

Н.Д.Выск, К.Ю. Осипенко

**Линейная алгебра и
аналитическая геометрия**
учебное пособие

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского
Кафедра «Высшая математика»
2011

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания

Начинайте каждое занятие с изучения лекции. При этом:

- ✓ вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- ✓ затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- ✓ разберите доказательства теорем и выводы формул
- ✓ в завершение работы прочтите всю лекцию еще раз, чтобы убедиться, что теоретический материал освоен.

Следующий этап работы – выполнение заданий практикума.

- ✓ каждую задачу попробуйте решить самостоятельно
- ✓ в случае неудачи посмотрите указание и вновь повторите попытку
- ✓ в случае повторной неудачи внимательно разберите приведенное решение
- ✓ если вы решили задачу самостоятельно (во всяком случае, ваш ответ оказался верным), все равно обязательно прочтите решение, данное в учебном курсе – это поможет вам проверить правильность примененного метода решения
- ✓ закончив решение всех задач практикума, обязательно вернитесь к тем из них, которые не получились в первый раз, и попробуйте вновь самостоятельно решить их.

При выполнении домашнего задания используйте материал лекции и практикума.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. МАТРИЦЫ

1.1.1. Матрицы. Операции над матрицами

Определение матрицы

1.

Матрицей A размера $m \times n$ называется таблица из $m \cdot n$ чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Часто для краткости пишут $A = \|a_{ij}\|$. Числа, из которых состоит матрица, называются *элементами матрицы*. Индексы у элементов матрицы указывают расположение этого элемента в таблице: первый индекс – номер строки, в которой находится элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент a_{23} находится на пересечении второй строки и третьего столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ называются *главной диагональю* матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Если матрица A имеет размер $n \times n$, то такую матрицу называют *квадратной матрицей порядка n* .

Две матрицы одинакового размера $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ называют *равными* (при этом пишут $A = B$), если

$$a_{ij} = b_{ij}; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Упражнение 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти a_{12} и a_{23} .

Решение.

Элемент a_{12} располагается в первой строке и втором столбце, то есть это второй элемент первой строки: $a_{12} = -1$.

Соответственно a_{23} – элемент, стоящий во второй строке и в третьем столбце; $a_{23} = -3$.

Упражнение 2.

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \beta & 3 \end{pmatrix}.$$

При каких α и β $A=B$?

Решение.

У равных матриц должны быть равными соответствующие элементы. Для элементов, заданных численно, это условие выполняется: $a_{12} = b_{12} = 1$, $a_{22} = b_{22} = 3$. Поскольку $b_{11} = 4$, а $a_{21} = -2$, для равенства матриц A и B должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta = -2 \end{cases}.$$

Следовательно, $\alpha = \pm 2$, $\beta = -2$.

Ответ: $\alpha = \pm 2$, $\beta = -2$.

Сумма матриц

Суммой двух матриц одинакового размера $m \times n$ $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ называют матрицу $C = \|c_{ij}\|$ размера $m \times n$ такую, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+3 \\ 3+1 & -1-3 \\ 4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти $A+B$.

Решение.

По определению суммы матриц матрица $C = A + B$ имеет размер 2×3 , и ее элементы являются суммами соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 1 - 3 = -2; \quad c_{12} = a_{12} + b_{12} = -3 + 2 = -1; \quad c_{13} = a_{13} + b_{13} = 2 + 1 = 3;$$

$$c_{21} = a_{21} + b_{21} = 5 + 4 = 9; \quad c_{22} = a_{22} + b_{22} = -4 + 1 = -3; \quad c_{23} = a_{23} + b_{23} = 7 + 2 = 9.$$

Следовательно, матрица $C = A + B$ имеет вид:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$

Не забывайте, что складывать можно только матрицы одинакового размера!

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Легко проверить, что выполнены следующие свойства для операции сложения матриц:

1. $A+B=B+A$ (коммутативность),
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность),
3. $A+0=A$.

Произведением матрицы размера $m \times n$ $A = \|a_{ij}\|$ на число λ называют матрицу того же размера $C = \|c_{ij}\|$ такую, что

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Упражнение 4.

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $C = -3A$.

Решение.

Из определения произведения матрицы на число следует, что размер матрицы C совпадает с размером матрицы A (2×3), а каждый элемент матрицы C равен соответствующему элементу матрицы A , умноженному на -3 :

$$c_{11} = -3a_{11} = -3 \cdot 1 = -3; c_{12} = -3a_{12} = -3 \cdot 7 = -21;$$

$$c_{13} = -3a_{13} = -3 \cdot (-3) = 9;$$

$$c_{21} = -3a_{21} = -3 \cdot 2 = -6; c_{22} = -3a_{22} = -3 \cdot 4 = -12;$$

$$c_{23} = -3a_{23} = -3 \cdot 6 = -18.$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие свойства:

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$
3. $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A).$

Разностью матриц одинакового размера A и B называется матрица $A-B=A+(-1)B$.

Знак суммы

Нам часто придется иметь дело с различными суммами. Удобно иметь обозначение для сумм, позволяющее записывать их более коротким способом. Этому служит знак суммирования

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

Из хорошо известных свойств чисел вытекают следующие свойства знака суммирования:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j \\ 2. \quad & \sum_{j=1}^n \lambda a_j = \lambda \sum_{j=1}^n a_j \\ 3. \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \end{aligned}$$

Произведение матриц

Умножение матрицы $A = \|a_{ij}\|$ размера $m \times n$ на матрицу $B = \|b_{ij}\|$ размера $l \times k$ определено лишь для случая, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B , т.е. когда $n=l$. В этом случае произведение матриц определяется следующим образом:

Произведением матриц AB называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ размера $m \times k$, у которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Иначе говоря, элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующий элемент j -ого столбца матрицы B . С помощью знака суммирования можно записать это так:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k.$$

Пример 2.

Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ -1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & -1 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 & -1 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 8 \\ 10 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что произведение матриц некоммутативно, т.е. в общем случае AB не равно BA . В приведённом выше примере матрицу B просто нельзя даже умножить на матрицу A . Но, даже если A и B – квадратные матрицы одного порядка (тогда существуют произведения AB и BA), то, как показывает следующий пример, произведения AB и BA могут не совпадать.

Пример 3.

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.

Доказать, что для любой квадратной матрицы A

$$AE = EA = A,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и A .

Доказательство.

Пусть A и E – квадратные матрицы n -го порядка, $B = AE$.

Тогда $b_{ij} = a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + \dots + a_{ij}e_{jj} + \dots + a_{in}e_{nj}$.

Но $e_{ij} = 0$ при i , не равном j , а $e_{jj} = 1$. Следовательно, $b_{ij} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$. Таким образом, все элементы матрицы B равны соответствующим элементам матрицы A , то есть $B = A$.

Если матрица $C = EA$, то $c_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \dots + e_{ii}a_{ij} + \dots + e_{in}a_{nj} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$ (учитываем, что $e_{ii} = 1$, $e_{ij} = 0$ при i , не равном j). Значит, $C = A$. Утверждение доказано.

Приведём ряд свойств произведений матриц.

1. $(AB)C=A(BC)$

Доказательство.

Пусть размер матрицы $A = \|a_{ij}\|$ $m \times p$, матрицы $B = \|b_{ij}\|$ - $p \times n$, а матрицы $C = \|c_{ij}\|$ $n \times k$. Имеем $AB = \|\square_{ij}\|$, где

$$\alpha_{ij} = \sum_{s=1}^p a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Тогда $(AB)C = \|\square_{ij}\|$, где

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^p a_{is} b_{sr} \right) c_{rj} = \sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^n a_{is} b_{sr} c_{rj} = \sum_{s=1}^p a_{is} \beta_{sj},$$

где $\beta_{sj} = \sum_{r=1}^n b_{sr} c_{rj}$ - элемент матрицы BC . Тем самым, если обозначить элемент матрицы $A(BC)$ через $\square'_{ij}$, будем иметь

$$\gamma_{ij}' = \sum_{s=1}^p a_{is} \beta_{sj} = \gamma_{ij}, \quad \text{т.е.} \quad (AB)C = A(BC).$$

2. $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$

Доказательство.

Пусть матрица $A = \|a_{ij}\|$ имеет размер $m \times p$, а матрицы $B = \|b_{ij}\|$ и $C = \|c_{ij}\|$ имеют размер $p \times n$. Тогда для элементов матрицы $A(B+C) = \|\square_{ij}\|$ имеем

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^p a_{is} (b_{si} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^p a_{is} b_{sj} + \sum_{s=1}^p a_{is} c_{sj} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}.$$

Из определения произведения матриц вытекает, что $AB = \|\square_{ij}\|$, а $AC = \|\square_{ij}\|$, т.е. $A(B+C) = AB + AC$. Аналогично доказываем, что $(B+C)A = BA + CA$.

Упражнение 1.6.

Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Вывести формулу для $(A+B)^2$ (при натуральном n под C^n понимается произведение $C \cdot C \cdot \dots \cdot C$).

Решение.

Используем свойства сложения и умножения матриц:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B = A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2.$$

Заметьте, что результат может совпасть с формулой сокращенного умножения $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ только в том случае, если $AB = BA$. В общем случае это неверно!

Ответ: $(A+B)^2 = A^2 + B \cdot A + A \cdot B + B^2$.

Упражнение 7.

Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Разложить на множители выражение $AB+2B$.

Решение.

Используем свойство единичной матрицы (см. упражнение 5):

$$AE = EA = A.$$

Следовательно, $B = EB$. Тогда $AB + 2B = AB + (2E)B = (A + 2E)B$ (использовано свойство 2 произведения матриц).

Ответ: $AB + 2B = (A + 2E)B$.

Упражнение 8.

Пусть A, B и C – квадратные матрицы одного порядка. Разложить на множители выражение $A^2C + AC^2$.

Решение.

Поскольку $A^2 = A \cdot A$, $C^2 = C \cdot C$, запишем заданный матричный многочлен в виде: $A^2C + AC^2 = A \cdot A \cdot C + A \cdot C \cdot C$ и воспользуемся свойствами произведения матриц:

$$A \cdot A \cdot C + A \cdot C \cdot C = A(A \cdot C + C \cdot C) = A((A + C)C) = A(A + C)C.$$

Ответ: $A^2C + AC^2 = A(A + C)C.$

Упражнение 9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = (3 \quad 0 \quad 2 \quad -1).$$

Найти AB и BA .

Решение.

Определим размеры матрицы A : 4×1 и B : 1×4 . Следовательно, существуют оба произведения: и AB , и BA , причем размер матрицы $C = AB$: 4×4 , а матрицы $D = BA$: 1×1 .

Вычислим элементы матрицы C :

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} = 1 \cdot 3 = 3; \quad c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} = 1 \cdot 0 = 0; \quad c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$c_{14} = a_{11} \cdot b_{14} = 1 \cdot (-1) = -1;$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} = -2 \cdot 3 = -6; \quad c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} = -2 \cdot 0 = 0; \quad c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} = -2 \cdot 2 = -4;$$

$$c_{24} = a_{21} \cdot b_{14} = -2 \cdot (-1) = 2;$$

$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} = 3 \cdot 3 = 9; \quad c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} = 3 \cdot 0 = 0; \quad c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$c_{34} = a_{31} \cdot b_{14} = 3 \cdot (-1) = -3;$$

$$c_{41} = a_{41} \cdot b_{11} = 4 \cdot 3 = 12; \quad c_{42} = a_{41} \cdot b_{12} = 4 \cdot 0 = 0; \quad c_{43} = a_{41} \cdot b_{13} = 4 \cdot 2 = 8;$$

$$c_{44} = a_{41} \cdot b_{14} = 4 \cdot (-1) = -4.$$

Таким образом, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Матрица D состоит из единственного элемента:

$$d_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} + b_{14} \cdot a_{41} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 5.$$

Тогда $D = (5)$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = (5).$

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО ТЕМЕ «Операции над матрицами»**

Задача 1.

Найти матрицу $5A - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите сначала матрицы $5A$ и $-2B$, а затем их сумму.

Решение

Используем определения линейных операций над матрицами:

$$\begin{aligned} 5A &= \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$

Задача 2.

Найти x , y и m , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}, \quad A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите элементы матрицы $A + mB$, а затем приравняйте их

соответствующим элементам матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$

Решение

Если

$$A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},$$

$$то \begin{cases} 1-2m=-5 \\ 6+mx=21 \\ -1+my=8 \\ 2-m=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ 6+3x=21 \\ -1+3y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ x=5 \\ y=3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 5, y = 3, m = 3$.

Задача 3.

Найти AB и BA , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем используйте определение произведения матриц.

Решение

Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность.

$A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2 \times 2]$, $BA[4 \times 4]$.

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B :

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B ; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A , второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$

$$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$

$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A :

$$d_{11} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0; \quad d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4; \quad d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1;$$

$$d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2; \quad d_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2; \quad d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2;$$

$$d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1; \quad d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0; \quad d_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1;$$

$$d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1; \quad d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0; \quad d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1;$$

$$d_{41} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8; \quad d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0; \quad d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2;$$

$$d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4.$$

Таким образом,

$$D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Задача 4.

Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Если произведение существует, вычислить его.

Указание

Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем (в случае, если произведение AB или BA существует) найдите его, используя определение произведения матриц.

Решение

Сравним размерности матриц A и B : $A[3 \times 2]$, $B[2 \times 2]$. Следовательно, $n = l$, $m \neq k$, поэтому произведение $AB[3 \times 2]$ существует, а произведение BA – нет.

Найдем элементы AB :

$$(ab)_{11} = 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21; \quad (ab)_{12} = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24; \quad (ab)_{21} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6; \\ (ab)_{22} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 8; \quad (ab)_{31} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = -2; \quad (ab)_{32} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 8 = -2.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA \text{ не существует.}$

Задача 5.

Вычислить матричный многочлен $A^2 - 3A$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указание

Найдите произведение AA и матрицу $-3A$, а затем сложите полученные матрицы.

Решение

Поскольку $A^2 = A \cdot A$, умножим матрицу A на себя по правилу умножения матриц. A – квадратная матрица 2-го порядка, поэтому A^2 – тоже квадратная матрица той же размерности.

Найдем элементы матрицы $C = A^2$:

$$c_{11} = -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -4;$$

$$c_{12} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1;$$

$$c_{21} = 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 0;$$

$$c_{22} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9.$$

Итак,

$$C = A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим элементы матрицы $D = -3A$. Для этого все элементы матрицы A умножим на -3 :

$$D = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^2 - 3A = C + D = \begin{pmatrix} -4+6 & 1-3 \\ 0+0 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 6.

Найти матрицу X из уравнения $X^2 = A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Из определения операции умножения матриц следует, что X – квадратная матрица 2-го порядка.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

тогда, приравнявая элементы произведения $X \cdot X$ соответствующим элементам A , получим систему уравнений для определения элементов матрицы X .

Решение

Из определения операции умножения матриц следует, что X – квадратная матрица 2-го порядка.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

тогда, приравнивая элементы произведения $X \cdot X$ соответствующим элементам A , получим систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + bc = 3 \\ ab + bd = 2 \\ ac + cd = -2 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases}.$$

Разделив левую и правую части второго уравнения на соответствующие части третьего, получим, что $\frac{b}{c} = -1$, откуда $b = -c$. Подставим это выражение для b в систему:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 3 \\ ac + cd = -2 \\ c^2 - d^2 = 1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения следует, что

$$a + d = -\frac{2}{c}.$$

Складывая первое и третье уравнения, найдем, что

$$a^2 - d^2 = 4 \Rightarrow (a + d)(a - d) = 4.$$

Используя предыдущий результат, получим, что

$$a - d = 4 : \left(-\frac{2}{c}\right) = -2c.$$

Тогда

$$\begin{cases} a + d = -\frac{2}{c} \\ a - d = -2c \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad a = -c - \frac{1}{c}, d = c - \frac{1}{c}.$$

Подставим найденное выражение для d в последнее уравнение:

$$c^2 - \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 = 1, c^2 - c^2 + 2 - \frac{1}{c^2} = 1, \frac{1}{c^2} = 1, c = \pm 1.$$

Вычислим остальные элементы матрицы X :

- 1) если $c = 1$, то $a = -2, b = -1, d = 0$;
- 2) если $c = -1$, то $a = 2, b = 1, d = 0$.

Ответ: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.2. Определители матриц

Определители 2-го и 3-го порядков

Каждой квадратной матрице можно сопоставить некоторое число, называемое *определителем* матрицы и обозначаемое через $|A|$. Прежде чем дать общее определение этого понятия, определим его для матриц 2-го и 3-го порядков.

Определителем матрицы 2-го порядка
называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - (-3) \cdot 2 = 1.$$

Упражнение 1. Найти определители

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-8) = -3 + 16 = 13;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) = 3 + 8 = 11;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - 3 \cdot (-8) = 24 + 24 = 48.$$

Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 11 - 1 \cdot (-6) = -20.$$

При раскрытии определителей 2-го порядка выражение для определителя 3-го порядка может быть записано в общем случае в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Для вычисления определителя по этой формуле существует следующая геометрическая схема, называемая «правилом треугольников». Первые три слагаемых находятся перемножением элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Остальные три слагаемых (с минусами) получаются по аналогичной схеме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Упражнение 2. Найти определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-19) = 20;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) = -16; \\
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = \\
= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-7) = -24.$$

Определитель n -го порядка

Пусть дана квадратная матрица A . *Минором* M_{ij} называется определитель матрицы, получаемой из матрицы A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Пример 3. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{то } M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5, M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10.$$

Упражнение 3. Найти M_{32} и M_{31} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор M_{32} получаем, вычеркнув из матрицы A 3-ю строку и 2-ой столбец:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -7.$$

Для вычисления минора M_{31} вычеркиваем из матрицы A 3-ю строку и 1-ый столбец:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = 5.$$

Общее понятие определителя дадим с помощью рекуррентной схемы, а именно, считая, что понятие определителя известно для матриц $n-1$ -го порядка, дадим его для матриц n -го порядка (фактически так и вводилось понятие определителя для матриц 3-го порядка).

Определителем матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n+1}M_{1n}.$$

Используя знак суммы, это определение можно записать в виде:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-32) = 52.$$

Упражнение 4. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)) - 2 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)) = 3.$$

Свойства определителей

1. Для любой квадратной матрицы порядка n

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}.$$

Тем самым определитель может быть вычислен не только с помощью разложения по первой строке (как в исходном определении), но и с помощью разложения по первому столбцу.

Доказательство

Для матриц второго порядка это свойство легко проверяется. Допустим, что доказываемое свойство имеет место для матриц порядка $n - 1$. Докажем, что оно выполняется для матриц порядка n . В силу определения имеем:

$$|A| = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}. \quad (1)$$

Пользуясь предположением индукции, вычислим M_{1j} , $2 \leq j \leq n$, с помощью разложения по первому столбцу. Тогда

$$M_{1j} = \sum_{i=2}^n (-1)^i a_{i1} (M_{1j})_{i1},$$

где $(M_{1j})_{i1}$ – определитель, получаемый из матрицы A вычеркиванием 1-ой строки и j -го столбца, а также i -й строки и 1-го столбца. Подставляя это выражение в (1), получаем:

$$|A| = a_{11} M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^n (-1)^i a_{i1} (M_{1j})_{i1} = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} (M_{1j})_{i1}.$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} (M_{1j})_{i1} = \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} (M_{i1})_{1j} = M_{i1},$$

имеем:

$$|A| = a_{11} M_{11} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}.$$

Треугольной матрицей называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Упражнение 5.

Вычислим определитель треугольной матрицы, разлагая его по первому столбцу. В силу того, что в первом столбце только один элемент отличен от нуля, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Таким образом, *определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.*

Матрицей, *транспонированной* к матрице $A = \|a_{ij}\|$ размера $m \times n$, называется матрица $A^T = \|b_{ij}\|$ размера $n \times m$, где $b_{ij} = a_{ji}$. Иными словами, чтобы из исходной матрицы получить транспонированную, надо ее строки поставить в соответствующие столбцы.

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6. Для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти A^T и $(A^2)^T$.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A^T получим из матрицы A следующим образом: элементы 1-ой строки матрицы A образуют 1-ый столбец матрицы A^T , элементы 2-ой строки A – 2-ой столбец A^T , элементы 3-ей строки A – 3-ий столбец A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 19 \\ 45 & 30 & 27 \\ -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(A^2)^T = \begin{pmatrix} 7 & 45 & -1 \\ 20 & 30 & 4 \\ 19 & 27 & -13 \end{pmatrix}.$

2. Для любой квадратной матрицы A
 $|A| = |A^T|.$

Доказательство.

Для матриц второго порядка это свойство легко проверяется. Допустим, что доказываемое свойство имеет место для матриц порядка $n - 1$. Докажем, что оно выполняется для матриц порядка n . Разложим определитель матрицы A^T по первому столбцу:

$$|A^T| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1i} M_{1i}^*,$$

где M_{1i}^* - определитель, получаемый из матрицы A^T вычеркиванием i -ой строки и 1-го столбца. В силу предположения индукции $M_{1i}^* = M_{1i}$. Тем самым

$$|A^T| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{1i} M_{1i} = |A|.$$

Из свойства 2 вытекает равноправность строк и столбцов, т.е. если какое-либо утверждение об определителе доказано относительно строк, то оно верно и относительно столбцов. Далее в силу сказанного все свойства будут доказываться лишь для строк.

3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, а модуль его значения не изменится.

Доказательство.

Докажем сначала это свойство для двух соседних строк. Снова воспользуемся методом полной индукции. Для матрицы 2-го порядка это свойство легко проверяется. Предположим, что перестановка двух соседних строк меняет знак определителя порядка $n - 1$. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{an} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

переставляются строки с номерами k и $k + 1$. Матрицу с переставленными строками обозначим через

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{an} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Напишем разложение определителей этих двух матриц по первому столбцу:

$$|A| = (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} M_{k+1,1} + \sum_{i \neq k, k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1},$$

$$|B| = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} N_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k1} N_{k+1,1} + \sum_{i \neq k, k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} N_{i1}.$$

При $i \neq k, k + 1$ в силу предположения индукции $N_{i1} = -M_{i1}$. Остается заметить, что $N_{k1} = M_{k+1,1}$, а $N_{k+1,1} = M_{k1}$. Тогда

$$|B| = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} M_{k+1,1} + (-1)^{k+2} a_{k1} M_{k1} - \sum_{i \neq k, k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = -|A|.$$

Пусть теперь в матрице переставляются строки с номерами i и j , $i < j$. Перестановку этих строк можно осуществить, переставляя только соседние строки, следующим образом. Сначала j -я строка последовательно переставляется с $j - i$ строками, стоящими над ней, а затем i -я строка последовательно переставляется с $j - i - 1$ строками, стоящими под ней. Всего будет переставлено $2(j - i) - 1$ соседних строк. Поэтому определитель нечетное число раз будет менять знак и в результате поменяет знак.

Следствие 2.1. Если у квадратной матрицы A имеются две одинаковые строки (столбца), то $|A| = 0$.

Доказательство.

