0[0]); y1:=f(x0[1]); y2:=f(x0[2]);
i:=0;
while  abs(x0[i+2]-x0[i+1])>=eps do
begin
if (y0=y1)or(y1=y2)or(y2=y0) then
                         begin
writeln('Уравнение не имеет решений, так как y0=y1 или y1=y2
или y2=y0');
                             goto 10;
                         end;
a1:=x0[i]/((y0-y1)*(y0-y2))+x0[i+1]/((y1-y0)*(y1-y2))+
   x0[i+2]/((y2-y0)*(y2-y1));
b1:=(x0[i+1]-x0[i])/(y1-y0)-a1*(y1+y0);
c1:=x0[i]-b1*y0-a1*sqr(y0);
x0[i+3]:=c1;
```

```
i:=i+1;
if (x0[i+2]<a)or(x0[i+2]>b) then
                        begin
writeln('Корень находится вне отрезка [a,b]: уравнение не имеет
решений');
                             goto 10;
                        end;
y0:=f(x0[i]); y1:=f(x0[i+1]); y2:=f(x0[i+2]);
end;
writeln('Корень уравнения x0[',i+2,']=',x0[i+2]:11:6);
readln;
10:end.
```

Ответ:

на отрезке $[-1.600000,-0.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = -1.592757$;
на отрезке $[-0.200000,0.500000]$ корень уравнения $\bar{x} = 0.000000$;
на отрезке $[1.200000,1.900000]$ корень уравнения $\bar{x} = 1.592757$.

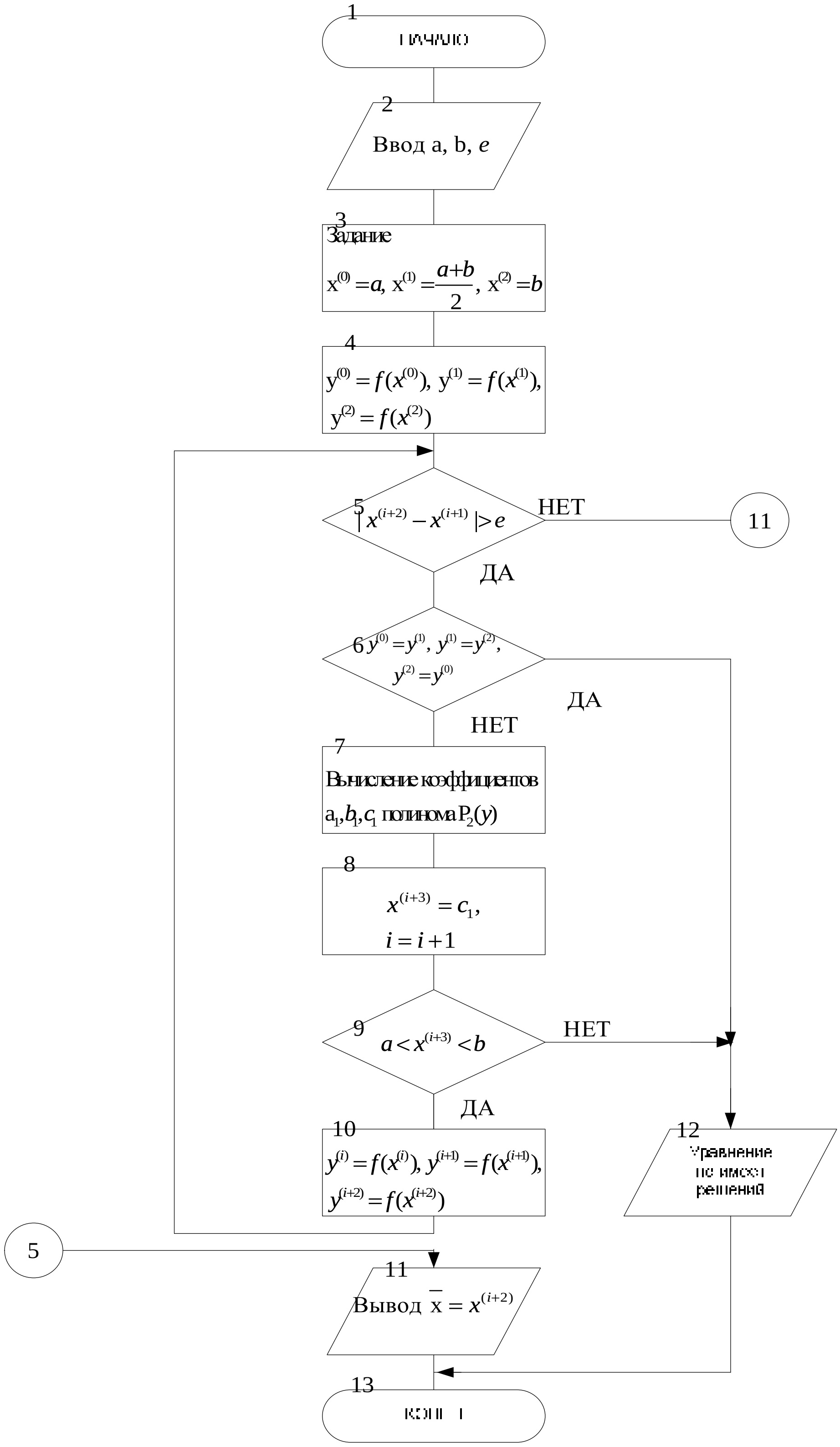
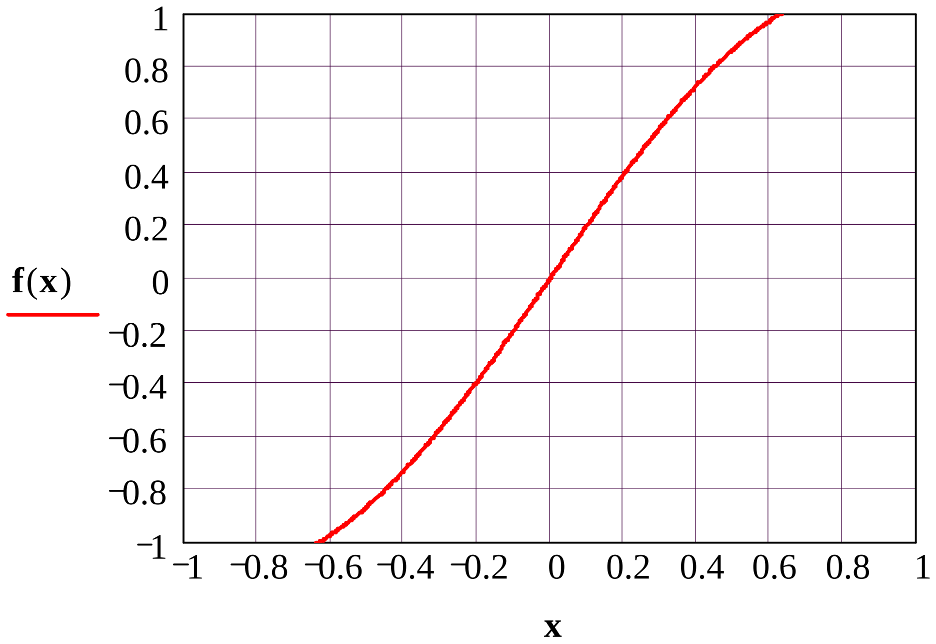


Рис. 11. Блок-схема алгоритма метода обратной квадратичной интерполяции

4. РЕШЕНИЕ В MATHCAD

4.1. Графическое решение

$$f(x) := 2\cdot \operatorname{atan}(x) - \frac{x^3}{2}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
f(x)
−1 −0.8 −0.6 −0.4 −0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
x


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
f(x)
1 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2
x

4.2. Решение с помощью стандартной процедуры ROOT(f(x),x,a,b)

$$\mathbf{root}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, -2, -1) = -1.592757$$

$$\mathbf{root}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, -1, 1) = 0$$

$$\mathbf{root}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, 1, 2) = 1.592757$$

4.3. Решение с помощью стандартной процедуры find(x) и решающего блока given

$$\mathbf{x} := -2$$

Given

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{Find}(\mathbf{x}) = -1.592757$$

$$\mathbf{x} := -0.5$$

Given

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{Find}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{x} := 1$$

Given

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{Find}(\mathbf{x}) = 1.592757$$

4.4. Приближенное решение с помощью стандартной процедуры minerr(x) и решающего блока given

$$\mathbf{x} := -2$$