Пусть у матрицы A имеются две одинаковые строки. Поменяв их местами, получим ту же самую матрицу, но по свойству 3 ее определитель должен поменять знак, т.е. получаем, что $|A| = -|A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

4. *Определитель матрицы может быть разложен по любой строке или столбцу, то есть имеют место равенства*

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}, \quad (3)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}. \quad (4)$$

Доказательство.

Как уже отмечалось, в силу равноправности строк и столбцов достаточно доказать разложимость по любой строке. Положим

$$B = \begin{pmatrix} a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу B можно получить из матрицы A , последовательно меняя k -ю строку со строками, находящимися над ней. Поскольку таких перестановок будет $k-1$ (столько строк лежит выше k -ой строки), то по свойству 3

$$|A| = (-1)^{k-1} |B|.$$

Вычислим теперь определитель матрицы B с помощью разложения по первой строке:

$$|B| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{kj} N_{1j}.$$

Нетрудно убедиться, что $N_{1j} = M_{kj}$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому

$$|A| = (-1)^{k-1} |B| = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Равенства в свойстве 4 могут быть записаны через алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj},$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}.$$
(5)

Пример 6. Вычислим определитель из примера 4, разлагая его по третьему столбцу (в нем больше всего нулей):

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \right) = -12 + 64 = 52.$$

Упражнение 7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Наиболее удобно вычислять этот определитель разложением по 3-му столбцу (при этом потребуются вычислить только один определитель 3-го порядка):

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \left(2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 3(2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)) = 12.$$

Линейной комбинацией матриц $A_1, \dots, A_m$ одинакового размера называется матрица $A = \square_1 A_1 + \dots + \square_m A_m$, где $\square_1, \dots, \square_m$ – некоторые числа. В случае, если матрицы $A_1, \dots, A_m$ имеют размеры $1 \times n$, говорят о линейной комбинации строк, а если размеры этих матриц $n \times 1$, то говорят о линейной комбинации столбцов.

5. Если у квадратной матрицы A i -я строка (столбец) есть линейная комбинация строк (столбцов) A_i' и A_i'' , т.е. имеет вид $\square_1 A_i' + \square_2 A_i''$, то

$$|A| = \square_1 |A'| + \square_2 |A''|,$$

где A' и A'' – матрицы, у которых i -е строки (столбцы) заменены на A_i' и A_i'' соответственно.

Доказательство.

Пусть

$$A' = (a'_{i1}, \dots, a'_{in}), \quad A'' = (a''_{i1}, \dots, a''_{in}).$$

Тогда, разлагая определитель матрицы A по i -ой строке, будем иметь:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 a'_{i1} + \lambda_2 a''_{i1} & \dots & \lambda_1 a'_{in} + \lambda_2 a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda_1 a'_{ij} + \lambda_2 a''_{ij}) A_{ij} = \lambda_1 \sum_{j=1}^n a'_{ij} A_{ij} + \lambda_2 \sum_{j=1}^n a''_{ij} A_{ij} = \lambda_1 |A'| + \lambda_2 |A''|. \end{aligned}$$

Положив в этом свойстве $\square_2 = 0$, получаем

Следствие 2.2. При умножении строки (столбца) квадратной матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Упражнение 8. Пусть A – квадратная матрица порядка n с определителем $|A|$, а $\square$ – число. Найти $|\square A|$.

Решение.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{то } \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поэтому, используя следствие 2.2, можно сказать, что определитель $|\square A|$ получается из определителя $|A|$ при умножении каждой из n строк матрицы на число $\square$, следовательно, $|\square A| = \square^n |A|$.

Умножив строку (столбец) на $\square = 0$, из следствия 2.2 получаем

Следствие 2.3. Если в квадратной матрице A имеется строка (столбец) с нулевыми элементами, то $|A| = 0$.

6. Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.

Доказательство.

Предположим, что к i -ой строке матрицы $A = \|a_{ij}\|$ прибавлена k -ая строка, умноженная на число λ . Тогда по свойству 5, следствию 2.2 и следствию 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 7. Вычислим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

с помощью свойства 6. Вычтем из третьего столбца первый, а к четвертому столбцу прибавим первый, умноженный на 2. После этого разложим полученный определитель по второй строке. Имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка вынесем множитель 2 из второго столбца:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим ко второй строке первую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки первую:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 8 & 0 & 25 \\ -2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 25 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} = -2(-88 + 50) = 76.$$

Упражнение 9. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

пользуясь свойствами определителей.

Решение.

Приведем определитель матрицы A к треугольному виду. Для этого поменяем в нем местами 1-ую и 2-ую строки (при этом по свойству 3 определитель поменяет знак), а затем 1-ый и 2-ой столбец (определитель вновь поменяет знак, то есть окажется равным $|A|$). Получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из 2-ой строки 1-ую, умноженную на 2 (по свойству 6 определитель при этом не изменится):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель так, чтобы элемент a_{42} стал равным нулю. Для этого умножим 4-ю строку на 5 (тем самым по следствию 2.2 весь определитель умножится на 5) и вычтем из нее 2-ую строку, умноженную на 2:

$$|A| = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 34 \end{vmatrix}.$$

И наконец, прибавим к 4-ой строке 3-ю, умноженную на 13 (напомним еще раз свойство 6: такое преобразование не меняет значения определителя):

$$|A| = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 60 = 60$$

(при вычислении определителя треугольной матрицы использован результат, полученный в упражнении 2.5). Итак, $|A| = 60$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Определители*»

Задача 1.

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Указание

Воспользуйтесь либо правилом треугольников, либо разложением определителя по 2-й строке или 2-му столбцу, содержащим нулевой элемент.

Решение

1-й способ (правило треугольников).

Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = \\ &= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34. \end{aligned}$$

2-й способ (разложение по строке).

Применим свойство определителя:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22} , так как произведение $a_{22} A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij} , получается вычеркиванием из исходного определителя i -й строки и j -го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4)(-8) = 34$.

Ответ: $\Delta = 34$.

Задача 2.

Используя свойства определителя, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$$

Указание

Вычитая из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки, добьемся того, что в 1-м столбце останется только один ненулевой элемент. Далее можно разложить определитель по 1-му столбцу.

Решение

Поскольку все элементы первого столбца равны 1, вычтем из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки (при этом величина определителя не изменится – свойство 6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 39 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что теперь все элементы 2-й строки кратны двум, а элементы 3-й строки кратны трем. По следствию 2.2 соответствующие множители можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 3-й строки полученного определителя соответствующие элементы 2-й строки:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и разложим определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 12) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: $\Delta = 6$.

Разумеется, можно было вычислять этот определитель непосредственно (например, по правилу треугольников), но использование свойств определителей позволило существенно сократить и упростить численные расчеты.

Задача 3.

Используя свойства определителей, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -24 & -50 & 50 \\ 46 & 99 & -98 \end{vmatrix}.$$

Указание

Прибавьте к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтите удвоенные элементы 1-й строки. Затем вынесите за знак определителя все общие множители элементов какой-либо строки или столбца.

Решение

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множитель -1 из 2-й строки и 3 – из 3-й:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь из 3-го столбца вынесем множитель -2:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -26 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 3-го столбца и разложим полученный определитель по 3-й строке:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 & -26 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (23 - 74) = 6 \cdot 51 = 306.$$

Ответ: $\Delta = 306$.

Задача 4.

Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40.$$

Указание

Разложив определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке, и приравняв его 40, вы получите квадратное уравнение для x .

Решение

Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке. Предварительно найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 4x) = 9 - 4x;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - x) = x - 15;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (20 - 3) = 17.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot (9 - 4x) + 1 \cdot (x - 15) + 3 \cdot 17 = -4x^2 + 10x + 36,$$

и требуется решить квадратное уравнение

$$-4x^2 + 10x + 36 = 0, 2x^2 - 5x + 2 = 0, x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = 2, x = \frac{1}{2}$.

Задача 5.

Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} > -3.$$

Указание

Раскройте определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке.

Решение

Раскроем определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке:

$$3(10 - 12) - x(2x - 9) + 4x - 15 > -3;$$

$$-2x^2 + 13x - 18 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 18 < 0;$$

$$2 < x < 4,5.$$

Ответ: (2; 4,5).

Задача 6.

Используя свойства определителей (не раскрывая определитель), вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Указание

Используйте тригонометрическую формулу $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ и свойство определителя с двумя равными столбцами.

Решение

Из тригонометрии известно, что $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. Вычтем из элементов 2-го столбца определителя соответствующие элементы 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma - \sin^2 \alpha & \cos 2\gamma \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

У полученного определителя, равного исходному (свойство 6), два столбца одинаковы, поэтому он равен нулю (следствие 2.1).

Ответ: 0.

Задача 7.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Указание

Преобразуйте определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуйтесь свойством 6.

Решение

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 6. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1 . Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

- а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;
 б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;
 в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки
 (напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Задача 8.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 0 \\ -67 & 83 & 2 & 0 \\ 19 & 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Указание

Разложите определитель по 1-й строке, а затем полученный определитель 3-го порядка вновь разложите по 1-й строке.

Решение

Разложим определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 83 & 2 & 0 \\ 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка вновь разложим по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -35 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-8 - 0) = 24.$$

Ответ: $\Delta = 24$.

Обратите внимание: если в определителе все элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Ответ: $\Delta = 24$.

1.1.3. Определитель произведения матриц. Обратная матрица

Полураспавшиеся матрицы

Квадратная матрица называется *полураспавшейся*, если ее можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} B & P \\ Q & C \end{pmatrix},$$

где B и C – квадратные матрицы и хотя бы одна из матриц P, Q – нулевая.

Пример 1. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

являются полураспавшимися.

Предложение 3.1. Если матрица

$$A = \begin{pmatrix} B & P \\ Q & C \end{pmatrix}$$

- полураспавшаяся, то $|A| = |B| |C|$.

Доказательство.

Применим индукцию. Для матриц второго порядка утверждение очевидно. Пусть утверждение имеет место для матриц порядка $n - 1$. Докажем его справедливость для матриц порядка n . Будем считать, что $P = 0$ (случай $Q = 0$ будет вытекать из рассматриваемого с помощью транспонирования матрицы A). Пусть A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы A по первой строке:

$$|A| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Матрица, полученная вычеркиванием 1-й строки и j -го столбца, является полураспавшейся порядка $n - 1$. Поэтому по предположению индукции

$$M_{1j} = N_{1j} |C|,$$

где N_{1j} – минор элемента a_{1j} матрицы B . Тем самым

$$|A| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} a_{1j} N_{1j} |C| = \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} a_{1j} N_{1j} \right) |C| = |B| |C|.$$

Определитель произведения матриц

Теорема 3.1 (об определителе произведения). Если A и B – квадратные матрицы, то

$$|AB| = |A| |B|.$$

Доказательство.

Пусть $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{ij}||$ – квадратные матрицы порядка n . Из предложения 3.1

$$|A \parallel B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Не изменяя значения определителя матрицы, стоящего в правой части этого равенства, выполним следующие преобразования: к 1-й строке прибавим $(n + 1)$ -ую, умноженную на a_{11} , $(n + 2)$ -ую, умноженную на a_{12} , ..., $(2n)$ -ую, умноженную на a_{1n} . Тогда получим равенство

$$|A \parallel B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

где

$$c_{1j} = \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{ij}, \quad j = 1, \dots, n,$$

– элементы первой строки матрицы AB . Теперь аналогичные преобразования проведем со 2-ой строкой, т.е. прибавим к ней $(n + 1)$ -ую, умноженную на a_{21} , $(n + 2)$ -ую, умноженную на a_{22} , ..., $(2n)$ -ую, умноженную на a_{2n} . Проведя преобразования подобного типа с остальными строками матрицы A , получим

$$|A \parallel B| = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

Чтобы привести определитель матрицы, стоящей справа, к полураспавшемуся виду, поменяем местами 1-ый и $(n + 1)$ -ый столбцы, 2-й и $(n + 2)$ -ой, ..., n -ый и $(2n)$ -ый. Тогда

$$|A \parallel B| = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -E \end{vmatrix} = (-1)^n |AB| \cdot |-E| = (-1)^n |AB| (-1)^n = |AB|.$$

Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица порядка n . Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Из того, что матрица A^{-1} может быть умножена на A как справа, так и слева, вытекает, что A^{-1} – тоже квадратная матрица порядка n .

Упражнение 1. Доказать, что $(A^{-1})^{-1} = A$.

Решение.

Пусть $B = A^{-1}$. Тогда, поскольку по определению обратной матрицы $AB = BA = E$, матрица A является обратной для матрицы B , то есть $(A^{-1})^{-1} = A$.

Из теоремы 3.1 следует, что $|A||A^{-1}| = |E| = 1$. Таким образом, если у матрицы A существует обратная, то $|A| \neq 0$ (такие матрицы называются *невырожденными*) и

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Теорема 3.2 (о фальшивом разложении). Для любой квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство.

В случае $i = j$ эти формулы вытекают из формул (5) темы «Определители». Докажем равенство (1) при $i \neq j$. Пусть для определенности $i < j$. Рассмотрим определитель матрицы, которая получена из A заменой j -ой строки на i -ую. По следствию 2.1 определитель такой матрицы равен нулю. Тем не менее напомним его разложение по j -ой строке:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} B_{jk}.$$

Остается заметить, что алгебраические дополнения B_{jk} совпадают с A_{jk} . Аналогично доказывается равенство (2) при $i \neq j$ (здесь вместо строк надо рассматривать столбцы и разлагать нулевой определитель по столбцу).

Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n *присоединенной* называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найдем для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

присоединенную. Имеем

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7; \end{aligned}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3.2 непосредственно вытекает

Следствие 3.1.

$$AA^* = A^*A = |A| E.$$

Теорема 3.3 (об обратной матрице). Для любой невырожденной матрицы A обратная матрица единственна и имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

Доказательство.

В силу следствия 3.1 имеем:

$$A \begin{pmatrix} 1 & & \\ & |A| & \\ & & A \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} A A = E,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & |A| & \\ & & A \end{pmatrix} A = E.$$

Тем самым матрица, определенная равенством (3.3), действительно является обратной. Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что нашлись две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} . Тогда, умножив равенство

$$A A_1^{-1} = E$$

слева на A_2^{-1} , получим:

$$A_2^{-1} A A_1^{-1} = A_2^{-1} E = A_2^{-1}.$$

Отсюда, в силу того, что $A_2^{-1} A = E$, вытекает равенство

$$A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Пример 3. Найдем обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения присоединенной матрицы найдем сначала все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно (напомним, что алгебраические дополнения для элементов строк в присоединенной матрице надо расположить в соответствующем столбце),

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -17 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A| = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} = -9$, получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Найти обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Проверим невырожденность матрицы A :

$$|A| = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = -6 \neq 0,$$

следовательно, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Построим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 3.3, находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Решение.

Пусть $C = B^{-1}A^{-1}$. Тогда, применяя свойство 1 произведения матриц, понятие единичной матрицы (лекция 1) и определение обратной матрицы, получим:

$$(AB)C = A(BC) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E;$$

$$C(AB) = (CA)B = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E.$$

Следовательно, матрица $C = B^{-1}A^{-1}$ удовлетворяет определению обратной матрицы для матрицы AB . Значит, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «Обратная матрица»

Задача 1.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

и проверить выполнение условий $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

Убедимся, что матрица A – невырожденная. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Применим способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Не забудьте, что обратная матрица образована из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы!

Найдем произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} + \frac{4}{6} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{6} & \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, найденная матрица A^{-1} отвечает определению обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

Задача 2.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

$$\Delta_A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Задача 3.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу:

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 4.

Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

$$\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 5.

При каких x, y, z матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Решение

Проверим невырожденность матрицы A :

$$\Delta_A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -1 \neq 0.$$

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Найдем AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x+2y+3z \\ 0 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -x+2y+z \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы выполнялось условие $AB = E$, x, y, z должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ x-y=0 \\ -x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x+3z=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-\frac{4}{3}x \\ x-\frac{4}{3}x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3, \\ z=4 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будет ли равно единичной матрице произведение BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2-4+3 & 2+4-6 & 3-3 \\ 2-5+3 & 2+5-6 & 3-3 \\ -2+6-4 & -2-6+8 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит, при найденных значениях x, y, z $B = A^{-1}$.

Ответ: $x = -3, y = -3, z = 4$.

1.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.2.1. Системы с квадратной матрицей.

Решение с помощью обратной матрицы.

Правило Крамера

Системы в матричном виде

Система уравнений вида

[illegible]

называется *системой линейных алгебраических уравнений*. Числа a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, называются *коэффициентами системы*, b_i , $i = 1, \dots, m$, – *свободными членами*, а x_j , $j = 1, \dots, n$, – *неизвестными*. Требуется по заданным коэффициентам системы и свободным членам найти *решение системы*, т.е. все такие числа $x_1, \dots, x_n$, которые удовлетворяют равенствам (4.1). Если таких чисел не существует, то систему называют *несовместной*, в противном случае (т.е. если существует хотя бы одно решение системы) ее называют *совместной*.

Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей системы*, b – *столбцом свободных членов*, x – *столбцом неизвестных*. Из определения умножения матриц вытекает, что равенства (4.1) могут быть записаны в виде

$$Ax = b, \quad (2)$$

называемым *матричным* видом системы.

Решение с помощью обратной матрицы

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений в матричном виде (2) с невырожденной квадратной матрицей A . В силу теоремы об обратной матрице (теорема 3.3) у матрицы A существует обратная матрица A^{-1} . Умножив равенство (4.2) слева на A^{-1} , будем иметь

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Отсюда получаем

$$x = A^{-1}b. \quad (3)$$

Легко убедиться, что это действительно решение системы (2).

Пример 1.

Найти решение системы

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

с помощью обратной матрицы.

Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенную матрицу $\tilde{A}$. Имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Следовательно,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A с помощью разложения по первой строке:

$$|A| = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 3 = -12.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Упражнение 1.

Найти решение системы

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6,$$

$$x_1 - x_2 + 7x_3 = 7,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

с помощью обратной матрицы.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A|$ и алгебраические дополнения к элементам матрицы A и найдем обратную матрицу:

$$|A| = 1 \cdot 13 + 1 \cdot (-5) + 1 \cdot (-17) = -9;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 13, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -17, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -3, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & -5 & -17 \\ 6 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (3):

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & -5 & -17 \\ 6 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Правило Крамера

Из теоремы об обратной матрице следует, что равенство (4.3) может быть записано в виде

$$x = \frac{1}{|A|} A^{-1} b.$$

Следовательно,

$$x_j = \frac{1}{|A|} (b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Обозначим через Δ_j определитель матрицы, которая получается из A заменой j -го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по j -му столбцу, будем иметь:

$$\Delta_j = b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj}.$$

Тем самым равенства (4) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{|A|}, \\ &\dots \\ x_n &= \frac{\Delta_n}{|A|}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.1 (правило Крамера). *Решение системы*

$$Ax = b$$

с невырожденной квадратной матрицей A единственно и имеет вид (5).

Пример 2.

Найти решение системы

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

с помощью правила Крамера.

Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1.$$

Упражнение 2.

Найти решение системы

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2$$

с помощью правила Крамера.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, |A| = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 5 = 31 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна и определена. Воспользуемся правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 31,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 1 \cdot (-7) = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 = 31.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{31}{31} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{0}{31} = 0, x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{31}{31} = 1.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«Решение систем с помощью обратной матрицы.
Правило Крамера»

Задача 1.

Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Указание

Найдите главный определитель системы (поскольку он не равен нулю, система имеет единственное решение). Затем вычислите Δ_x , Δ_y и Δ_z .

Решение

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем Δ_x , Δ_y и Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Напоминаем: определители Δ_x , Δ_y и Δ_z получены из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

Отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ответ: $x = 1, y = 4, z = 2$.

Задача 2.

Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях a система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Указание

Для того, чтобы система была совместна, но не определена, должно выполняться условие

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Решение

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Разложением по первой строке получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = \\ &= a(a + 1)(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) = \\ &= (a - 1)^2(a + 2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta = 0$ при $a = 1$ или $a = -2$.

Значит, при $a \neq 1$ и при $a \neq -2$ система имеет единственное решение.

Определим число решений при $a = 1$ и $a = -2$.

1) При $a = 1$ система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{и } \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, что при этом система имеет бесконечно много решений, так как она фактически состоит из одного уравнения, и ее решениями будут любые три числа, сумма которых равна 1.

2) При $a = -2$ получаем систему

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2, \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

для которой

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Следовательно, этом случае решений нет.

Ответ: $a = 1$.

Задача 3.

Решить систему с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица системы невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. Затем найдите для нее обратную матрицу и умножьте эту матрицу на столбец свободных членов.

Решение

Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем матрицу A^{-1} :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -11 & A_{21} &= -25 & A_{31} &= 2 \\ A_{12} &= 9 & A_{22} &= -12 & A_{32} &= 3 \\ A_{13} &= -13 & A_{23} &= -11 & A_{33} &= 7 \end{aligned}$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Если

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то исходная система превращается в матричное уравнение $AX = B$, решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$X = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 - 150 + 8 \\ 9 - 72 + 12 \\ -13 - 66 + 28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3, y = 1, z = 1$.

Ответ: $x = 3, y = 1, z = 1$.

Задача 4.

Решить систему по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \end{cases}.$$

Указание

Для решения по правилу Крамера найдите определители Δ , Δ_x , Δ_y , Δ_z .

Для решения с помощью обратной матрицы составьте матрицу, обратную к матрице системы, и умножьте ее на столбец свободных членов.

Решение

1. Правило Крамера

Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 48.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3.$$

2. Решение с помощью обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3
\end{aligned}$$

Составим матрицу, обратную к матрице системы:

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Столбец решений системы получим, умножив A^{-1} на столбец свободных членов:

$$A^{-1}B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -12 + 18 + 10 \\ 42 - 15 + 5 \\ 66 - 3 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1, y = 2, z = 3$.

1.2.2. Ранг матрицы

Определение ранга

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем k строк и k столбцов в этой матрице и составим новую матрицу из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов. Определитель полученной матрицы называется *минором порядка k* . Например, если выбрать вторую и третью строки, первый и третий столбец, то получим минор второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 1.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 8 & -3 & 9 \\ 7 & -3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем строки с номерами 1,3,4 и столбцы с номерами 2,3,5.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \boxed{3} & \boxed{-1} & 0 & \boxed{7} \\ 2 & 7 & 8 & -3 & 9 \\ 7 & \boxed{-3} & \boxed{5} & 3 & \boxed{4} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{6} & 4 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, получим минор 3-го порядка

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 111.$$

В матрице A много миноров 3-го порядка. Если выбрать строки с номерами 1,2,4 и столбцы с номерами 1,2,5:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{3} & -1 & 0 & \boxed{7} \\ \boxed{2} & \boxed{7} & 8 & -3 & \boxed{9} \\ 7 & -3 & 5 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 6 & 4 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

то получим еще один из них:

$$M'_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Рангом матрицы называется
максимальный порядок ее
миноров, отличных от нуля.*

Ранг матрицы A будем обозначать через $\text{rg } A$.

Элементарные преобразования матрицы

Вычисление ранга матрицы удобно производить, приведя матрицу к более простому виду с помощью преобразований, которые не меняют ее ранга.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования вида:

1. Перестановка двух строк.
2. Умножение строки на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.

Теорема 5.1. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

Доказательство.

Остановимся лишь на доказательстве этого утверждения для 3-го типа элементарных преобразований для строк. Пусть матрица B получена из матрицы $A = ||a_{ij}||$ прибавлением к j -ой строке i -ой, умноженной на число λ . Покажем, что $\text{rg } B \leq \text{rg } A$. Пусть $\text{rg } A = r$. Рассмотрим произвольный минор матрицы B порядка $n \geq r$. Если этот минор не содержит j -ой строки, то он совпадает с соответствующим минором матрицы A и, следовательно, равен нулю. Если же он содержит j -ую строку, то он может быть представлен в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j k_1} + \lambda a_{i k_1} & \dots & a_{j k_n} + \lambda a_{i k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n k_1} & \dots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j k_1} & \dots & a_{j k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n k_1} & \dots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i k_1} & \dots & a_{i k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n k_1} & \dots & a_{i_n k_n} \end{vmatrix}.$$

Первый определитель равен нулю, так как он является минором матрицы A порядка $n > r$. Если i совпадает с одним из чисел $i_1, \dots, i_n$, то второй определитель равен нулю как определитель с двумя равными строками. В

противном случае второй определитель есть снова минор матрицы A порядка $n > r$ и поэтому тоже равен нулю.

Матрица A может быть получена из матрицы B прибавлением к j -ой строке i -ой, умноженной на $-\square$, и в силу доказанного $\text{rg } A \leq \text{rg } B$. Тем самым доказано, что $\text{rg } A = \text{rg } B$.

Приведение матрицы к ступенчатому виду

Пусть дана ненулевая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Опишем алгоритм, который с помощью элементарных преобразований приводит матрицу A к некоторому более простому виду. Будем использовать только элементарные преобразования строк, чтобы в дальнейшем можно было применить тот же алгоритм к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Найдем в матрице A ненулевой элемент a_{ij_1} с минимальным номером столбца j_1 и переставим i_1 -ую строку с первой. Тогда получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2j_1} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mj_1} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{1j_1}^{(1)} = a_{ij_1}, j = j_1, \dots, n, a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i \neq i_1, \\ a_{1j}, i = i_1, \end{cases} j = j_1, \dots, n.$$

Теперь будем прибавлять к каждой строке с номером $i, i = 2, \dots, m$ первую строку, умноженную на число $-\frac{a'_{ij_1}}{a_{1j_1}^{(1)}}$. В результате этих преобразований

получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1}^{(1)} & a_{1,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Далее, с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{2,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

проведем преобразования, аналогичные тем, которые делались с исходной матрицей. Тогда исходная матрица будет приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1}^{(1)} & \dots & a_{1,j_2-1}^{(1)} & a_{1j_2}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mj_2}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, придем к матрице *ступенчатого* вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1}^{(1)} & \dots & a_{1,j_2-1}^{(1)} & a_{1j_2}^{(1)} & \dots & a_{1,j_r-1}^{(1)} & a_{1j_r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2}^{(2)} & \dots & a_{2,j_r-1}^{(2)} & a_{2j_r}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rj_r}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы легко найти ранг. Действительно, выбрав первые r строк и столбцы $j_1, \dots, j_r$, получим минор

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1}^{(1)} & a_{1j_2}^{(1)} & \dots & a_{1j_r}^{(1)} \\ 0 & a_{2j_2}^{(2)} & \dots & a_{2j_r}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rj_r}^{(r)} \end{vmatrix} = a_{1j_1}^{(1)} a_{2j_2}^{(2)} \dots a_{rj_r}^{(r)} \neq 0.$$

С другой стороны, любой минор порядка большего, чем r , равен нулю, так как содержит ненулевую строку. Тем самым ранг полученной матрицы равен r , а в силу того, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, ранг исходной матрицы тоже равен r .

Пример 2.

Приведем к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

и найдем ее ранг. Чтобы иметь дело с целыми числами, удобно иметь ненулевой элемент с минимальным номером столбца равным единице. Для этого вычтем из первой строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Теперь будем вычитать из всех строк, начиная со второй, первую, умноженную на элемент, стоящий во втором столбце и соответствующей строке:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из последней строки третью, приходим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице три ненулевых строки, поэтому ее ранг, а значит, и ранг исходной матрицы равен 3.

Упражнение 1.

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix},$$

приведя ее к ступенчатому виду.

Решение.

Поменяем местами 1-ую и 3-ю строки матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем 1-ую строку из 2-ой и 4-ой, а к 3-ей строке прибавим 1-ую, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-ей строки 2-ую, а из 4-ой – удвоенную 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами 3-й и 4-й столбцы и вычтем из последней строки 3-ю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор 4-го порядка из столбцов 1,2,3 и 5:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2 \neq 0.$$

Следовательно, $\text{rg } A = 4$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «Ранг матрицы»

Задача 1.

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Указание

Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если Δ_A не равен нулю, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$.

Решение

Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если Δ_A не равен нулю, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$. Найдем Δ_A разложением по первой строке:

$$\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 5 - 15 = 0.$$

Следовательно, $r(A) < 3$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, $r(A) > 0$. Значит, $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$. Если найдется минор 2-го порядка, не равный нулю, то $r(A) = 2$.

Вычислим минор из элементов, стоящих на пересечении двух первых строк и двух первых столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Ответ: $r(A) = 2$.

Если найден минор k -го порядка, не равный нулю, то можно утверждать, что $r(A) \geq k$. Если же выбранный минор k -го порядка равен нулю, то из этого еще не следует, что $r(A) < k$, так как могут найтись миноры того же порядка, не равные нулю.

Задача 2.

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя элементарные преобразования, приведите матрицу A к треугольному виду.

Решение

У матрицы A существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(A) \leq 4$. Разумеется, непосредственное вычисление всех миноров 4-го, 3-го и т.д. порядка потребовало бы слишком много времени. Поэтому, используя

элементарные преобразования, приведем матрицу A к треугольному виду. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы 1-го столбца, кроме a_{11} , окажутся равными нулю:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы A равен рангу полученной матрицы размера 2×6 , т.е. $r(A) \leq 2$. Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

следовательно, $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

Задача 3.

Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя элементарные преобразования, приведите матрицу A к треугольному виду.

Решение

Отметим, что минор, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении первых трех строк и первых трех столбцов, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому ранг данной матрицы не меньше трех.

Приведем матрицу к треугольному виду:

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 36 \end{pmatrix} :$$
$$: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивание нулевых строк приводит к тому, что

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Размер полученной матрицы 3×5 , поэтому ее ранг не более трех. Поскольку минор 3-го порядка, не равный нулю, существует, ранг исходной матрицы равен 3.

Ответ: $r(A) = 3$.

Задача 4.

Найти значения λ , при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг.

Указание

Приведите матрицу A к треугольному виду и найдите значения λ , при которых с помощью элементарных преобразований вторую строку можно сделать нулевой.

Решение

Переставим столбцы матрицы A :

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} : \\ : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что при $\lambda = 0$ вторая строка матрицы становится нулевой, и после ее вычеркивания получаем:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, его порядок равен 2, следовательно, при $\lambda = 0$ $r(A) = 2$.

Если $\lambda \neq 0$, то минор, составленный из последних трех столбцов, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-13) = 13\lambda \neq 0.$$

Значит, при $\lambda \neq 0$ $r(A) = 3$.

Итак, наименьший ранг, равный 2, матрица A имеет при $\lambda = 0$.

Ответ: $\lambda = 0$.

1.2.3. Решение систем линейных уравнений в общем случае.

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема о базисном миноре

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Пример 1. В матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

из примера 2 раздела «Ранг матрицы», ранг которой равен 3, базисным минором является, например, минор, получаемый при выборе строк с номерами 1,2,3 и столбцов с номерами 3,4,5. Действительно,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Можно выбрать и другой базисный минор, например, минор, получаемый при выборе строк с номерами 1,2,3 и столбцов с номерами 4,5,6:

$$M'_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 14 \\ -1 & 3 & 21 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Теорема 6.1 (о базисном миноре). *Любая строка (столбец) матрицы есть линейная комбинация строк (столбцов) базисного минора.*

Доказательство.

В силу того, что при транспонировании матрицы базисный минор остается базисным, достаточно доказать утверждение для столбцов. Будем считать, что базисный минор порядка r находится в левом верхнем углу матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(этого всегда можно добиться перестановкой строк и столбцов). Зафиксируем некоторый номер столбца k , $r < k \leq n$, и рассмотрим определитель

$$rg\bar{A} = rgA \quad (3)$$

Доказательство.

1. Необходимость.

Пусть система (2) совместна. Это означает, что найдутся числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = b, \quad (4)$$

где через $A_j, j = 1, \dots, n$, обозначается j -й столбец матрицы A . Вычитая из последнего столбца расширенной матрицы $\bar{A}$ первый, умноженный на x_1 , затем второй, умноженный на x_2 и т.д., последний, умноженный на x_n , придем к матрице

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен рангу расширенной матрицы $\bar{A}$. Поскольку очевидно, что $rg \bar{A}' = rg A$, имеет место равенство (3).

2. Достаточность.

Пусть выполнено равенство (3). Выберем в матрице A базисный минор.

Пусть его столбцы имеют номера $j_1, \dots, j_r$. Этот же минор является базисным и для расширенной матрицы $\bar{A}$. По теореме о базисном миноре столбец b может быть представлен как линейная комбинация столбцов базисного минора

$$\lambda_1 A_{j_1} + \dots + \lambda_r A_{j_r} = b.$$

Положив

$$x_{j_k} = \lambda_k, k = 1, \dots, r, \quad x_j = 0, j \notin j_1, \dots, j_r,$$

получим, что имеет место равенство (4). Это означает, что найденные $x_j, j = 1, \dots, n$, удовлетворяют системе (2).

Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Пусть дана совместная система линейных алгебраических уравнений (2). Выберем в матрице этой системы какой-нибудь базисный минор. Незвестные, коэффициенты при которых образуют столбцы базисного минора, называются *базисными*, а остальные неизвестные – *свободными*.

Общим решением системы называется представление базисных неизвестных через свободные. Будем считать, что порядок базисного минора равен r и он находится в левом верхнем углу (этого всегда можно добиться, переставляя уравнения системы и переобозначая переменные). Из теоремы

Кронекера-Капелли вытекает, что этот минор является базисным и для расширенной матрицы, а из теоремы о базисном миноре следует, что все строки в расширенной матрице, начиная с $(r + 1)$ -ой, есть линейные комбинации строк базисного минора. Иначе говоря, все уравнения системы, начиная с $(r + 1)$ -ого, являются следствием первых r уравнений и их можно отбросить. Перенеся свободные неизвестные в правую сторону, получим систему

[illegible]

Запишем эту систему в матричном виде:

$$M_{\xi}^{\xi} = x_{r+1} \alpha_{r+1} + K + x_n \alpha_n + \beta, \quad (5)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{K} & a_{1r} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ a_{r1} & \mathbf{L} & a_{rr} \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_r \end{pmatrix}, \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \mathbf{M} \\ a_{rj} \end{pmatrix},$$

$$j = r + 1, \dots, n, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{M} \\ b_r \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $|M|$ не равен нулю, существует обратная матрица M^{-1} . Умножая равенство (5) на M^{-1} , получим общее решение

$$\xi = x_{r+1}M^{-1}\alpha_{r+1} + \mathbf{K} + x_nM^{-1}\alpha_n + M^{-1}\beta. \quad (6)$$

Введем столбцы из n строк:

$$e_0 = \begin{pmatrix} M^{-1}\beta \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} M^{-1}\alpha_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} M^{-1}\alpha_{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{M} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{n-r} = \begin{pmatrix} M^{-1}\alpha_n \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Придавая свободным переменным $x_{r+1}, \dots, x_n$ произвольные числовые значения $C_1, \dots, C_{n-r}$, общее решение (6.6) можно переписать в виде:

$$x = e_0 + C_1 e_1 + \dots + C_{n-r} e_{n-r}.$$

Если свободные неизвестные отсутствуют, т.е. $r = n$, то решение системы единственно. Таким образом, из теоремы Кронекера-Капелли вытекает

Следствие 6.1. *Для того чтобы система (2) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$rg\bar{A} = rgA = n.$$

Тем самым возможны лишь следующие три случая:

1. $rg\bar{A} \neq rgA$ – система несовместна.
2. $rg\bar{A} = rgA = n$ – система имеет единственное решение.
3. $rg\bar{A} = rgA < n$ – система имеет бесконечно много решений.

Однородные системы

Система (2) называется *однородной*, если $b_1 = \dots = b_m = 0$. Очевидно, что однородная система всегда совместна – у нее имеется нулевое решение $x_1 = x_n = 0$. Для однородной системы возможны лишь следующие два случая:

1. $rg\bar{A} = rgA = n$ – система имеет единственное нулевое решение.
2. $rg\bar{A} = rgA < n$ – система имеет бесконечно много решений.

Поскольку для квадратной матрицы A порядка n $rg A < n$ в том и только в том случае, если $|A| = 0$, получаем

Следствие 6.2. *Однородная система с квадратной матрицей имеет ненулевое решение в том и только в том случае, если $|A| = 0$.*

Метод Гаусса

При практическом решении систем линейных алгебраических уравнений удобно пользоваться *методом Гаусса*, который состоит в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Предположим, что расширенная матрица системы (2) приведена к ступенчатому виду. Будем считать, что переменные переобозначены так, что базисный минор матрицы системы находится в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей и четвертой строк вторую и прибавляя к пятой строке вторую, приходим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система приведена к виду

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1,$$

$$x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2.$$

Выбрав x_1 и x_2 в качестве базисных неизвестных, с помощью обратного хода метода Гаусса находим выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_1 = 5x_3 - 3x_4 + 5x_5 - 3,$$

$$x_2 = -x_3 + x_4 - 2x_5 + 2.$$

Придавая свободным переменным x_3, x_4, x_5 произвольные числовые значения C_1, C_2, C_3 , общее решение можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1. Найти решение системы

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$

$$2x_1 - 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3$$

методом Гаусса.

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого вычтем из 3-ей строки 1-ую, а из 2-ой – удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к 3-ей строке 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система приведена к виду

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$

$$-x_3 + x_4 = -2.$$

Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_3 и выразим их через свободные неизвестные x_2 и x_4 :

$$x_1 = 3x_2 - 3x_4 - 9,$$

$$x_3 = x_4 + 2.$$

Если $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, то общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «Системы уравнений общего вида. Метод Гаусса»

Задача 1.

Указать базисный минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание

Определите вначале ранг матрицы A , а затем найдите ненулевой минор, порядок которого равен $r(A)$.

Решение

Определим $r(A)$. Вторая и четвертая строки A равны, поэтому после вычитания из 4-й строки 2-й получаем:

$$A : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор полученной матрицы, составленный из первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4 \neq 0.$$

Таким образом, найден минор максимально возможного (3-го) порядка, не равный нулю. Следовательно, ранг матрицы A равен рангу преобразованной матрицы, то есть равен 3, а рассмотренный минор является базисным.

Ответ: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Задача 2.

Определить количество решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Указание

Сравните ранги матрицы системы и расширенной матрицы.

Решение

Сравним ранги матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -8 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений будем искать ранг матрицы A_1 , отделив ее последний столбец вертикальной чертой. Тогда столбцы, стоящие слева от черты, образуют матрицу A , и мы одновременно найдем ранги обеих матриц.

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{array} \right).$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую, а из третьей – первую, умноженную на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Таким образом, $r(A) = 2$, а $r(A_1) = 3$, следовательно, система не имеет решений.

Ответ: система несовместна.

Задача 3.

Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедившись в том, что система совместна, определите базисные и свободные неизвестные и выразите базисные неизвестные через свободные.

Решение

Найдем $r(A)$ и $r(A_1)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array} \right) : \\ &: \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 15 & -21 & 33 & -39 & -36 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \\ &: \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Итак, $r = r(A) = r(A_1) = 2$, а число неизвестных $n = 5$. Следовательно, $r < n$, и система имеет бесконечно много решений (совместна, но не определена).

Число базисных неизвестных равно r , то есть двум. Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2 , коэффициенты при которых входят в базисный

минор преобразованной матрицы A : $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Соответственно x_3, x_4, x_5 — свободные неизвестные.

Запишем систему, равносильную исходной, коэффициентами в которой являются элементы полученной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 - 13x_5 = -12 \end{cases}$$

и выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \frac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}$$

Получено общее решение системы. Одно из частных решений можно найти, положив все свободные неизвестные равными нулю: $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Тогда

$$x_1 = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = -\frac{12}{5}.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \frac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}$$

Задача 4.

Найти общее решение системы, выразив в ответе первые неизвестные через последние:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Указание

Приведите расширенную матрицу к виду

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array} \right).$$

Решение

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array} \right).$$

Минор, состоящий из первых трех столбцов полученной матрицы,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

поэтому $r(A) = r(A_1) = 3$, выбранный минор является базисным, а x_1, x_2, x_3 , коэффициенты при которых составляют базисный минор, – базисными неизвестными. Тогда свободное неизвестное – x_4 , и система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 - x_4 \\ -7x_2 + 8x_3 = 5x_4 - 12, \\ -3x_2 = -x_4 - 11 \end{cases}$$

откуда
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{6x_4 + 5}{8} \\ x_2 = \frac{x_4 + 11}{3} \\ x_3 = \frac{22x_4 + 41}{24} \end{cases}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{6x_4 + 5}{8}; x_2 = \frac{x_4 + 11}{3}; x_3 = \frac{22x_4 + 41}{24}.$

Задача 5.

Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Указание

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу свободных неизвестных. Задайте свободным неизвестным значения $1,0,0$; $0,1,0$; $0,0,1$ и вычислите соответствующие значения базисных неизвестных.

Решение

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу свободных неизвестных.

Матрица A_1 отличается от матрицы A только добавлением нулевого столбца свободных членов, поэтому все ее ненулевые миноры являются минорами матрицы A , то есть $r(A) = r(A_1)$. Найдем $r(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Значит, $r(A) = 2$. Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3 \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} x_4 = \frac{-x_1 + 6x_2 - 4x_3}{5} \\ x_5 = \frac{6x_1 + 19x_2 - x_3}{5} \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$.

Тогда $x_4 = -0,2, x_5 = 1,2$, и решение можно записать в виде столбца

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

2) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$.

При этом $x_4 = 1,2, x_5 = 3,8$, и следующее решение системы имеет вид

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}.$$

3) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$. Отсюда $x_4 = -0,8, x_5 = -0,2$, и последний столбец

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

*Фундаментальная система решений, построенная при таком выборе свободных неизвестных, называется **нормальной**. Поскольку столбцы свободных неизвестных $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений X_1, X_2, X_3 .*

Итак, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

При этом любое решение данной системы имеет вид: $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 6.

Составить однородную систему из двух уравнений, для которой столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Указание

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}$$

Подставьте вместо $x_1, \dots, x_5$ элементы столбцов X_1, X_2, X_3 и решите полученную систему уравнений для коэффициентов a_{ij} .

Решение

Существует бесконечно много систем однородных линейных уравнений, для каждой из которых фундаментальная система решений имеет указанный вид. Число уравнений в таких системах может быть различным. При этом можно указать их наименьшее требуемое количество, а увеличивать их число можно неограниченно.

Определим вначале, из какого наименьшего числа уравнений может состоять такая система.

Число элементов каждого столбца равно пяти, следовательно, в системе пять неизвестных ($n = 5$). Количество столбцов, составляющих фундаментальную систему, равно трем, то есть $n - r = 3$, поэтому $r = 5 - 3 = 2$. Значит, матрица A должна иметь по крайней мере 2 строки. Следовательно, система уравнений с заданной фундаментальной системой решений может состоять из двух и более уравнений.

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}$$

Подставим вместо $x_1, \dots, x_5$ элементы столбцов X_1, X_2, X_3 . Получим:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + 2a_{23} - a_{24} + a_{25} = 0' \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{22} + 3a_{23} + a_{24} = 0' \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \\ a_{21} - a_{22} + 2a_{25} = 0' \end{cases}$$

Разобьем полученные 6 уравнений на две системы, одна из которых содержит a_{1i} , а вторая – a_{2i} :

$$1) \begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \end{cases}.$$

Найдем какое-либо частное решение этой системы. Приведем ее матрицу к треугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда
$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = a_{14} - a_{15} \\ a_{12} + 3a_{13} = -a_{14} \\ 4a_{13} = -3a_{14} - a_{15} \end{cases}.$$

Следовательно,
$$\begin{cases} a_{11} = \frac{5a_{14} - 5a_{15}}{4} \\ a_{12} = \frac{5a_{14} + 3a_{15}}{4} \\ a_{13} = \frac{-3a_{14} - a_{15}}{4} \end{cases}.$$

Выберем $a_{14} = a_{15} = 4$, тогда $a_{11} = 0$, $a_{12} = 8$, $a_{13} = -4$.

2) Так же выглядит общее решение системы для a_{2i} :

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{5a_{24} - 5a_{25}}{4} \\ a_{22} = \frac{5a_{24} + 3a_{25}}{4} \\ a_{23} = \frac{-3a_{24} - a_{25}}{4} \end{cases}.$$

Выберем свободные неизвестные так, чтобы получить решение, линейно независимое с предыдущим.

Пусть $a_{24} = 4$, $a_{25} = 0$, тогда $a_{21} = 5$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = -3$.

Итак, используя найденные значения коэффициентов, можно составить линейную однородную систему:

$$\begin{cases} 8x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0' \end{cases}$$

фундаментальная система решений которой имеет вид, приведенный в условии задачи.

Ответ:
$$\begin{cases} 8x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0' \end{cases}.$$

Задача 7.

Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Указание

Убедитесь в том, что система совместна. Затем составьте соответствующую однородную систему и найдите для нее фундаментальную систему решений. Далее используйте то, что общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Решение

Убедимся в том, что система совместна:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) :$$

$$: \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right).$$

Итак, $r(A) = r(A_1) = 2$ – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5 \end{cases}'$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3} \\ x_2 = \frac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3} \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений может быть выбрана так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$$X_{\text{частн}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ и общее решение системы имеет вид:}$$

$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + X_{\text{частн}}$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

$$\text{Ответ: } X = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание

Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, а затем исключите x из второго и третьего уравнений.

Решение

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и

2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -11y + z = 3 \end{cases}$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -24y = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 \\ c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 9.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.$$

Указание

Исключите x_2 из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 .

Решение

Исключим x_2 из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $x_1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{3}, x_4 = -\frac{4}{3}$.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1.1. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение

Определение вектора

Пусть даны две точки A и B . Отрезок, соединяющий эти точки, будем называть *направленным*, если указаны начальная и конечная точка отрезка, т.е. на отрезке указано направление.

Вектором называется направленный отрезок. Векторы будем обозначать буквами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ или, указывая начальные и конечные точки, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \dots$.