Given

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{Minerr}(\mathbf{x}) = -1.592757$$

$$\mathbf{x} := -0.5$$

Given

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{Minerr}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{x} := 1$$

Given

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{Minerr}(\mathbf{x}) = 1.592757$$

Литература

1. Агабеков Л.Е., Борисов С.В. Ваулин А.С. и др. Программирование в среде ТурбоПаскаль. Инструментальные средства персональных ЭВМ. Кн. 4. / Под ред. Б.Г. Трусова. – М.: Высшая школа, 1993.

2. Азаров А.И., Басик В.А., Мелешко И.Н. и др. Сборник задач по методам вычислений. М.: Наука, ФМ, 1994.

3. Амосов А.А., Дубинская Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.

4. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 1999.

5. Гурьев Е.К. , Никулин А.М Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Часть 1. Федеральное агенство по образованию. Изд. РГТУ-МАТИ. Москва,2005.

7. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11. – М.:СОЛОН-Пресс, 2004.

8. Дьяконов В., Новиков Ю., Рычков В. Компьютер для студента: Самоучитель. СПб.: ПИТЕР, 2000. – 592с.

9. Карпов Б., Мирошниченко Н. Microsoft Visio 2000. Краткий курс: Пособие для ускоренного обучения. – СПб.: Питер, 2000.

10. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 11. –СПб.: БХВ – Петербург, 2003.

11. Никулин А.М., Емелина Е.И. Решение нелинейных уравнений: Методические указания к выполнению лабораторной работы: МАТИ – РГТУ К.Э. им. Циолковского. М., 1996.

12. Никулин А.М., Сидоров Б.Н. Методы решения нелинейного уравнения: Методические указания к лабораторной работе по курсу «Информатика»: МАТИ – РГТУ им. К.Э. Циолковского. М., 1999.

13. Попов В.Б. TURBO PASCAL для школьников: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

14. Фаронов В.В. Турбо Паскаль 7.0: Учебное пособие. Начальный курс. – М.: Нолидж, 1997.

Гурьев Евгений Константинович

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к лабораторной и курсовой работам
по курсам «Вычислительная математика» и «Информатика. Раздел
«Численные методы » »

Технический редактор Е.В. Сусорова
Компьютерная верстка выполнена Е.К. Гурьевым

Подписано в печать Усл. печ. л. Уч. изд. л.
Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Тираж 100 экз. Заказ № 84

Издательский центр МАТИ
109240, Москва, Берниковская наб., 14

Типография Издательского центра МАТИ
109240, Москва, Берниковская наб., 14