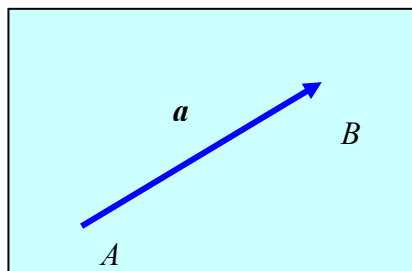


Рис.1

Вектор называется *нулевым*, если начальная и конечная точки совпадают. В этом случае будем писать $\mathbf{a} = 0$. *Длиной* вектора называется длина соответствующего ему направленного отрезка. Длина обозначается через $|\mathbf{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными* (при этом пишут $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$), если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Иными словами, мы рассматриваем *свободные* векторы, начальные точки которых могут выбираться произвольным образом.

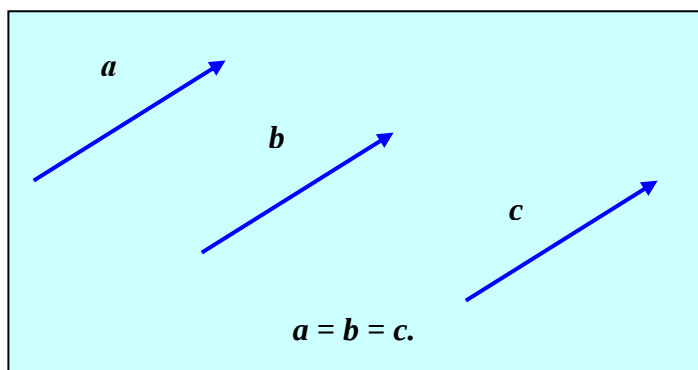


Рис. 2

Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов. Пусть даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Совместим начальную точку вектора $\mathbf{b}$ с конечной точкой вектора $\mathbf{a}$. Тогда вектор, начальная точка которого совпадает с начальной точкой вектора $\mathbf{a}$, а конечная – с конечной точкой $\mathbf{b}$, называется *суммой векторов* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

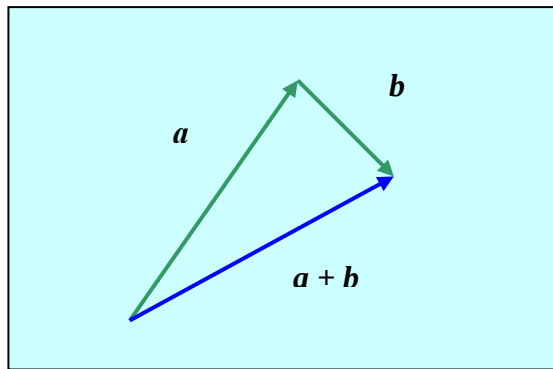


Рис. 3

Совместим начальные точки векторов a и b и обозначим эту точку через O . Построим параллелограмм $OACB$ на сторонах этих векторов. Тогда вектор $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = a + b$. Тем самым получено эквивалентное определение суммы векторов, называемое *правилом параллелограмма*.

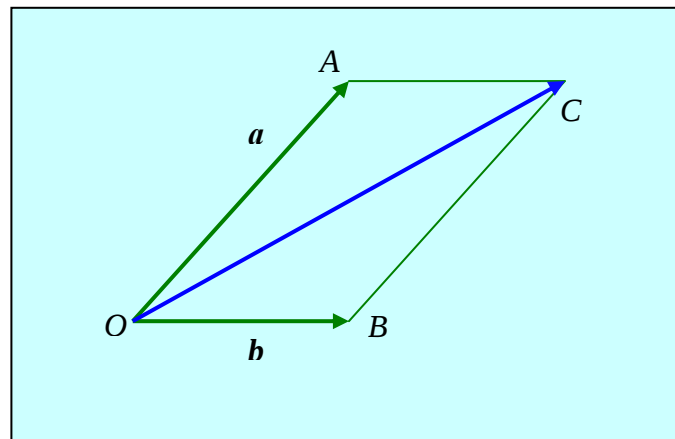


Рис. 4

Из рис. 4 видно, что $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OB} + \vec{BC}$.

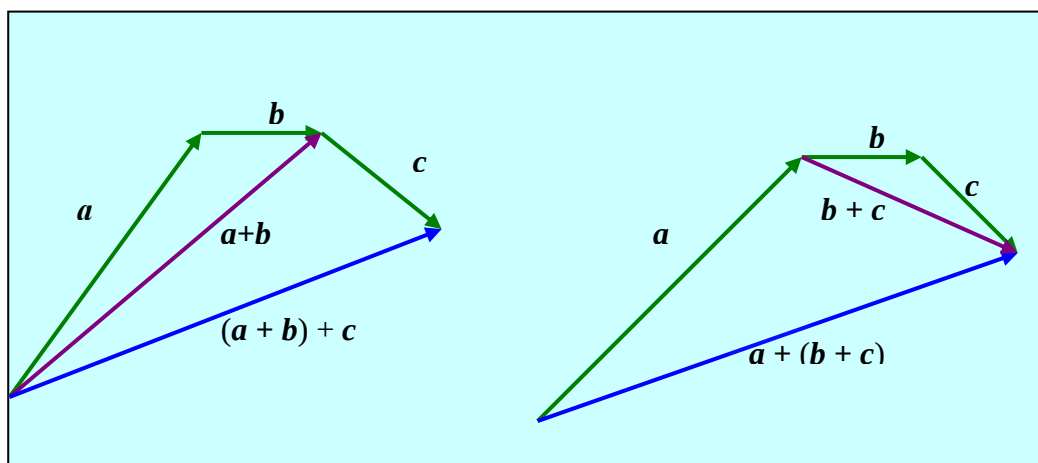


Рис. 5

Таким образом, операция сложения векторов коммутативна:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Имеет место также свойство ассоциативности:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

2. Умножение вектора на число. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется вектор $\lambda \mathbf{a}$ такой, что:

1. $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$.
2. $\lambda \mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$, и оба вектора одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и имеют противоположные направления, если $\lambda < 0$.

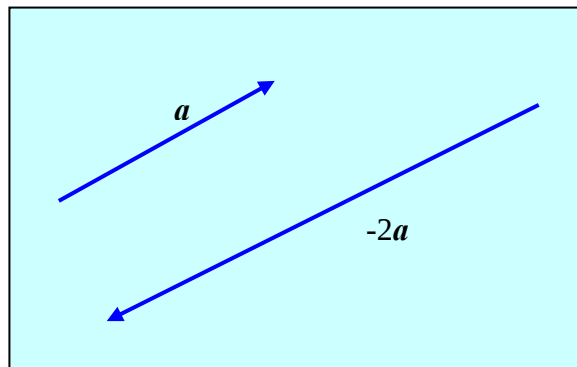


Рис. 6

Таким образом, если $\mathbf{a}$ не равен нулю и $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то найдется число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. Достаточно взять

$$\lambda = \varepsilon \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|},$$

где $\varepsilon = 1$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаково направлены, и $\varepsilon = -1$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют противоположные направления.

Отметим основные свойства операции умножения вектора на число, которые непосредственно вытекают из определения этой операции:

1. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$.
2. $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu)\mathbf{a}$.
3. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$.

3. Вычитание векторов. Разностью двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b}$.

Координаты вектора и точки

Зафиксируем в пространстве некоторую точку O и три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

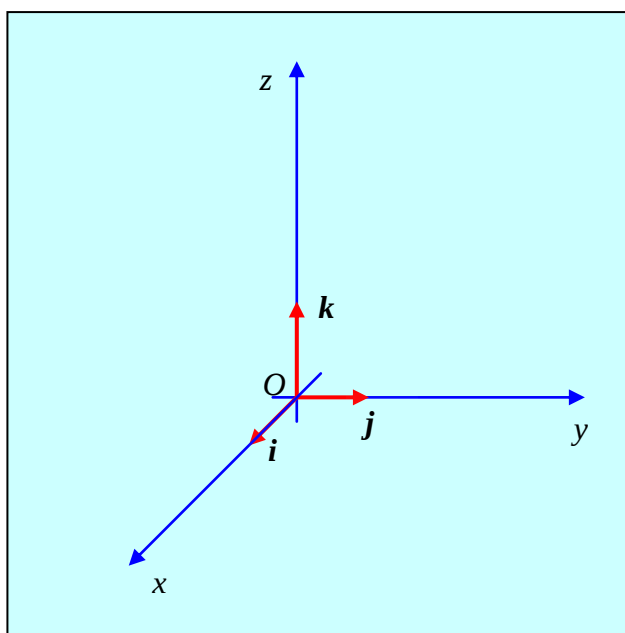


Рис. 7

Совокупность точки O и векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат*. Прямые, проходящие через точку O параллельно векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, называются *координатными осями* и носят названия осей *абсцисс* (Ox), *ординат* (Oy) и *аппликат* (Oz) соответственно.

Пусть задан вектор $\mathbf{a}$. Совместим его начальную точку с началом координат O , а через его конечную точку A проведем плоскости, перпендикулярные координатным осям. Пусть эти плоскости пересекают оси Ox , Oy , Oz в точках L , M , N соответственно.

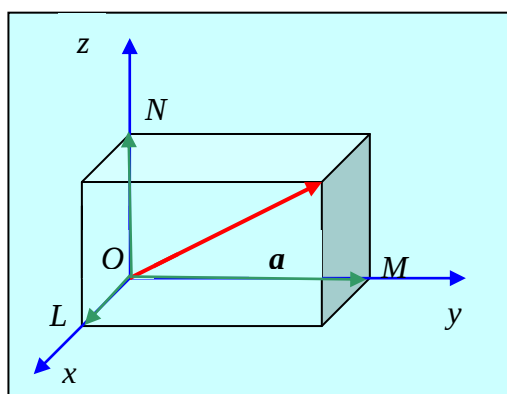


Рис. 8

Нетрудно убедиться, что

$$\vec{OA} = \vec{OL} + \vec{OM} + \vec{ON}.$$

Поскольку векторы $\vec{OL}$, $\vec{OM}$, $\vec{ON}$ коллинеарны векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно, то найдутся числа x_1 , y_1 , z_1 такие, что

$$\vec{OL} = x_1 \vec{i}, \vec{OM} = y_1 \vec{j}, \vec{ON} = z_1 \vec{k}.$$

Следовательно, любой вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}. \quad (1)$$

Представление (1) единственно. Действительно, если предположить, что наряду с (1) существует другое представление

$$\mathbf{a} = x'_1 \mathbf{i} + y'_1 \mathbf{j} + z'_1 \mathbf{k},$$

то, вычитая это равенство из (7.1), получим

$$0 = (x_1 - x'_1) \mathbf{i} + (y_1 - y'_1) \mathbf{j} + (z_1 - z'_1) \mathbf{k}.$$

Если $x_1 \neq x'_1$, то

$$\vec{i} = -\frac{y_1 - y'_1}{x_1 - x'_1} \vec{j} - \frac{z_1 - z'_1}{x_1 - x'_1} \vec{k},$$

что невозможно, т.к. вектор в правой части лежит в плоскости, параллельной осям Oy и Oz , а вектор $\mathbf{i}$ перпендикулярен этой плоскости. Следовательно, $x_1 = x'_1$. Аналогично доказывается, что $y_1 = y'_1$ и $z_1 = z'_1$.

Числа x_1, y_1, z_1 в представлении (1) называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$. Вместе с равенством (1) будет использоваться также запись вида

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1).$$

Радиусом-вектором точки A называется вектор, начало которого совпадает с началом координат O , а конец – с точкой A . *Координатами точки A* называются координаты радиус-вектора точки A . При этом, если $\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, будем писать

$$A = \{x_1, y_1, z_1\}.$$

Линейные операции над векторами в координатах

1. Сложение векторов. Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, а $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \quad (2)$$

Доказательство.

Доказательство.

Имеем $\mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}$. Поэтому

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} + x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k} = (x_1 + x_2) \mathbf{i} + (y_1 + y_2) \mathbf{j} + (z_1 + z_2) \mathbf{k}.$$

2. Умножение вектора на число. Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, то

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \quad (3)$$

Доказательство.

Имеем $\mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$. Следовательно,

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) = \lambda x_1 \mathbf{i} + \lambda y_1 \mathbf{j} + \lambda z_1 \mathbf{k}.$$

Из формул (2) и (3) вытекает, что

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Пример 1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $B = \{x_2, y_2, z_2\}$. Имеем (см. рис. 9)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

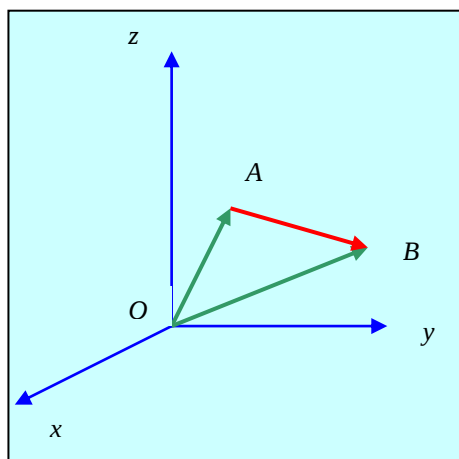


Рис. 9

Проекция вектора на ось

Прямую с заданным на ней направлением будем называть *осью*. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l . Обозначим через C и D проекции точек A и B на ось l (см. рис. 7.10). Тогда *проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l* $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$ называется

величина $|\vec{CD}|$, если направление оси l совпадает с направлением вектора $\vec{CD}$, и $-|\vec{CD}|$ в противном случае.

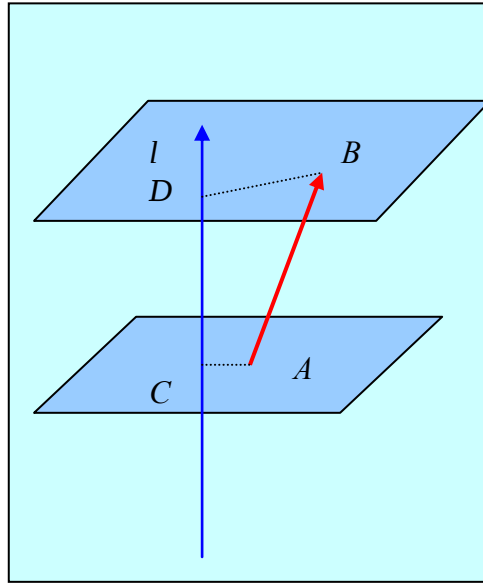


Рис. 10

Если обозначить через α угол между вектором $\vec{AB}$ и осью l , то

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \alpha. \quad (4)$$

Из определения координат вектора вытекает, что если $\mathbf{a} = (x, y, z)$, то

$$\begin{aligned} x &= \text{пр}_{Ox} \mathbf{a}, \\ y &= \text{пр}_{Oy} \mathbf{a} \\ z &= \text{пр}_{Oz} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Одним из основных свойств проекции вектора на ось является следующее свойство:

$$\text{пр}_l (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_l \mathbf{a} + \text{пр}_l \mathbf{b}.$$

(6)

Доказательство.

Введем декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с осью l .

Тогда, если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Из равенств (5) имеем

$$x_1 = \text{пр}_l \mathbf{a}, \quad x_2 = \text{пр}_l \mathbf{b}, \quad x_1 + x_2 = \text{пр}_l (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Отсюда вытекает справедливость равенства (6).

Через $\text{пр}_c \mathbf{a}$ будем обозначать проекцию вектора $\mathbf{a}$ на ось, задаваемую вектором $\mathbf{c}$.

Пусть дан произвольный вектор $\mathbf{a} \neq 0$. Его *ортом* называется вектор единичной длины, коллинеарный $\mathbf{a}$ и имеющий с ним одинаковое направление. Из определения умножения вектора на число получаем, что вектор

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$$

является ортом вектора $\mathbf{a}$.

Пусть $\mathbf{a} = (x, y, z) \neq 0$. Обозначим через α, β и γ углы, образованные осями Ox, Oy и Oz с вектором $\mathbf{a}$. Тогда из (4) и (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} x &= |\mathbf{a}| \cos \alpha, \\ y &= |\mathbf{a}| \cos \beta, \\ z &= |\mathbf{a}| \cos \gamma, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \cos \beta, |\mathbf{a}| \cos \gamma) = |\mathbf{a}| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Следовательно,

$$\mathbf{e}_a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (7)$$

Величины $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\mathbf{a}$.

Скалярное произведение

Пусть даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Обозначим через φ угол между этими векторами. *Скалярным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется величина

$$ab = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют *ортогональными* (при этом пишут $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), если угол между ними прямой. Нулевой вектор считается ортогональным любому. Из определения скалярного произведения вытекает, что

$$ab = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

(символом $\perp$ обозначается эквивалентность утверждений).

Остановимся на основных свойствах скалярного произведения.

1. $ab = ba$.
2. $(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(ab)$.
3. $ab = |\mathbf{a}| \text{ пр}_a \mathbf{b}$.

$$4. \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Доказательство.

В силу свойства 3 и (6)

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_a (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\operatorname{пр}_a \mathbf{b} + \operatorname{пр}_a \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_a \mathbf{b} + |\mathbf{a}| \operatorname{пр}_a \mathbf{c} = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

5. *Скалярным квадратом* вектора $\mathbf{a}$ называется величина $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa}$. Из определения скалярного произведения получаем

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2. \quad (8)$$

6. Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\mathbf{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство.

Имеем

$$\mathbf{ab} = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k})(x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = x_1x_2 \mathbf{i}^2 + y_1x_2 \mathbf{ji} + z_1x_2 \mathbf{ki} + x_1y_2 \mathbf{ij} + y_1y_2 \mathbf{j}^2 + z_1y_2 \mathbf{kj} + x_1z_2 \mathbf{ik} + y_1z_2 \mathbf{jk} + z_1z_2 \mathbf{k}^2.$$

Поскольку $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$, получаем

$$\mathbf{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

7. Если $\mathbf{a} = (x, y, z)$, то

$$|\overset{\text{r}}{\mathbf{a}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Доказательство.

Из свойств 5 и 6 получаем

$$|\overset{\text{r}}{\mathbf{a}}| = \sqrt{\overset{\text{rr}}{\mathbf{aa}}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Из равенства (7) и свойства 7 вытекает, что направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

8. Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, а φ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство.

Из свойств 6 и 7 получаем

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

9. Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство.

Обозначим через φ угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Тогда из свойства 8 получаем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = |\vec{a}| \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Рассмотрим выражение $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$. Имеем

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2.$$

Пользуясь равенством (8) и определением скалярного произведения, получаем

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi + |\mathbf{b}|^2, \quad (9)$$

где φ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках A , B и C .

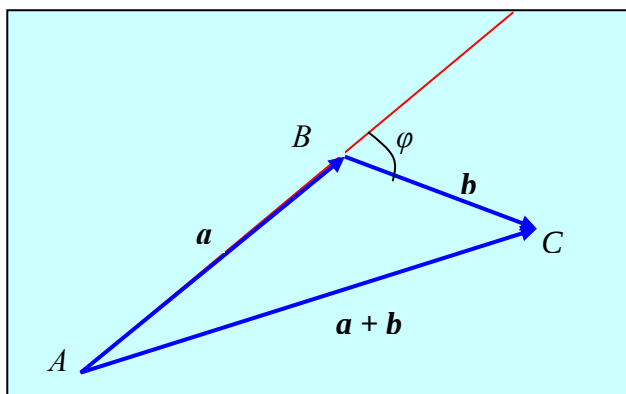


Рис. 11

Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Положим $\alpha = \angle ABC$. В силу того, что $\alpha = \pi - \varphi$, $\cos \alpha = -\cos \varphi$. Поэтому из (9) получаем известную теорему косинусов:

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos \alpha + |\overrightarrow{BC}|^2.$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A = \{1, 1, 2\}$, $B = \{1, 6, 3\}$ и $C = \{4, 5, 2\}$. Найти координаты проекции точки B на сторону AC .

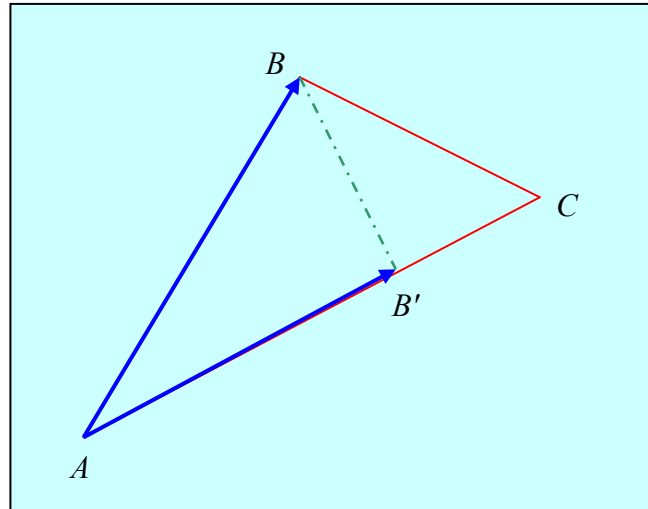


Рис. 12

Обозначим проекцию точки B на сторону AC через B' . Тогда

$$\vec{AB'} = \text{proj}_{\vec{AC}} \vec{AB} = \frac{1}{|\vec{AC}|} \vec{AC} \frac{\vec{AB} \vec{AC}}{|\vec{AC}|}.$$

Имеем

$$\vec{AB} = (0, 5, 1), \vec{AC} = (3, 4, 0), |\vec{AC}| = 5, \vec{AB} \vec{AC} = 20.$$

Поэтому

$$\vec{AB'} = \frac{4}{5}(3, 4, 0).$$

Следовательно,

$$\vec{OB'} = \vec{OA} + \vec{AB'} = (1, 1, 2) + \frac{4}{5}(3, 4, 0) = \left(\frac{17}{5}, \frac{21}{5}, 2\right).$$

Отсюда

$$B' = \left\{\frac{17}{5}, \frac{21}{5}, 2\right\}.$$

Упражнение 1.

В треугольнике с вершинами в точках $A = \{1, -2, 3\}$, $B = \{2, -2, 3\}$ и $C = \{2, 0, 3\}$ найти угол между медианой, проведенной из вершины A , и стороной AB .

Решение

Найдем координаты вектора $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = (2 - 1, -2 + 2, 3 - 3) = (1, 0, 0).$$

Пусть точка M – середина стороны BC , тогда

$$M = \left\{ \frac{2+2}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{3+3}{2} \right\} = \{2, -1, 3\}, \quad \overline{AM} = (1, 1, 0).$$

Найдем косинус искомого угла:

$$\cos \varphi = \frac{1+0+0}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«Линейные операции над векторами.
Скалярное произведение»

Задача 1.

Даны векторы $\mathbf{a} = (-2; 3; 5)$ и $\mathbf{b} = (4; -1; 7)$. Найти координаты вектора $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Указание

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

Решение

$$3\mathbf{a} = (-6; 9; 15), \quad -2\mathbf{b} = (-8; 2; -14).$$

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 3\mathbf{a} + (-2\mathbf{b}) = (-6 - 8; 9 + 2; 15 - 14) = (-14; 11; 1).$$

Ответ: $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-14; 11; 1)$.

Задача 2.

При каких α и β векторы $\mathbf{a} = (\alpha; 3; -5)$ и $\mathbf{b} = (1; -2; \beta)$ коллинеарны?

Указание

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Решение

Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то $\frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta}$. Отсюда:

$$1) \quad \frac{\alpha}{1} = \frac{3}{-2} \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \quad 2) \quad \frac{3}{-2} = \frac{-5}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{10}{3}$.

Задача 3.

Найти направляющие косинусы вектора $\mathbf{a} = \{-2; -1; 2\}$.

Указание

Направляющие косинусы являются координатами орта (единичного вектора) данного направления.

Решение

Найдем модуль вектора $\mathbf{a}$:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Разделив все координаты вектора $\mathbf{a}$ на его модуль, получим координаты орта:

$$\mathbf{e}_a = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

Следовательно,

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{1}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{1}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}$.

Задача 4.

Разложить вектор $\mathbf{d} = \{-6; 0; 13\}$ по базису из векторов $\mathbf{a} = \{2; -1; 3\}$, $\mathbf{b} = \{1; 1; -1\}$, $\mathbf{c} = \{-3; 1; 2\}$.

Указание

Требуется найти такие числа $\square$, $\square$, $\square$, что $\mathbf{d} = \square \mathbf{a} + \square \mathbf{b} + \square \mathbf{c}$. Задайте координаты вектора $\square \mathbf{a} + \square \mathbf{b} + \square \mathbf{c}$ и приравняйте их соответствующим координатам вектора $\mathbf{d}$.

Решение

Требуется найти такие числа $\square$, $\square$, $\square$, что $\mathbf{d} = \square \mathbf{a} + \square \mathbf{b} + \square \mathbf{c}$. Зададим координаты векторов $\square \mathbf{a}$, $\square \mathbf{b}$, $\square \mathbf{c}$: $\square \mathbf{a} = \{2\square; -\square; 3\square\}$,

$$\square \mathbf{b} = \{\square; \square; -\square\}, \square \mathbf{c} = \{-3\square; \square; 2\square\}.$$

Тогда $\square \mathbf{a} + \square \mathbf{b} + \square \mathbf{c} = \{2\square + \square - 3\square; -\square + \square + \square; 3\square - \square + 2\square\}$, причем координаты этого вектора должны равняться соответствующим координатам вектора $\mathbf{d}$. Приравнявая эти координаты, получаем систему уравнений для определения $\square$, $\square$, $\square$:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 3\gamma = -6 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 3\gamma = -6 \\ -3\alpha + 4\gamma = 6 \\ 5\alpha - \gamma = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 3\gamma = -6 \\ 17\alpha = 34 \\ 5\alpha - \gamma = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 3 \end{cases}.$$

Следовательно, $d = 2a - b + 3c$.

Ответ: $d = 2a - b + 3c$.

Задача 5.

Для векторов $a = \{1; -2; 3\}$, $b = \{-1; 1; -2\}$, $c = \{3; 2; 1\}$, $d = \{15; 7; 4\}$ найти такие числа α , β , γ , чтобы векторы αa , βb , γc и d образовали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

Указание

Для выполнения условия задачи сумма векторов $\alpha a + \beta b + \gamma c + d$ должна равняться нулю.

Найдите координаты вектора $\alpha a + \beta b + \gamma c + d$ и приравняйте нулю каждую из них.

Решение

Для выполнения условия задачи сумма векторов $\alpha a + \beta b + \gamma c + d$ должна равняться нулю.

Найдем координаты вектора $\alpha a + \beta b + \gamma c + d$:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + d = \{\alpha - \beta + 3\gamma + 15; 2\alpha + \beta + 2\gamma + 7; 3\alpha - 2\gamma + \gamma + 4\}.$$

Следовательно, α , β и γ , должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + 15 = 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma + 7 = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + 15 = 0 \\ 3\beta - 4\gamma - 23 = 0 \\ \beta - 8\gamma - 41 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + 15 = 0 \\ 3\beta - 4\gamma - 23 = 0 \\ -5\beta + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -5 \end{cases}.$$

Ответ: $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -5$.

Задача 6.

Выяснить, является ли система векторов $a = \{2; -3; 1\}$, $b = \{3; -1; 5\}$, $c = \{1; -4; 3\}$ линейно зависимой или линейно независимой.

Указание

Система векторов называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

верно только при $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Решение

Координаты вектора $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$ имеют вид:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \{2\alpha + 3\beta + \gamma; -3\alpha - \beta - 4\gamma; \alpha + 5\beta + 3\gamma\}.$$

Вычислим главный определитель Δ системы уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ -3\alpha - \beta - 4\gamma = 0 \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 17 - 3 \cdot (-5) + 1 \cdot (-4) = 15 \neq 0.$$

По правилу Крамера система имеет единственное решение, но для однородной системы всегда существует нулевое решение ($\alpha = \beta = \gamma = 0$). Поскольку других решений нет, данная система векторов линейно независима.

Ответ: система векторов линейно независима.

Задача 7.

Найти координаты какого-либо вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = (-4; 3; 0)$ и $\mathbf{b} = (12; -15; 16)$.

Указание

Диагональ параллелограмма является биссектрисой угла между сторонами только в том случае, если этот параллелограмм – ромб. Следовательно, искомым вектором можно считать сумму двух векторов равной длины, коллинеарных соответственно векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Решение

Вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как на смежных сторонах и выходящей из общего начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Диагональ параллелограмма является биссектрисой угла между сторонами только в том случае, если этот параллелограмм – ромб. Следовательно,

искомым вектором можно считать сумму двух векторов равной длины, коллинеарных соответственно векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{16 + 9} = 5; \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{144 + 225 + 256} = \sqrt{625} = 25.$$

Следовательно, $|\mathbf{5a}| = |\mathbf{b}|$. Значит, параллелограмм со сторонами, совпадающими с векторами $\mathbf{5a}$ и $\mathbf{b}$, является ромбом, поэтому вектор $\mathbf{5a} + \mathbf{b}$ будет иметь заданное направление.

$$\mathbf{5a} + \mathbf{b} = (-20 + 12; 15 - 15; 0 + 16) = (-8; 0; 16).$$

Ответ: $(-8; 0; 16)$.

Задача 8.

При каких значениях x, y, z точки $A(x; -1; 3)$, $B(5; -4; z)$, $C(-2; y; 9)$, $D(-5; 1; 7)$ являются вершинами параллелограмма?

Указание

Для выполнения условия задачи требуется коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение

Для выполнения условия задачи требуется коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \{5 - x; -3; z - 3\};$$

$$\overrightarrow{DC} = \{x_C - x_D; y_C - y_D; z_C - z_D\} = \{3; y - 1; 2\}.$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \Rightarrow \frac{5 - x}{3} = \frac{-3}{y - 1} = \frac{z - 3}{2}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-5 - x; 2; 4\};$$

$$\overrightarrow{BC} = \{-7; y + 4; 9 - z\}.$$

$$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{-5 - x}{-7} = \frac{2}{y + 4} = \frac{4}{9 - z}.$$

Из последней пропорции получаем, что $z = 1 - 2y$. Тогда

$$\frac{-3}{y - 1} = \frac{1 - 2y - 3}{2} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$$

$$1) \quad y = 2; \quad z = 1 - 4 = -3; \quad \frac{5 - x}{3} = \frac{-3}{2 - 1} = -3 \Rightarrow x = 14.$$

Но при этих значениях неизвестных

$$\frac{-5 - x}{-7} = \frac{-5 - 14}{-7} = \frac{19}{5} \neq \frac{2}{y + 4} = \frac{1}{3}.$$

$$2) \quad y = -2; \quad z = 1 + 4 = 5; \quad \frac{5-x}{3} = \frac{-3}{-2-1} = 1 \Rightarrow x = 2.$$

$$\frac{-5-x}{-7} = \frac{-5-2}{-7} = 1 = \frac{2}{y+4} -$$

условие задачи выполнено.

Ответ: $x = 2, y = -2, z = 5$.

Задача 9.

Найти скалярное произведение $(a - b)(2a + b)$, если $|a| = 2, |b| = 3$, а угол между a и b равен 120° .

Указание

Используйте определение скалярного произведения:

$$ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi.$$

Решение

Используем свойства скалярного произведения:

$$(a - b)(2a + b) = 2aa - 2ba + ab - bb = 2|a|^2 - ab - |b|^2.$$

По определению скалярного произведения

$$ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi = 2 \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -3.$$

$$\text{Тогда } (a - b)(2a + b) = 2 \cdot 4 - (-3) - 9 = 8.$$

Ответ: $(a - b)(2a + b) = 8$.

Задача 10.

Известно, что $|a| = 3, |b| = |c| = 1$ и $a + b + c = 0$. Найти $ab + bc + ca$.

Указание

Вектор $a + b + c$ – нулевой, поэтому его скалярное произведение с любым вектором равно нулю. Умножьте скалярно вектор $a + b + c$ сначала на a , затем на b и на c .

Решение

Вектор $a + b + c$ – нулевой, поэтому его скалярное произведение с любым вектором равно нулю. Умножим скалярно вектор $a + b + c$ сначала на a , затем на b и на c . Получим:

$$\begin{cases} \overset{rr}{aa} + \overset{rr}{ba} + \overset{rr}{ca} = 0 \\ \overset{rr}{ab} + \overset{rr}{bb} + \overset{rr}{cb} = 0 \\ \overset{rr}{ac} + \overset{rr}{bc} + \overset{rr}{cc} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|^2 + ab + ca = 0 \\ ab + |b|^2 + bc = 0 \\ ca + bc + |c|^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + ab + ca = 0 \\ ab + 1 + bc = 0 \\ ca + bc + 1 = 0 \end{cases}$$

Сложим левые и правые части полученных равенств:

$$11 + 2ab + 2bc + 2ca = 0, \text{ откуда } ab + bc + ca = -5,5.$$

Ответ: $ab + bc + ca = -5,5$.

Задача 11.

Даны векторы $a = \{2; -3; 1\}$ и $b = \{-1; 2; 1\}$. Найти скалярное произведение $(3a - b)(a + 2b)$.

Указание

Найдите координаты векторов $3a - b$ и $a + 2b$ или используйте свойства скалярного произведения.

Решение

1-й способ.

Найдем координаты векторов $3a - b$ и $a + 2b$:

$$3a - b = \{3 \cdot 2 + 1; 3 \cdot (-3) - 2; 3 \cdot 1 - 1\} = \{7; -11; 2\};$$

$$a + 2b = \{2 + 2 \cdot (-1); -3 + 2 \cdot 2; 1 + 2 \cdot 1\} = \{0; 1; 3\}.$$

$$\text{Тогда } (3a - b)(a + 2b) = 7 \cdot 0 - 11 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -5.$$

2-й способ.

Используем свойства скалярного произведения:

$$(3a - b)(a + 2b) = 3aa - ba + 6ab - 2bb = 3|a|^2 + 5ab - 2|b|^2.$$

$$|a|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 14;$$

$$|b|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6;$$

$$ab = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -7;$$

$$(3a - b)(a + 2b) = 3 \cdot 14 + 5 \cdot (-7) - 2 \cdot 6 = -5.$$

Ответ: $(3a - b)(a + 2b) = -5$.

Задача 12.

Найти косинус угла между векторами $a = \{2; -2; -1\}$ и $b = \{-6; 3; 2\}$.

Указание

Используйте формулу, выражающую косинус угла между векторами через их скалярное произведение.

Решение

$$|\overset{r}{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3;$$

$$|\overset{r}{b}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7;$$

$$\overset{r}{a}\overset{r}{b} = 2(-6) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -20;$$

$$\cos \varphi = \frac{\overset{r}{a}\overset{r}{b}}{|\overset{r}{a}| \cdot |\overset{r}{b}|} = \frac{-20}{3 \cdot 7} = -\frac{20}{21}.$$

Ответ: $-\frac{20}{21}$.

Задача 13.

Найти вектор $\mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \{2; -2; 3\}$, $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ и $\mathbf{ab} = -51$.

Указание

Координаты вектора $\mathbf{b}$ пропорциональны координатам $\mathbf{a}$. Если k – коэффициент пропорциональности, то $\mathbf{b} = \{2k; -2k; 3k\}$.

Решение

Координаты вектора $\mathbf{b}$ пропорциональны координатам $\mathbf{a}$. Если k – коэффициент пропорциональности, то $\mathbf{b} = \{2k; -2k; 3k\}$.

Тогда $\mathbf{ab} = 2 \cdot 2k - 2(-2k) + 3 \cdot 3k = 17k = -51$, откуда $k = -3$, $\mathbf{b} = \{-6; 6; -9\}$.

Ответ: $\mathbf{b} = \{-6; 6; -9\}$.

Задача 14.

Известно, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 7$. Найти значения k , при которых векторы $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ перпендикулярны.

Указание

Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Решение

Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

$$\begin{aligned}(\overset{\mathbf{r}}{a} + k\overset{\mathbf{i}}{b})(\overset{\mathbf{r}}{a} - k\overset{\mathbf{i}}{b}) &= \overset{\mathbf{r}}{a}\overset{\mathbf{r}}{a} + k\overset{\mathbf{i}}{b}\overset{\mathbf{r}}{a} - k\overset{\mathbf{r}}{a}\overset{\mathbf{i}}{b} - k^2\overset{\mathbf{i}}{b}\overset{\mathbf{i}}{b} = \\&= |\overset{\mathbf{r}}{a}|^2 - k^2 |\overset{\mathbf{r}}{b}|^2 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{|\overset{\mathbf{r}}{a}|^2}{|\overset{\mathbf{i}}{b}|^2} = \frac{4}{9}, \quad k = \pm \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ответ: $k = \pm \frac{2}{3}$.

Задача 15.

Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = \{7; 0; -5\}$ на ось, образующую с координатными осями Ox и Oy углы 60° и 45° , а с осью Oz – тупой угол γ .

Указание

Используйте свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Решение

Найдем $\cos \gamma$: $\cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 \gamma = 1$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1, \cos^2 \gamma = \frac{1}{4},$$

$$\cos \gamma < 0 \Rightarrow \cos \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Тогда проекция $\mathbf{a}$ на заданную ось равна:

$$x_a \cos \alpha + y_a \cos \beta + z_a \cos \gamma = 7 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6.$$

Ответ: 6.

2.1.2. Векторное и смешанное произведения

Векторное произведение

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ такой, что:

1. $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
2. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{a}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{b}$.
3. Вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ направлен так, что из конца этого вектора кратчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ происходит против часовой стрелки.

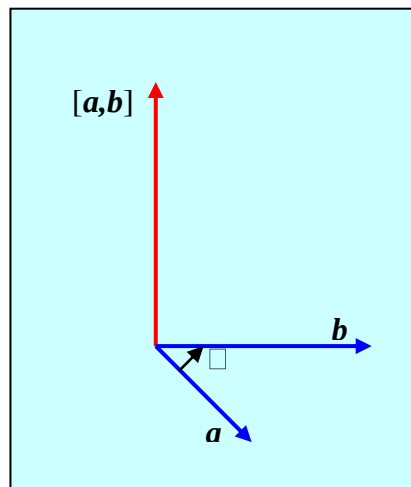


Рис. 1

Из п.1 определения векторного произведения вытекает, что

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}.$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1. $|\mathbf{[a,b]}| = S_{ab}$, где S_{ab} – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Доказательство.

Если φ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то (см. рис. 2)

$$S_{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi = |\mathbf{[a,b]}|.$$

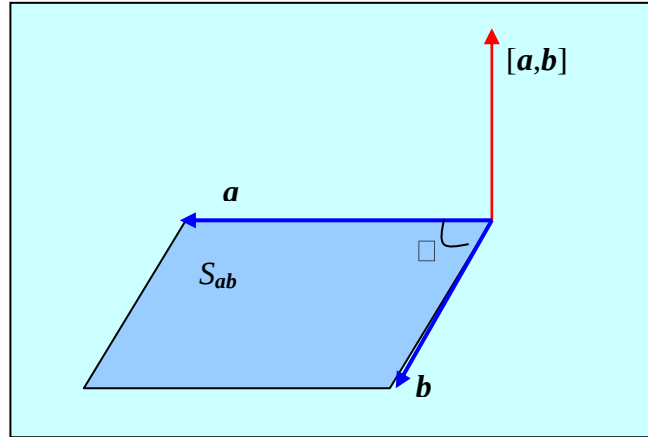


Рис.2

2. $|\mathbf{[a,b]}| = -|\mathbf{[b,a]}|.$

3. $|\mathbf{[\varphi a,b]}| = \varphi |\mathbf{[a,b]}|.$

Числовой множитель можно выносить и из второго множителя.

Действительно,

$$|\mathbf{[a,\varphi b]}| = -|\mathbf{[\varphi b,a]}| = -\varphi |\mathbf{[b,a]}| = \varphi |\mathbf{[a,b]}|.$$

4. $\mathbf{[a+b, c]} = \mathbf{[a,c]} + \mathbf{[b,c]}.$

Доказательство этого свойства будет дано в следующем пункте.

Пример 1. Вычислим произведение $\mathbf{[a+b, a-b]}$. Пользуясь тем, что $\mathbf{[a, a]} = \mathbf{[b,b]} = 0$ (как произведение коллинеарных векторов), будем иметь:

$$\mathbf{[a+b, a-b]} = \mathbf{[b,a]} - \mathbf{[a,b]} = 2\mathbf{[b,a]}.$$

Отсюда

$$S_{ab} = \frac{1}{2} |\mathbf{[a+b, a-b]}| = \frac{1}{2} |\mathbf{a+b}| |\mathbf{a-b}| \sin \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\mathbf{a+b}$ и $\mathbf{a-b}$.

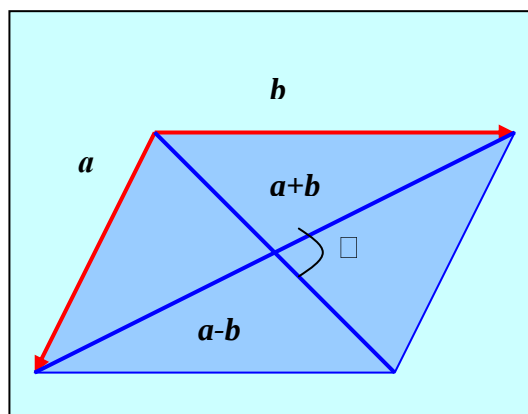


Рис. 3

Тем самым доказано, что площадь параллелограмма равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними.

Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется величина

$$abc = \mathbf{a} [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

(скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$).

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, параллельная им.

Из определения векторного произведения вытекает, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны в том и только в том случае, если $\mathbf{a} \perp [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Тем самым

$$abc = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ компланарны.}$$

Тройка некопланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется *правой*, если угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ – острый. В противном случае тройка называется *левой*. Множество всех систем декартовых прямоугольных координат распадается на два класса. Один класс – правые системы координат, в которых тройка базисных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – правая, другой класс – левые системы координат, в которых тройка базисных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – левая.

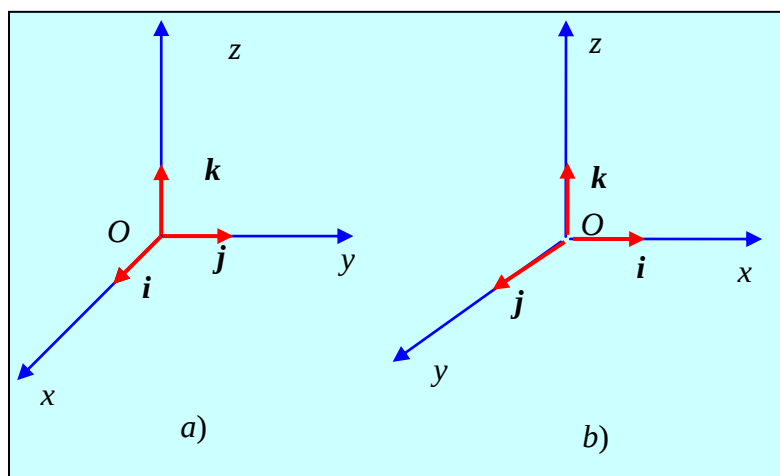


Рис. 4

На рис. 4 а) – правая система координат, а б) – левая система координат.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1. Для некопланарных векторов

$$\mathbf{abc} = \begin{cases} V_{abc}, & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} - \text{правая тройка}, \\ -V_{abc}, & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} - \text{левая тройка}, \end{cases}$$

где V_{abc} – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

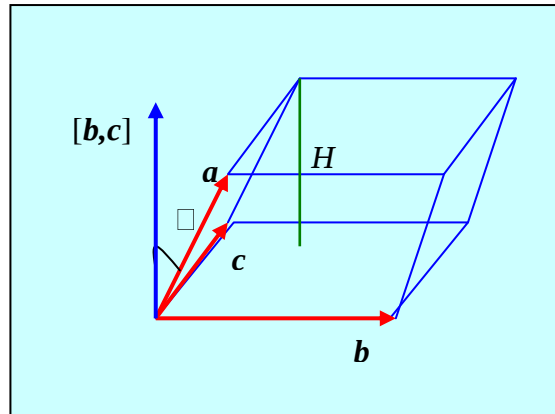


Рис. 5

Доказательство.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, равен произведению площади основания $|\mathbf{[b, c]}|$ на высоту $H = |\mathbf{a}| \cos \theta$, где θ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ (см. рис. 8.5). Поэтому

$$V = |\mathbf{[b, c]}| |\mathbf{a}| \cos \theta = |\mathbf{abc}|.$$

Знак смешанного произведения совпадает со знаком $\cos \theta$, который положителен, если тройка правая, и отрицателен в противном случае.

2. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

Доказательство.

Из предыдущего свойства вытекает, что при перестановке сомножителей в смешанном произведении может измениться лишь знак произведения.

Остается заметить, что тройки, получаемые по схеме из рис. 8.6 (начиная с любого вектора), имеют одинаковую ориентацию. При движении по этой схеме в противоположном направлении ориентация меняется.

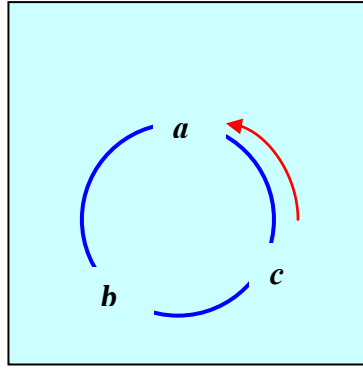


Рис. 6

$$3. (\square_1 \mathbf{a}_1 + \square_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{b} \mathbf{c} = \square_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{b} \mathbf{c} + \square_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{b} \mathbf{c}.$$

Доказательство.

Пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{b} \mathbf{c} &= (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \\ &= \lambda_1 \mathbf{a}_1 [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \lambda_2 \mathbf{a}_2 [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{b} \mathbf{c} + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{b} \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Аналогичное свойство имеет место для остальных множителей:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\square_1 \mathbf{b}_1 + \square_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{c} &= \square_1 \mathbf{a} \mathbf{b}_1 \mathbf{c} + \square_2 \mathbf{a} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \mathbf{b}(\square_1 \mathbf{c}_1 + \square_2 \mathbf{c}_2) &= \square_1 \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}_1 + \square_2 \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

Доказательство.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{c} &= -(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{a} \mathbf{c} = \\ &= -\lambda_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{a} \mathbf{c} - \lambda_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{a} \mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{b}_1 \mathbf{c} + \lambda_2 \mathbf{a} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Докажем теперь свойство 4 векторного произведения, т.е. равенство $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Доказательство.

Из свойства 3 смешанного произведения вытекает, что для любого вектора $\mathbf{e}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \mathbf{e}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{c} + \mathbf{e} \mathbf{b} \mathbf{c} = \\ &= \mathbf{e}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \mathbf{e}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{e}([\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \end{aligned}$$

Выбирая в качестве $\mathbf{e}$ векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, получаем, что координаты векторов $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ совпадают. Из этого следует, что эти векторы равны.

Векторное и смешанное произведения векторов, заданных координатами

Пусть $\mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}$, а $\mathbf{b} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}$. Тогда

$$\begin{aligned}
[\mathbf{ab}] &= [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] = \\
&= x_1x_2[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + x_1z_2[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + y_1x_2[\mathbf{j}, \mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j}, \mathbf{j}] + \\
&+ y_1z_2[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + z_1x_2[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k}, \mathbf{j}] + z_1z_2[\mathbf{k}, \mathbf{k}].
\end{aligned}$$

Будем считать, что система координат правая. Тогда

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}, [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}, [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}.$$

Учитывая, что при перемене множителей векторное произведение меняет знак, получаем

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i} = \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Формулу (1) удобно записать в виде символического определителя

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(для получения формулы надо раскрыть определитель по первой строке).

Пример 2.

Найдем площадь треугольника с вершинами в точках $A = \{2, 2, -3\}$, $B = \{1, 3, -3\}$ и $C = \{1, 2, -1\}$. Площадь этого треугольника S равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} S_{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}|.$$

Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2).$$

Поэтому

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \frac{3}{2}.$$

Упражнение 1.

При каких значениях α и β вектор $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \mathbf{k}$ будет коллинеарен вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, а $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$?

Решение.

Найдем координаты вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 5, 5).$$

Поскольку координаты коллинеарных векторов пропорциональны, числа α и β должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\alpha}{0} = \frac{\beta}{5} = \frac{1}{5},$$

откуда $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Пусть теперь $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, а $\mathbf{c} = \mathbf{a} = (x_3, y_3, z_3)$. Тогда

$$\mathbf{abc} = \mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Тем самым смешанное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Выясним, какую тройку: правую или левую – образуют векторы $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)$ и $\mathbf{c} = (-3, -2, 0)$. Для этого найдем смешанное произведение

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Из того, что $\mathbf{abc} < 0$, вытекает, что тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – левая.

Упражнение 2.

При каком α векторы $\mathbf{a} = (-1, 1, \alpha)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$ и $\mathbf{c} = (3, 1, 1)$ являются компланарными?

Решение.

Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю, поэтому

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha - 3 = 0,$$

откуда $\alpha = -3$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «Векторное и смешанное произведения»

Задача 1.

Найти модуль вектора $[\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, 2\mathbf{a} + \mathbf{b}]$, если $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 7$, а угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен 30° .

Указание

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, поэтому
 $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$.

Операция векторного умножения некоммукативна,
 $[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Решение

Используя свойства векторного произведения, получим:

$$[\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, 2\mathbf{a} + \mathbf{b}] = 2[\mathbf{a}, \mathbf{a}] - 6[\mathbf{b}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] - 3[\mathbf{b}, \mathbf{b}] = 2 \cdot 0 + 6[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}] - 3 \cdot 0 = 7[\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Следовательно, $||[\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, 2\mathbf{a} + \mathbf{b}]|| = 7||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|| = 7|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi = 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 0,5 = 147$.

Ответ: $||[\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, 2\mathbf{a} + \mathbf{b}]|| = 147$.

Задача 2.

Известно, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 10$ и $||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|| = 12$. Найти скалярное произведение $\mathbf{ab}$.

Указание

Поскольку $||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$, можно найти $\sin\alpha$, а затем с помощью основного тригонометрического тождества вычислить $\cos\alpha$.

Решение

Поскольку $||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, получаем:

$$12 = 2 \cdot 10 \cdot \sin\alpha, \text{ откуда } \sin\alpha = 0,6. \text{ Тогда } \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 0,64.$$

Если угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ острый, то $\cos\alpha = 0,8$, и $\mathbf{ab} = 2 \cdot 10 \cdot 0,8 = 16$; если же этот угол тупой, то $\cos\alpha = -0,8$, и $\mathbf{ab} = -16$.

Ответ: $\mathbf{ab} = \pm 16$.

Задача 3.

Найти координаты векторного произведения векторов $\mathbf{a} = \{3; 2; 1\}$ и $\mathbf{b} = \{-1; 1; -2\}$.

Указание

Воспользуйтесь формулами для координатной записи векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{-5; 5; 5\}.$$

Ответ: $[a, b] = \{-5; 5; 5\}$.

Задача 4.

Даны точки $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найти площадь треугольника ABC .

Указание

Рассмотрите векторы

$$\vec{AB} = (4; -5; 0) \quad \text{и} \quad \vec{AC} = (0; 4; -3).$$

Модуль векторного произведения $[AB, AC]$ равен площади параллелограмма $ABMC$, построенного на них как на смежных сторонах, а площадь треугольника ABC равна половине площади $ABMC$.

Решение

Рассмотрим векторы

$$\vec{AB} = (4; -5; 0) \quad \text{и} \quad \vec{AC} = (0; 4; -3).$$

Модуль векторного произведения $[AB, AC]$ равен площади параллелограмма $ABMC$, построенного на них как на смежных сторонах, а площадь треугольника ABC равна половине площади $ABMC$.

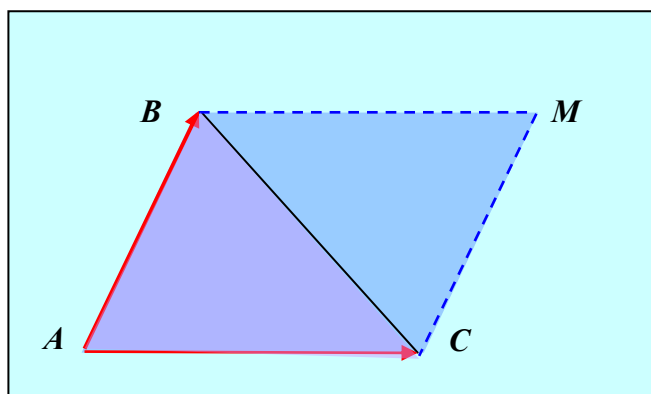


Рис. 7

$$\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \vec{AB}, \vec{AC} \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right\} = \{15; 12; 16\}.$$

$$\left| \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \vec{AB}, \vec{AC} \end{smallmatrix} \right] \right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

Задача 5.

Даны векторы $\mathbf{a} = \{4; -1; 2\}$ и $\mathbf{b} = \{1; 1; -3\}$. Найти координаты векторного произведения $[\mathbf{a} - 4\mathbf{b}, \mathbf{b}]$.

Указание

Воспользуйтесь тем, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a} - 4\mathbf{b}, \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{b}, \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} - 4 \cdot 0.$$

Решение

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a} - 4\mathbf{b}, \mathbf{b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{b}, \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} - 4 \cdot 0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{1; 14; 5\}. \end{aligned}$$

Ответ: $\{1; 14; 5\}$.

Задача 6.

Даны векторы $\mathbf{a} = \{2; -1; 1\}$, $\mathbf{b} = \{3; 3; 4\}$ и $\mathbf{c} = \{2; 0; 2\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{d}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а скалярное произведение $\mathbf{d}\mathbf{c} = -8$.

Указание

Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярно обоим сомножителям, то есть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Решение

Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярно обоим сомножителям, то есть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Следовательно, вектор $\mathbf{d} \parallel [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, поэтому координаты вектора $\mathbf{d}$ пропорциональны координатам $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{d}, \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{-7; -5; 9\}.$$

Пусть $\mathbf{d} = \{-7k; -5k; 9k\}$, тогда $\mathbf{d}\mathbf{c} = -7k \cdot 2 + 9k \cdot 2 = 4k = -8$.

Следовательно, $k = -2$, и $\mathbf{d} = \{14; 10; -18\}$.

Ответ: $\mathbf{d} = \{14; 10; -18\}$.

Задача 7.

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; 2; 2)$, $B(3; 1; 5)$, $C(0; 4; 3)$, $D(5; 0; 7)$.

Указание

Модуль смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах.

Решение

Модуль смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах. У треугольной пирамиды $ABCD$ высота равна высот параллелепипеда, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда. Поэтому

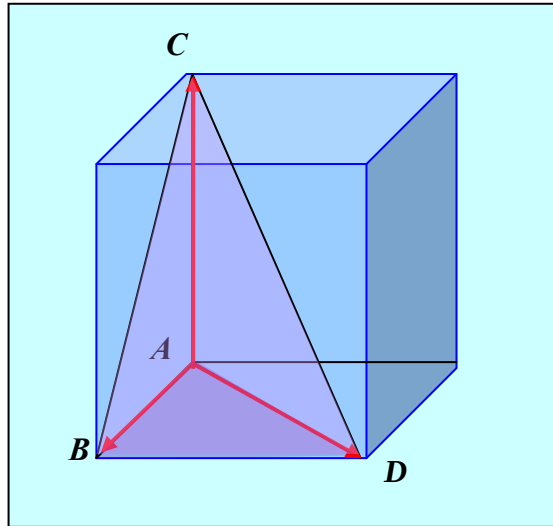


Рис. 8

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABPC} h = \frac{1}{6} V_{nap} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|.$$
$$\overrightarrow{AB} = \{1; -1; 3\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-2; 2; 1\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{3; -2; 5\}.$$
$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad V_{ABCD} = \frac{1}{6} |-7| = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $\frac{7}{6}$.

2.2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

2.2.1. Уравнение прямой на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

задает множество точек L на плоскости, если для любой точки $M \in L$ ее координаты удовлетворяют равенству (1), и наоборот, если для всех пар (x, y) ,

удовлетворяющих (1), точка $M = \{x, y\}$ принадлежит множеству L . При этом говорят, что уравнение (1) является уравнением множества L .

Пусть на плоскости дана точка $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Найдем уравнение прямой L , проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (A, B)$. Пусть $M = \{x, y\}$ – произвольная точка на прямой L . Тогда

$$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n} \overrightarrow{MM_0} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

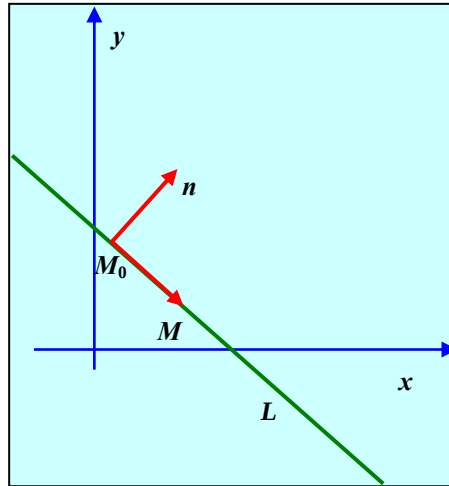


Рис. 1

Тем самым уравнение прямой L задается в виде

$$Ax + By + C = 0, \quad (2)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Нормальным вектором прямой называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой.

Пример 1. Найдем уравнение прямой с нормальным вектором $\mathbf{n} = (-3, 2)$, проходящей через точку $M_0 = \{2, 1\}$. Имеем

$$-3(x - 2) + 2(y - 1) = 0$$

или

$$-3x + 2y + 4 = 0.$$

Теорема 9.1. Всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0, \quad (3)$$

и любое уравнение (3) задает на плоскости некоторую прямую. При этом вектор $\mathbf{n} = (A, B)$ является нормальным вектором этой прямой.

Доказательство.

Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Пусть $\mathbf{n} = (A, B)$ – некоторый нормальный вектор этой прямой. Тогда, как было показано выше, уравнение этой прямой запишется в виде (3).

Покажем, что всякое уравнение (3) определяет некоторую прямую на плоскости. Найдем точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Если $A \neq 0$, то, например, можно положить

$$x_0 = -\frac{C}{A}, \quad y_0 = 0.$$

А если $B \neq 0$, то

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{C}{B}.$$

Теперь построим прямую с нормальным вектором $\mathbf{n} = (A, B)$, проходящую через точку M_0 . Ее уравнение будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению (3).

Уравнение (3) называется *общим уравнением прямой* на плоскости.

9.2. Неполные уравнения прямой

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) равен нулю, то такое уравнение называется *неполным*.

1. Предположим, что $C = 0$, т.е. уравнение прямой задается в виде

$$Ax + By = 0.$$

Такая прямая (см. рис. 2) проходит через начало координат, так как координаты точки $O = \{0, 0\}$ удовлетворяют уравнению этой прямой.

2. Пусть $A = 0$ (при этом $B \neq 0$). Тогда прямая (см. рис. 3) параллельна оси Ox , так как ее нормальный вектор $\mathbf{n} = (0, B)$ коллинеарен вектору $\mathbf{i}$. Ее уравнение может быть записано в виде

$$y = -\frac{C}{B}.$$

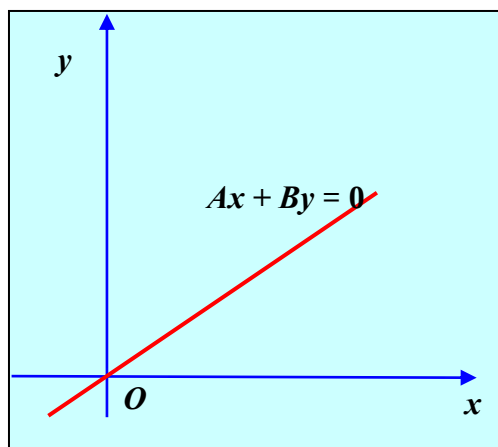


Рис. 2

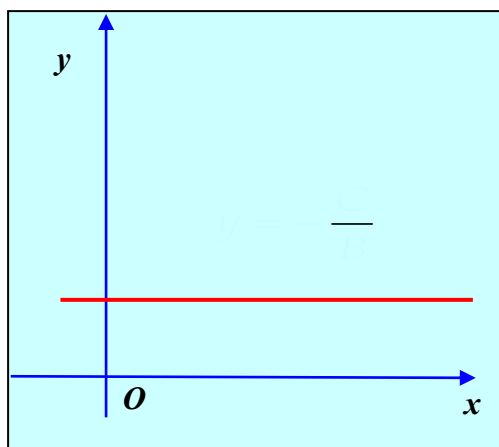


Рис. 3

3. Пусть $B = 0$ (при этом $A \neq 0$). Тогда прямая (см. рис. 4) параллельна оси Oy , так как ее нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, 0)$ коллинеарен вектору $\mathbf{j}$. Ее уравнение может быть записано в виде

$$x = -\frac{C}{A}.$$

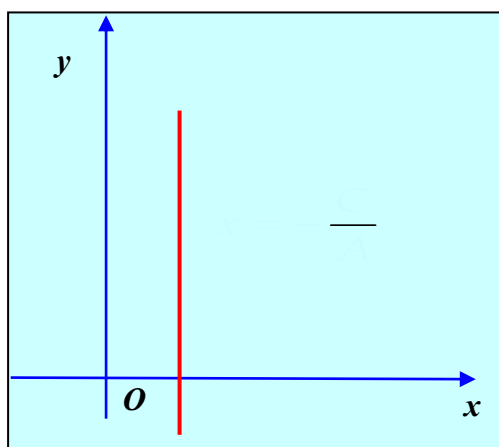


Рис. 4

Уравнение прямой в отрезках

Предположим, что все коэффициенты в уравнении прямой (3) отличны от нуля. Тогда, перенеся C в правую часть равенства и разделив обе части равенства на $-C$, получим уравнение

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad (4)$$

где $p = -C/A$, а $q = -C/B$. Уравнение (9.4) называется уравнением прямой в отрезках. Числа p и q имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях. Поэтому уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения графика прямой.

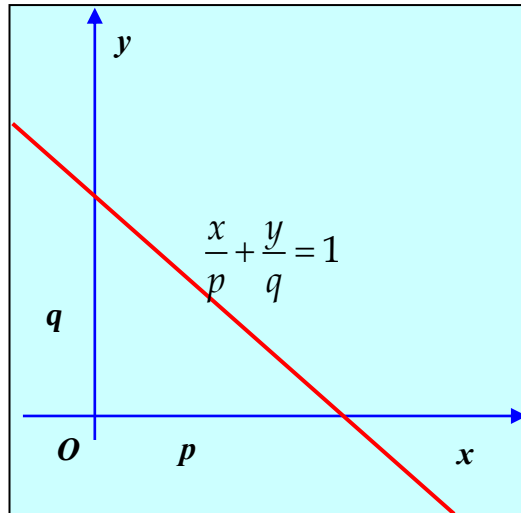


Рис. 5

Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть заданы уравнения двух прямых

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Векторы $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2)$ являются нормальными векторами для прямых L_1 и L_2 соответственно.

1. Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, что эквивалентно пропорциональности координат этих векторов. Таким образом,

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

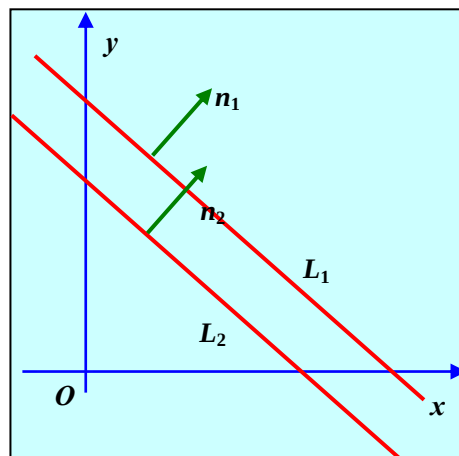


Рис. 6

2. Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, что эквивалентно равенству нулю скалярного произведения этих векторов. Таким образом,

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

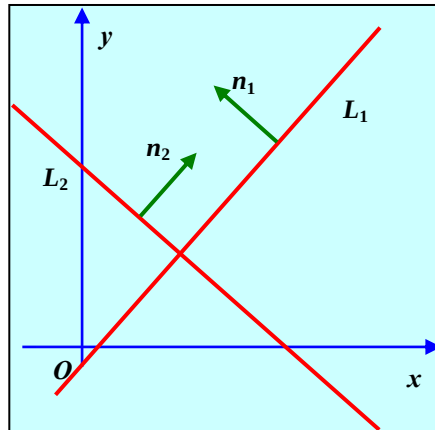


Рис. 7

3. Нахождение угла φ между прямыми L_1 и L_2 сводится к нахождению угла между нормальными векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Имеем

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}.$$

Тем самым

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

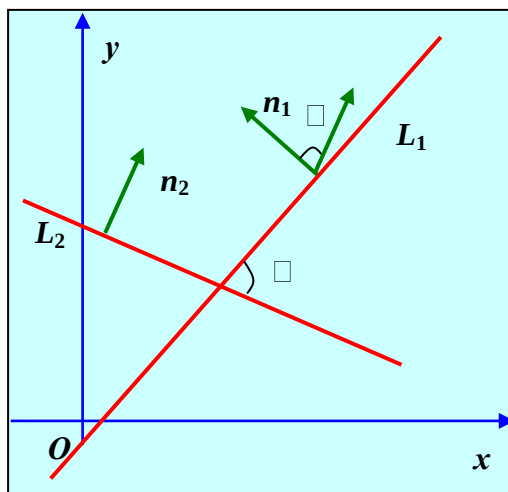


Рис. 8

Пример 2. Найдем угол между прямыми

$$L_1: 3x + \sqrt{3}y + 1 = 0,$$

$$L_2: x + \sqrt{3}y - 4 = 0.$$

Имеем

$$\mathbf{n}_1 = (3, \sqrt{3}), \quad \mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}).$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{3+3}{\sqrt{12}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, угол между прямыми равен 30° .

Упражнение 1. При каких значениях параметра a прямые

$$L_1: (a+1)x + 2y - 3 = 0,$$

$$L_2: x - 2ay + 4 = 0,$$

a) параллельны, *b)* перпендикулярны?

Решение.

Нормальные векторы прямых $\mathbf{n}_1 = (a+1, 2)$, $\mathbf{n}_2 = (1, -2a)$.

a) условие параллельности:

$$\frac{a+1}{1} = \frac{2}{-2a}, \quad -a^2 - a = 1, \quad a^2 + a + 1 = 0 -$$

решений нет, следовательно, прямые не могут быть параллельными ни при каком значении a .

b) условие перпендикулярности:

$$(a+1) \cdot 1 + 2(-2a) = 0, \quad 1 - 3a = 0, \quad a = \frac{1}{3}.$$

Ответ: параллельность невозможна; прямые перпендикулярны при $a = \frac{1}{3}$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором прямой. Найдем уравнение прямой с направляющим вектором $\mathbf{a} = (l, m)$, проходящей через точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Пусть $M = \{x, y\}$ – произвольная точка на искомой прямой L . Тогда

$$M \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \parallel \mathbf{a}.$$

Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{MM_0}$ и $\mathbf{a}$ записывается как пропорциональность их координат:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (5)$$

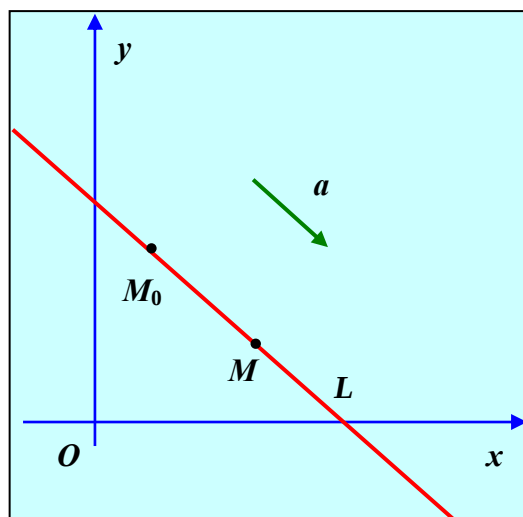


Рис. 9

Уравнение прямой, записанное в виде (5), называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0 = \{x_0, y_0\}$ и $M_1 = \{x_1, y_1\}$. Для этого достаточно взять в качестве направляющего вектора вектор

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Тогда искомое уравнение будет иметь вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (6)$$

Пример 3. Даны координаты вершин треугольника $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ и $C = \{5, 3\}$. Найти уравнение прямой, на которой лежит медиана этого треугольника, проведенная из вершины B на сторону AC .

Найдем сначала координаты точки M , являющейся серединой стороны AC . Имеем

$$M = \left\{ \frac{1+5}{2}, \frac{3+3}{2} \right\} = \{3, 3\}.$$

Далее строим прямую, проходящую через точки B и M , используя уравнение (9.6):

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{3-4}.$$

Тем самым искомая прямая задается уравнением

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-1} \quad \text{или} \quad x + 2y - 9 = 0.$$

Упражнение 2. Даны координаты вершин треугольника $A = \{1,1\}$, $B = \{1,2\}$ и $C = \{5,1\}$. Найти уравнение прямой, на которой лежит высота этого треугольника, проведенная из вершины B на сторону AC .

Решение.

Направляющим вектором прямой AC можно считать вектор

$$\vec{AC} = (5-1, 1-1) = (4, 0).$$

Тогда направляющим вектором высоты будет ортогональный ему вектор, например, $\mathbf{a} = (0, 1)$. Следовательно, уравнение высоты как прямой, проходящей через точку B с направляющим вектором $\mathbf{a}$ можно задать в виде (9.5):

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} \quad \text{или} \quad x-1=0.$$

Ответ: $x-1=0$.

Нормальное уравнение прямой

Пусть задана произвольная прямая L . Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную L . Точку пересечения ее с прямой L обозначим через P . Через $\mathbf{n}$ обозначим единичный вектор, совпадающий с направлением вектора $\vec{OP}$. В случае, если точка P совпадает с O , возьмем в качестве $\mathbf{n}$ любой вектор единичной длины.

Так как $\mathbf{n}$ – единичный вектор, его координаты имеют вид

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

где φ – угол между вектором $\mathbf{n}$ и осью Ox . Положим $p = |\vec{OM}|$.

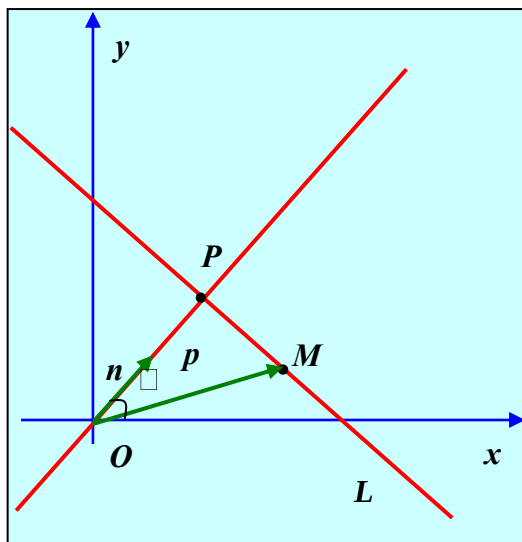


Рис. 10

Имеем

$$\begin{aligned} M = \{x, y\} \in L &\Leftrightarrow n \cdot \vec{OM} = p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{OM} \cdot \mathbf{n} = p \Leftrightarrow x \cos \varphi + y \sin \varphi = p. \end{aligned}$$

Уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

называется *нормальным уравнением* прямой.

Для того чтобы перейти от общего уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0$$

к нормальному, надо умножить его на такое число t , для которого

$$At = \cos \varphi, \quad Bt = \sin \varphi, \quad Ct = -p.$$

Отсюда

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

а знак t противоположен знаку C .

Пример 4. Приведем уравнение прямой

$$3x - 4y + 2 = 0$$

к нормальному виду. Для этого надо разделить обе части на

$$-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5.$$

Получаем

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0.$$

Отклонение и расстояние от точки до прямой

Обозначим через d расстояние от точки M до прямой L . *Отклонением* точки M от прямой L называется число d , если M и начало координат O лежат по разные стороны от прямой L , и число $-d$, если M и O лежат по одну сторону от L . Если O принадлежит L и $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ – нормальный вектор прямой L , то отклонение положим равным d , когда M лежит по ту же сторону от L , куда направлен вектор $\mathbf{n}$, и $-d$ – в противном случае.

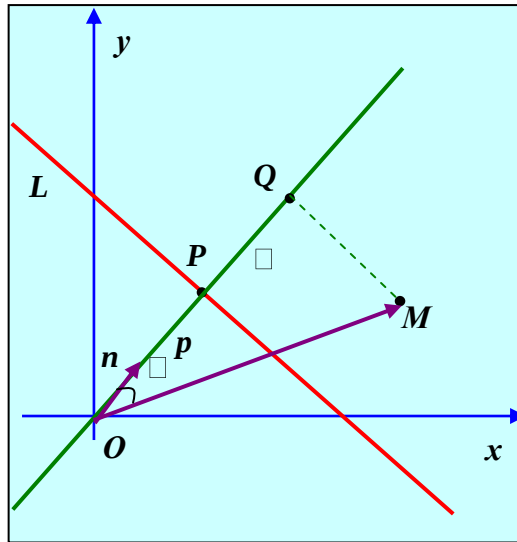


Рис. 11

Пусть Q – проекция точки $M = \{x, y\}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{n}$. Тогда отклонение точки M от прямой L равно

$$\delta = n p_n \overline{PQ}.$$

Поэтому

$$n p_n \overline{OM} = \overline{OM} \cdot \mathbf{n} = x \cos \varphi + y \sin \varphi = p + \delta.$$

Отсюда

$$\delta = x \cos \varphi + y \sin \varphi - p.$$

В силу того, что $d = |\delta|$, имеем

$$d = |x \cos \varphi + y \sin \varphi - p|.$$

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника $A = \{0,1\}$, $B = \{2,1\}$ и $C = \{3,-1\}$. Найти длину высоты h , проведенной из вершины B на сторону AC .

Длина высоты равна расстоянию от точки B до прямой, проходящей через точки A и C . Найдем уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{-1-1} \quad \text{или} \quad 2x + 3y - 3 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{3}{\sqrt{13}} = 0.$$

Следовательно,

$$h = \left| \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 1 - \frac{3}{\sqrt{13}} \right| = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Упражнение 3. Найти расстояние от точек $M_1 = \{-1,3\}$ и $M_2 = \{2,1\}$ до прямой $3x - 4y + 1 = 0$

и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от прямой или по разные стороны.

Решение.

Приведем уравнение прямой к нормальному виду:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0$$

и найдем отклонения данных точек от прямой:

$$\delta_1 = -\frac{3}{5}(-1) + \frac{4}{5} \cdot 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5};$$

$$\delta_2 = -\frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot 1 - \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$d_1 = |\delta_1| = \frac{14}{5}, \quad d_2 = |\delta_2| = \frac{3}{5},$$

а поскольку отклонения точек от прямой имеют разные знаки, точки расположены по разные стороны от прямой.

Ответ: $d_1 = \frac{4}{5}$, $d_2 = \frac{3}{5}$, точки расположены по разные стороны от прямой.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«Уравнение прямой на плоскости»

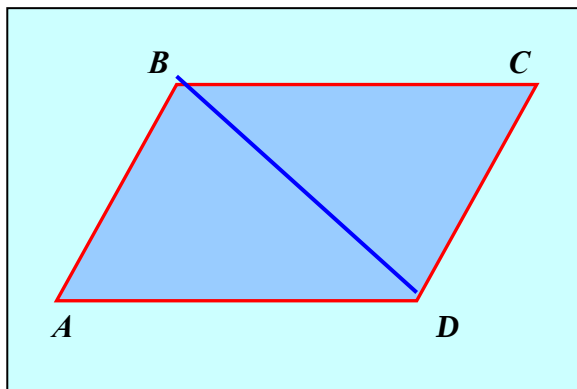
Задача 1.

Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $2x + y + 3 = 0$ и $2x - 5y + 9 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $2x - y - 3 = 0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.

Указание

Выясните, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных, и как расположена данная диагональ по отношению к данным сторонам.

Решение



Выясним, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} \neq \frac{A_1}{A_2},$$

следовательно, прямые пересекаются, то есть даны уравнения смежных сторон параллелограмма.

Условие параллельности прямых
 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть даны уравнения сторон AB и AD . Тогда координаты точки A будут решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ 2x - 5y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6y - 6 = 0 \Rightarrow y = 1, \quad x = -2 \Rightarrow A(1; -2).$$

Теперь определим, уравнение какой диагонали: AC или BD – нам известно. Если это диагональ AC , то на ней лежит точка A , следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению диагонали. Проверим:

$$2 \cdot 1 - (-2) - 3 = 1 \neq 0.$$

Значит, точка A не лежит на данной прямой, то есть дано уравнение диагонали BD .

Тогда вершина B лежит на прямых AB и BD , значит, ее координаты найдем из системы:

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \quad y = -3 \Rightarrow B(0; -3).$$

Система уравнений для определения координат точки D составлена из уравнений прямых AD и BD :

$$\begin{cases} 2x - 5y + 9 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow -4y + 12 = 0, \quad y = 3, \quad x = 3 \Rightarrow D(3; 3).$$

Остается найти координаты точки C . Составим уравнения прямых BC и DC . Поскольку BC параллельна AD , их угловые коэффициенты равны. Найдем угловой коэффициент прямой AD :

$$5y = 2x + 9, \quad y = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5} \Rightarrow k_{AD} = \frac{2}{5} = k_{BC}.$$

Тогда BC можно задать уравнением

$$y - y_B = k_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y + 3 = \frac{2}{5}x, \quad 2x - 5y - 15 = 0.$$

Аналогично AB : $y = -2x - 3$, $k_{AB} = -2 = k_{DC}$; DC : $y - 3 = -2(x - 3)$, $2x + y - 9 = 0$. Найдем координаты точки C , решив систему из двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 5y - 15 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow -6y - 6 = 0, y = -1, x = 5 \Rightarrow C(5; -1).$$

Ответ: $A(1; -2)$, $B(0; -3)$, $C(5; -1)$, $D(3; 3)$.

Задача 2.

Найти точку, симметричную точке $A(2; 1)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(-1; 7)$ и $C(1; 8)$.

Указание

Представьте себе, что вам нужно *построить* искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

- 1) провести прямую BC ;
- 2) провести через точку A прямую, перпендикулярную BC ;
- 3) найти точку O пересечения этих прямых и отложить на прямой AO по другую сторону прямой BC отрезок $OA_1 = AO$.

Решение

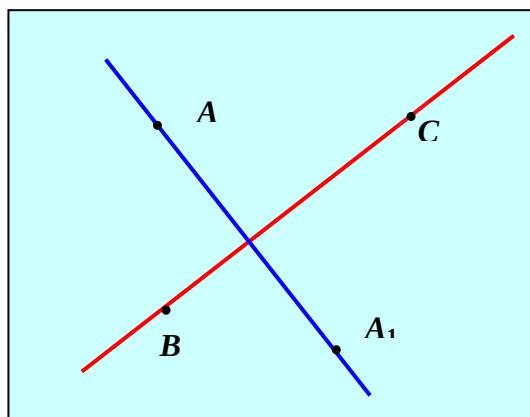


Рис. 13

Представим себе, что нам нужно *построить* искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

- 4) провести прямую BC ;
- 5) провести через точку A прямую, перпендикулярную BC ;
- 6) найти точку O пересечения этих прямых и отложить на прямой AO по другую сторону прямой BC отрезок $OA_1 = AO$.

Тогда точка A_1 будет симметричной точке A относительно прямой BC .

Теперь заменим каждое из действий составлением уравнений и вычислением координат точек.

- 1) Найдем уравнение прямой BC в виде:

$$\begin{aligned}\frac{x - x_B}{x_C - x_B} &= \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x + 1}{1 + 1} = \frac{y - 7}{8 - 7} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 7}{1} \Rightarrow x - 2y + 15 = 0.\end{aligned}$$

2) Найдем угловой коэффициент прямой BC :

$$2y = x + 15, y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \Rightarrow k_{BC} = \frac{1}{2}.$$

Прямая AO перпендикулярна прямой BC , поэтому

$$k_{AO} = -\frac{1}{k_{BC}} = -2.$$

Составим уравнение прямой AO :

$$\begin{aligned}y - y_A &= k_{AO}(x - x_A) \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 1 &= -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0.\end{aligned}$$

3) Найдем координаты точки O как решение системы:

$$\begin{cases} x - 2y + 15 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 0,$$

$$x = -1, y = 7 \Rightarrow O(-1; 7).$$

4) Точка O – середина отрезка AA_1 , поэтому

$$\begin{aligned}x_O &= \frac{x_A + x_{A_1}}{2}, y_O = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{A_1} &= 2x_O - x_A = -2 - 2 = -4; \\ y_{A_1} &= 2y_O - y_A = 14 - 1 = 13 \Rightarrow O(-4; 13).\end{aligned}$$

Ответ: $(-4; 13)$.

Задача 3.

Найти угол между прямыми l_1 : $3x - y + 5 = 0$ и l_2 : $2x + y - 7 = 0$.

Указание

Если $\square$ – угол между прямыми l_1 и l_2 , то $\square = \square_2 - \square_1$, где $\square_2$ и $\square_1$ – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с положительной полуосью Ox . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 .

Решение

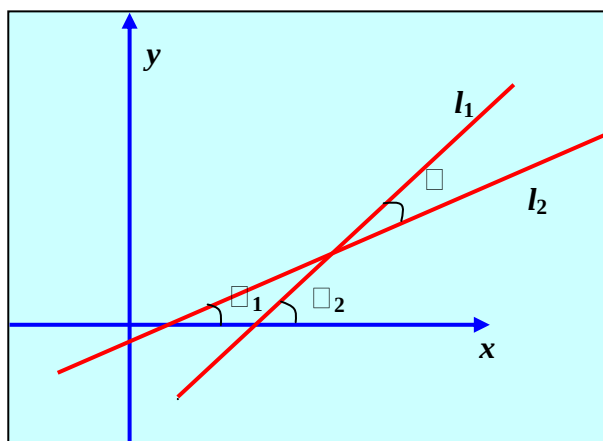


Рис. 14

Если φ – угол между прямыми l_1 и l_2 , то $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, где α_2 и α_1 – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с положительной полуосью Ox . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 . Найдем k_1 и k_2 : для l_1 $y = 3x + 5$, $k_1 = 3$; для второй: $y = -2x + 7$, $k_2 = -2$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2 - 3}{1 - 2 \cdot 3} = 1, \varphi = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

Для прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ справедлива формула:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Задача 4.

Определить, лежит ли точка $M(2; 3)$ внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$.

Указание

Если точка M расположена внутри треугольника ABC , то ее отклонение δ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне, а если точка M лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника.

Решение

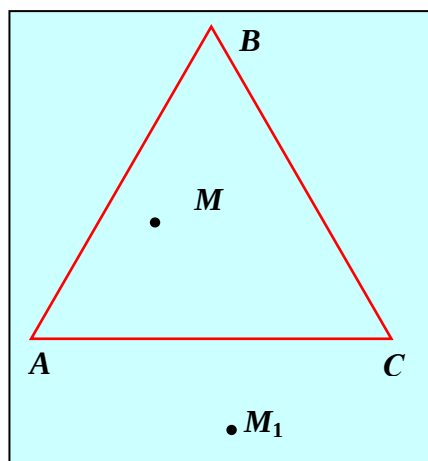


Рис. 15

Пусть первое уравнение задает сторону AB , второе – BC , третье – AC . Найдём координаты точек A , B и C :

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ x + 5y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7 \\ x + 20x - 35 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow A(2; 1).$$

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 7 \\ x + 12x - 21 - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 4, y = 9 \Rightarrow B(4; 9).$$

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y + 24 = 0, \\ y = -12, x = 67 \Rightarrow C(67; -12).$$

Для ответа на вопрос задачи отметим, что:

- 1) если точка M расположена внутри треугольника ABC , то ее отклонение δ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне (т.е. точка M расположена относительно каждой стороны треугольника в одной полуплоскости с третьей вершиной);
- 2) если точка M лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника (на рисунке: точки M_1 и B расположены по разные стороны от прямой AC).

Составим нормальные уравнения сторон треугольника ABC :

$$\begin{aligned}
AB: \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{17}, \quad c < 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu &= \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad AB: \frac{4}{\sqrt{17}}x - \frac{1}{\sqrt{17}}y - \frac{7}{\sqrt{17}} = 0; \\
BC: \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{10}, \quad c < 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu &= \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad BC: \frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{31}{\sqrt{10}} = 0; \\
AC: \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{26}, \quad c < 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu &= \frac{1}{\sqrt{26}}, \quad AC: \frac{1}{\sqrt{26}}x + \frac{5}{\sqrt{26}}y - \frac{7}{\sqrt{26}} = 0.
\end{aligned}$$

Вычислим соответствующие отклонения:

1) для точек M и A относительно прямой BC :

$$\delta_M = \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{9}{\sqrt{10}} - \frac{31}{\sqrt{10}} = -\frac{20}{\sqrt{10}} < 0;$$

$$\delta_A = \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{31}{\sqrt{10}} = -\frac{26}{\sqrt{10}} < 0.$$

2) для точек M и B относительно прямой AC :

$$\delta_M = \frac{2}{\sqrt{26}} + \frac{15}{\sqrt{26}} - \frac{7}{\sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{26}} > 0;$$

$$\delta_B = \frac{4}{\sqrt{26}} + \frac{45}{\sqrt{26}} - \frac{7}{\sqrt{26}} = \frac{42}{\sqrt{26}} > 0.$$

3) для точек M и C относительно прямой AB :

$$\delta_M = \frac{8}{\sqrt{17}} - \frac{3}{\sqrt{17}} - \frac{7}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{\sqrt{17}} < 0;$$

$$\delta_C = \frac{168}{\sqrt{17}} + \frac{12}{\sqrt{17}} - \frac{7}{\sqrt{17}} = \frac{173}{\sqrt{17}} > 0.$$

Итак, точки M и C лежат по разные стороны от прямой AB . Следовательно, точка M расположена вне треугольника ABC .

Ответ: Точка M расположена вне треугольника ABC .

Задача 5.

Для треугольника ABC с вершинами $A(-3; -1)$, $B(1; 5)$, $C(7; 3)$ составить уравнения медианы и высоты, выходящих из вершины B .

Указание

Составьте уравнение медианы как прямой, проходящей через точки B и M – середину стороны AC , а высоты – как прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной стороне AC .

Решение

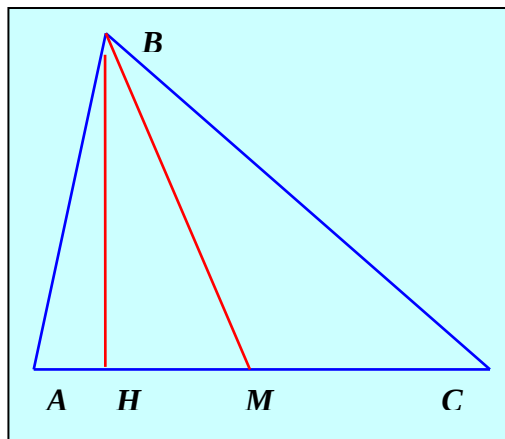


Рис. 16

1) Медиана BM проходит через точку B и точку M – середину отрезка AC . Найдём координаты точки M :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1.$$

Тогда уравнение медианы можно записать в виде:

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B} \Rightarrow \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 5}{1 - 5} \Rightarrow 4x + y - 9 = 0.$$

2) Высота BH перпендикулярна стороне AC . Составим уравнение AC :

$$\frac{x + 3}{7 + 3} = \frac{y + 1}{3 + 1} \Rightarrow 2x - 5y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5},$$

$$k_{AC} = \frac{2}{5}, \quad k_{BH} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{5}{2}.$$

$$BH: y - 5 = -\frac{5}{2}(x - 1) \Rightarrow 5x + 2y - 15 = 0.$$

Ответ: медиана BM : $4x + y - 9 = 0$; высота BH : $5x + 2y - 15 = 0$.

Задача 6.

Определить, при каком значении a прямая

$$(a - 5)x + (a^2 - 1)y + 2a^2 + 7a - 9 = 0$$

параллельна оси ординат. Написать уравнение прямой.

Указание

Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$ $B = 0$, $C \neq 0$.

Решение

Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$ $B = 0$, $C \neq 0$. Из условия $B = 0$ получаем: $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.

При $a = 1$ $C = 2 + 7 - 9 = 0$ – второе условие не выполняется (получившаяся при этом прямая $-4x = 0$ не параллельна оси Oy , а совпадает с ней).

При $a = -1$ получим: $-6x - 14 = 0$, $3x + 7 = 0$.

Ответ: $3x + 7 = 0$ при $a = -1$;

Задача 7.

Составить уравнения всех прямых, проходящих через точку $M(2; 3)$ и отсекающих от координатного угла треугольник площадью 12.

Указание

Составьте уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $|a|$ и $|b|$ – длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| = 12,$$

откуда $|ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2; 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках».

Решение

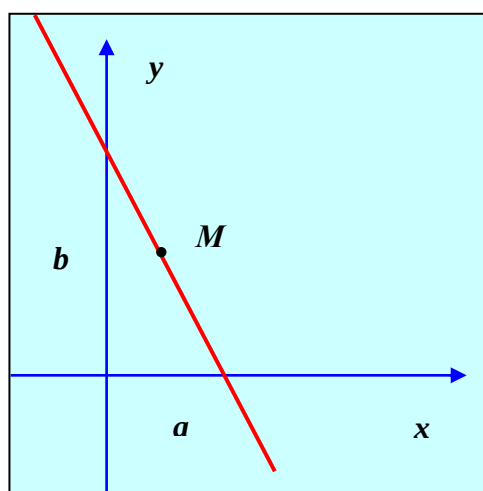


Рис. 17

Составим уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $|a|$ и $|b|$ - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| = 12,$$

откуда $|ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2; 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках». Таким образом, для a и b можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \\ |ab| = 24 \end{cases}.$$

$$1) \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \\ ab = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{24}{a} \\ \frac{2}{a} + \frac{a}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 8a + 16 = 0, a = 4, b = 6.$$

$$2) \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \\ ab = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{24}{a} \\ \frac{2}{a} - \frac{a}{8} = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 8a - 16 = 0,$$

$$a = -4 \pm 4\sqrt{2}, b = -\frac{24}{-4 \pm 4\sqrt{2}} = -6(1 \mp \sqrt{2}).$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют три прямые:

$$1) \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 3x + 2y - 12 = 0;$$

$$2) -\frac{x}{4(1+\sqrt{2})} - \frac{y}{6(1-\sqrt{2})} = 1 \Rightarrow 3(1-\sqrt{2})x + 2(1+\sqrt{2})y - 12 = 0;$$

$$3) -\frac{x}{4(1-\sqrt{2})} - \frac{y}{6(1+\sqrt{2})} = 1 \Rightarrow 3(1+\sqrt{2})x + 2(1-\sqrt{2})y - 12 = 0.$$

Ответ:

$$3x + 2y - 12 = 0;$$

$$3(1-\sqrt{2})x + 2(1+\sqrt{2})y - 12 = 0;$$

$$3(1+\sqrt{2})x + 2(1-\sqrt{2})y - 12 = 0.$$

2.2.2. Уравнение плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве

Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

задает множество точек P на плоскости, если для любой точки $M \in P$ ее координаты удовлетворяют равенству (1), и наоборот, если для всех троек (x, y, z) , удовлетворяющих (1), точка $M = \{x, y, z\}$ принадлежит множеству P . При этом говорят, что уравнение (1) является уравнением множества P .

Пусть в пространстве дана точка $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Найдем уравнение плоскости P , проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (A, B, C)$. Пусть $M = \{x, y, z\}$ – произвольная точка на плоскости P . Тогда

$$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n} \overrightarrow{MM_0} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

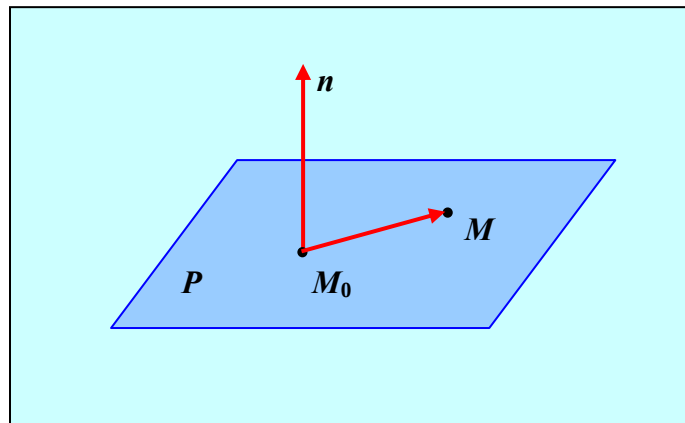


Рис. 1

Тем самым уравнение плоскости P задается в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Нормальным вектором плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Пример 1. Найдем уравнение плоскости с нормальным вектором $\mathbf{n} = (-2, 2, 3)$, проходящей через точку $M_0 = \{1, 2, -1\}$. Имеем

$$-2(x - 1) + 2(y - 2) + 3(z + 1) = 0$$

или

$$-2x + 2y + z + 1 = 0.$$

Теорема 10.1. Всякая плоскость в пространстве может быть задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \quad (3)$$

и любое уравнение (3) задает в пространстве некоторую плоскость. При этом вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$ является нормальным вектором этой плоскости.

Доказательство.

Пусть дана произвольная плоскость. Выберем на ней точку $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Пусть $\mathbf{n} = (A, B, C)$ – некоторый нормальный вектор этой плоскости. Тогда, как было показано выше, уравнение этой плоскости запишется в виде (3).

Покажем, что всякое уравнение (3) определяет некоторую плоскость в пространстве. Найдем точку $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Если $A \neq 0$, то, например, можно положить

$$x_0 = -\frac{D}{A}, \quad y_0 = z_0 = 0.$$

Если $B \neq 0$, то

$$x_0 = z_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{D}{B}.$$

А если $C \neq 0$, то

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = -\frac{D}{C}.$$

Теперь построим плоскость с нормальным вектором $\mathbf{n} = (A, B, C)$, проходящую через точку M_0 . Ее уравнение будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению (3).

Уравнение (3) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве.

Неполные уравнения плоскости

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) равен нулю, то такое уравнение называется *неполным*.

1. Предположим, что $D = 0$, т.е. уравнение прямой задается в виде

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат, так как координаты точки $O = \{0, 0, 0\}$ удовлетворяют уравнению этой плоскости.

2. Пусть $A = 0$. Тогда плоскость $Bu + Cz + D = 0$ параллельна координатной оси Ox , так как ее нормальный вектор $\mathbf{n} = (0, B, C)$ ортогонален вектору $\mathbf{i}$.
3. Пусть $B = 0$. Тогда плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна координатной оси Oy , так как ее нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, 0, C)$ ортогонален вектору $\mathbf{j}$.
4. Пусть $C = 0$. Тогда плоскость $Ax + Bu + D = 0$ параллельна координатной оси Oz , так как ее нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, 0)$ ортогонален вектору $\mathbf{k}$.
5. Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxy , так как она параллельна осям Ox и Oy .
6. Если $A = C = 0$, то плоскость $Bu + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz , так как она параллельна осям Ox и Oz .
7. Если $B = C = 0$, то плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz , так как она параллельна осям Oy и Oz .

Уравнение плоскости в отрезках

Предположим, что все коэффициенты в уравнении плоскости (3) отличны от нуля. Тогда, перенеся D в правую часть равенства и разделив обе части равенства на $-D$, получим уравнение

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \quad (4)$$

где $p = -D/A$, $q = -D/B$, а $r = -D/C$. Уравнение (4) называется уравнением плоскости в отрезках. Числа p , q и r имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что точки с координатами $\{p, 0, 0\}$, $\{0, q, 0\}$ и $\{0, 0, r\}$ удовлетворяют уравнению (4).

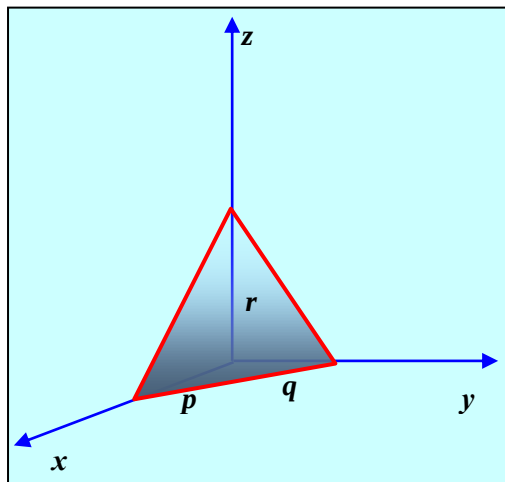


Рис. 2

Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы уравнения двух плоскостей

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Векторы $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются нормальными векторами для плоскостей P_1 и P_2 соответственно.

1. Условие параллельности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, что эквивалентно пропорциональности координат этих векторов. Таким образом,

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

2. Условие перпендикулярности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, что эквивалентно равенству нулю скалярного произведения этих векторов. Таким образом,

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Нахождение угла φ между плоскостями P_1 и P_2 сводится к нахождению угла между нормальными векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Имеем

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}.$$

Тем самым

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 12. При каких значениях параметра a плоскости

$$P_1: ax + 2y - 3z + 1 = 0,$$

$$P_2: 2x - 2ay + z - 2 = 0$$

перпендикулярны?

Найдем нормальные векторы этих плоскостей. Имеем

$$\mathbf{n}_1 = (a, 2, -3), \quad \mathbf{n}_2 = (2, -2a, 1).$$

Условие перпендикулярности плоскостей запишется теперь в виде

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4a - 3 = 0, \quad a = -1,5.$$

Упражнение 1. Найти угол между плоскостями

$$P_1: x + y + 4 = 0,$$

$$P_2: 3x - 3z + 1 = 0.$$

Решение.

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{18}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $M_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $M_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, не лежащие на одной прямой. Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ не коллинеарны, поэтому точка $M = \{x, y, z\}$ лежит на искомой плоскости в том и только в том случае, если векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ компланарны.

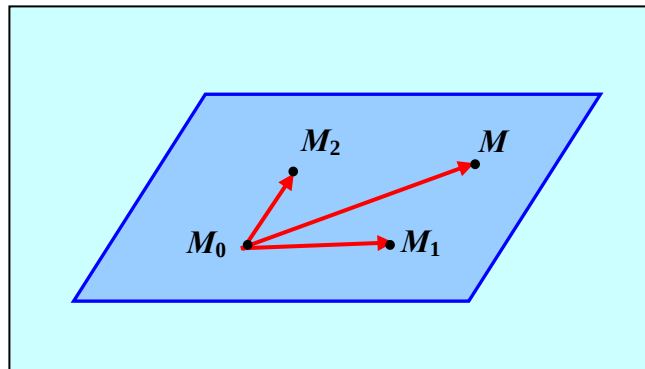


Рис. 3

Условие компланарности трех векторов эквивалентно равенству нулю их смешанного произведения. В силу того, что

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0),$$

получаем уравнение плоскости, проходящей через точки M_0 , M_1 и M_2 , в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нормальное уравнение плоскости

Пусть задана произвольная плоскость P . Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную P . Точку пересечения ее с плоскостью P обозначим через R . Через $\mathbf{n}$ обозначим единичный вектор, совпадающий с направлением вектора $\vec{OR}$ (см. рис. 10.4). В случае, если точка R совпадает с O , возьмем в качестве $\mathbf{n}$ любой вектор единичной длины.

Так как $\mathbf{n}$ – единичный вектор, его координаты имеют вид

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

где α , β и γ – углы между вектором $\mathbf{n}$ и осями Ox , Oy и Oz соответственно. Положим

$$p = |\vec{OR}|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} M = \{x, y, z\} \in P &\Leftrightarrow n \vec{OM} = p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p. \end{aligned}$$

Уравнение

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

называется *нормальным уравнением* плоскости.

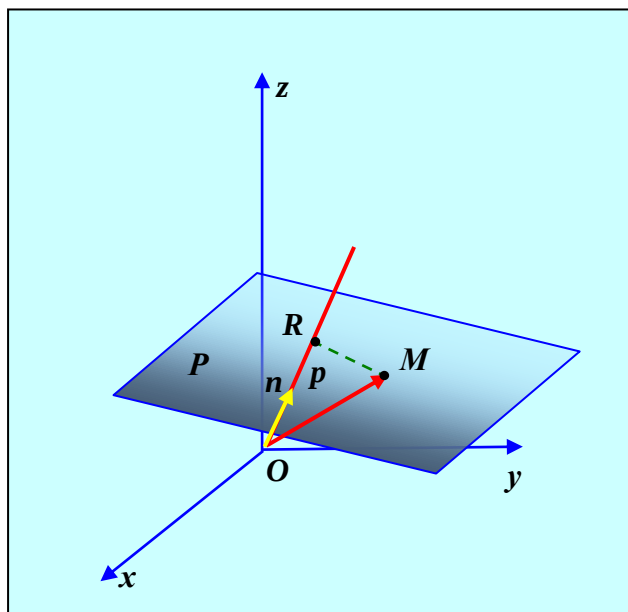


Рис. 4

Для того чтобы перейти от общего уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к нормальному, надо умножить его на такое число t , для которого

$$At = \cos \alpha, \quad Bt = \cos \beta, \quad Ct = \cos \gamma, \quad Dt = -p.$$

Так как сумма направляющих косинусов равна единице, то

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а знак t противоположен знаку D .

Пример 3. Приведем уравнение плоскости

$$2x - y + 2z - 3 = 0$$

к нормальному виду. Для этого надо разделить обе части на

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Получаем

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Отклонение и расстояние от точки до плоскости

Обозначим через d расстояние от точки M до плоскости P . *Отклонением* точки M от плоскости P называется число d , если M и начало координат O лежат по разные стороны от плоскости P , и число $-d$, если M и O лежат по одну сторону от P . Если O принадлежит P и $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – нормальный вектор плоскости P , то отклонение положим равным d , когда M лежит по ту сторону от P , куда направлен вектор $\mathbf{n}$, и $-d$ – в противном случае.

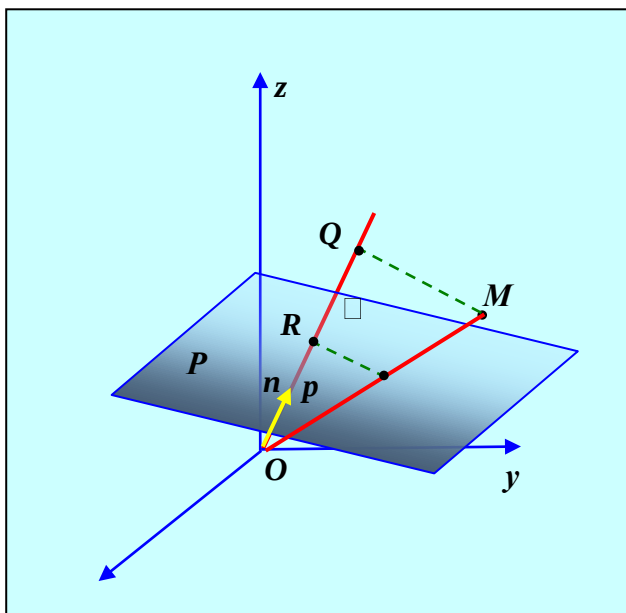


Рис. 5

Пусть Q – проекция точки $M = \{x, y, z\}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{n}$. Тогда отклонение точки M от плоскости P равно

$$\delta = n p_n \overline{RQ}.$$

Поэтому

$$np_n \vec{OM} = \vec{OM} \cdot \vec{n} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p + \delta.$$

Отсюда

$$\delta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p.$$

В силу того, что $d = |\square|$, имеем

$$d = |x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p|.$$

Пример 4. Даны координаты вершин пирамиды $A = \{0,1,1\}$, $B = \{2,1,-1\}$, $C = \{3,-1,0\}$ и $D = \{3,1,2\}$. Найти длину высоты h , проведенной из вершины A на основание BCD .

Длина высоты равна расстоянию от точки A до плоскости, проходящей через точки B , C и D . Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & -1-1 & 0+1 \\ 3-2 & 1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-6(x-2) - 2(y-1) + 2(z+1) = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая на -2 , приходим к уравнению

$$3x + y - z - 8 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{3}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z - \frac{8}{\sqrt{11}} = 0.$$

Следовательно,

$$h = \left| \frac{3}{\sqrt{11}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot 1 - \frac{8}{\sqrt{11}} \right| = \frac{8}{\sqrt{11}}.$$

Упражнение 2. Найти расстояния от точек $M_1 = \{-1,3,2\}$ и $M_2 = \{2,1,-3\}$ до плоскости

$$x - 2y + 2z + 1 = 0$$

и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от плоскости или по разные стороны.

Решение.

Приведем уравнение плоскости к нормальному виду:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

и найдем отклонения точек M_1 и M_2 от плоскости:

$$\delta_1 = \left| -\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \right| = \frac{2}{3},$$

$$\delta_2 = \left| -\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3}(-3) - \frac{1}{3} \right| = \frac{5}{3}.$$

Поскольку отклонения имеют одинаковые знаки, точки лежат по одну сторону от плоскости. Расстояния от точек до плоскости равны

$$d_1 = |\delta_1| = \frac{2}{3}, \quad d_2 = |\delta_2| = \frac{5}{3}.$$

Ответ: точки лежат по одну сторону от плоскости; расстояние от точки M_1 до плоскости равно $2/3$, а от точки M_2 – $5/3$.

Прямая в пространстве

Прямую в пространстве невозможно задать одним уравнением. Для этого требуется система двух или более уравнений.

Первая возможность составить уравнения прямой в пространстве – представить эту прямую как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 не пропорциональны:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Однако при решении многих задач удобнее пользоваться другими уравнениями прямой, содержащими в явной форме некоторые ее геометрические характеристики.

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее **направляющим вектором**.

Для любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на данной прямой, вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен направляющему вектору $\mathbf{a}$. Поэтому имеют место равенства:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (6)$$

называемые **каноническими уравнениями** прямой в пространстве.

В частности, если требуется получить уравнения прямой, проходящей через две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, направляющим вектором такой прямой можно считать вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, и уравнения (6) принимают вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad - \quad (7)$$

уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Если же принять каждую из равных дробей в уравнениях (6) за некоторый параметр t , можно получить так называемые **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (8)$$

Для того, чтобы перейти от уравнений (5) к каноническим или параметрическим уравнениям прямой, требуется найти направляющий вектор этой прямой и координаты любой точки, принадлежащей ей. Направляющий вектор прямой ортогонален нормальям к обеим плоскостям, следовательно, он коллинеарен их векторному произведению. Поэтому в качестве направляющего вектора можно выбрать $[\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2]$ или любой вектор с пропорциональными координатами. Чтобы найти точку, лежащую на данной прямой, можно задать одну ее координату произвольно, а две остальные найти из уравнений (5), выбрав их так, чтобы определитель из их коэффициентов не равнялся нулю.

Пример 5.

Составим канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ x - 5y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Найдем $[\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2]$. $\mathbf{n}_1 = (2, 1, -3)$, $\mathbf{n}_2 = (1, -5, 4)$. Тогда $[\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2] = (-11, -11, -11)$.

Следовательно, направляющим вектором прямой можно считать вектор $(1, 1, 1)$.

Будем искать точку на прямой с координатой $z_0=0$. Для координат x_0 и y_0 получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 5 = 0 \\ x_0 - 5y_0 + 3 = 0' \end{cases}$$

откуда $x_0=2$, $y_0=1$. Теперь можно составить канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}.$$

Параметрические уравнения той же прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t. \\ z = t \end{cases}$$

Замечание. Если какая-либо из координат направляющего вектора равна 0, то предполагается, что для любой точки прямой числитель соответствующей дроби в канонических уравнениях тоже равен 0.

Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (9)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad -$$

условие параллельности прямых,

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad -$$

условие перпендикулярности прямых.

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

и плоскостью, определяемой общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin \varphi = \cos \psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условием параллельности прямой и плоскости является при этом условие перпендикулярности векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

а условием перпендикулярности прямой и плоскости – условие параллельности этих векторов:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«Уравнение плоскости в пространстве»

Задача 1.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A=\{5; -1; 3\}$, $B=\{2; 2; 0\}$, $C=\{-1; 1; 1\}$.

Указание

Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать координаты точки, лежащей в этой плоскости, и координаты нормали, то есть вектора, перпендикулярного плоскости.

Решение

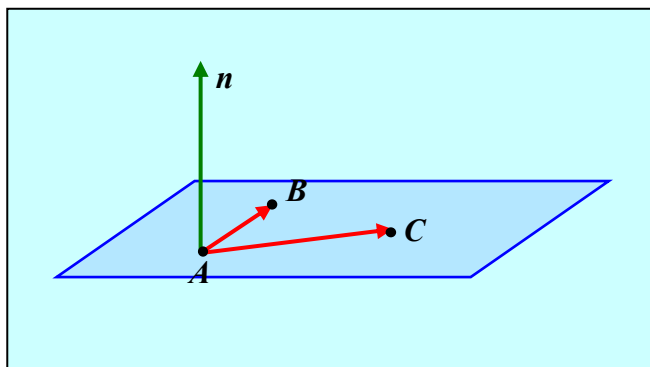


Рис. 6

Векторы $AB = (-3; 3; -3)$ и $AC = (-6; 2; -2)$ параллельны данной плоскости, поэтому их векторное произведение или любой вектор, коллинеарный ему, является нормалью к плоскости.

$$\begin{aligned} [\vec{AB}, \vec{AC}] &= \left\{ \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= (0; 12; 12) = 12(0; 1; 1). \end{aligned}$$

Выберем в качестве нормали $\mathbf{n} = (0; 1; 1)$, а точкой $\{x_0; y_0; z_0\}$ будем считать точку B. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$0 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 0) = 0, \quad y + z - 2 = 0.$$

Ответ: $y + z - 2 = 0$.

Задача 2.

Составить канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 5z - 3 = 0 \\ 5x + 3y + 8z - 13 = 0 \end{cases}$$

Указание

Для того, чтобы составить канонические или параметрические уравнения прямой в пространстве, нужно знать координаты какой-либо точки, лежащей на этой на этой прямой, и координаты направляющего вектора, то есть вектора, коллинеарного прямой.

Решение

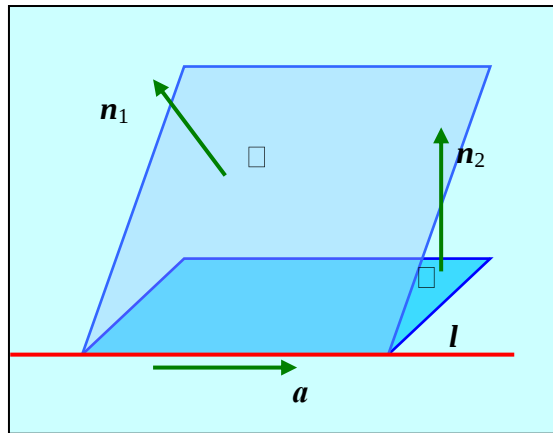


Рис. 7

Прямая является линией пересечения двух плоскостей, поэтому ее направляющий вектор $\mathbf{a}$ параллелен каждой из этих плоскостей и соответственно перпендикулярен нормальям $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к данным плоскостям. В таком случае он коллинеарен векторному произведению $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$.

$\mathbf{n}_1 = (2; 1; -5)$, $\mathbf{n}_2 = (5; 3; 8)$, $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = (23; -41; 1)$.

Итак, $(l; m; n) = (23; -41; 1)$.

Будем искать точку, лежащую на данной прямой, у которой одна из координат принимает выбранное нами значение; тогда остальные две координаты можно определить единственным образом из системы уравнений, задающей пересекающиеся плоскости. Выберем для удобства вычислений $z_0 = 0$, тогда для точки $M = \{x_0; y_0; 0\}$

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 3 - x_0 \\ 5x_0 + 9 - 6x_0 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_0 = -4; y_0 = 11, M = \{-4; 11; 0\}.$$

Теперь составим канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x+4}{23} = \frac{y-11}{-41} = \frac{z}{1}.$$

Ответ: $\frac{x+4}{23} = \frac{y-11}{-41} = \frac{z}{1}.$

Задача 3.

Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую l :

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t + 5 \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

и точку $M = \{2; -3; 1\}$.

Указание

Точка $A = \{-3, 5, -1\}$ принадлежит плоскости, соответственно вектор $\overrightarrow{AM}$ параллелен плоскости. Кроме того, поскольку данная прямая лежит в плоскости, ее направляющий вектор $\mathbf{a} = (2; 1; -1)$ параллелен плоскости. Следовательно, нормаль к плоскости коллинеарна векторному произведению этих векторов.

Решение

Поскольку прямая лежит в плоскости, ее направляющий вектор $\mathbf{a} = (2; 1; -1)$ параллелен плоскости. При $t = 0$ из уравнений прямой получаем:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases}$$

координаты точки A , принадлежащей прямой и соответственно плоскости.

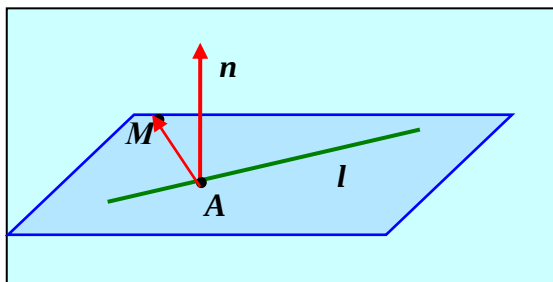


Рис. 8

Тогда вектор $\overrightarrow{AM} = (5; -8; 2)$ параллелен плоскости. Следовательно, нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости коллинеарна векторному произведению $[\mathbf{a}, \overrightarrow{AM}] = (-6; -9; -21)$. Выберем $\mathbf{n} = (2; 3; 7)$ и составим уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно $\mathbf{n}$:

$$2(x - 2) + 3(y + 3) + 7(z - 1) = 0, \quad 2x + 3y + 7z - 2 = 0.$$

Ответ: $2x + 3y + 7z - 2 = 0$.

Задача 4.

Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$l_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 4t + 13 \end{cases}.$$

Указание

Координаты направляющих векторов данных прямых $\mathbf{a}_1 = \{3; 2; -2\}$ и

$\mathbf{a}_2 = \{1; 1; 4\}$ не пропорциональны, следовательно, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Составьте уравнение плоскости Π , проходящей через прямую l_1 параллельно вектору $\mathbf{a}_2$. Если l_1 и l_2 пересекаются, то прямая l_2 будет лежать в этой плоскости; если же l_1 и l_2 скрещиваются, то l_2 параллельна плоскости Π , и тогда расстояние между l_1 и l_2 (длина общего перпендикуляра) будет равно расстоянию от любой точки прямой l_2 до плоскости Π .

Решение

Координаты направляющих векторов данных прямых $\mathbf{a}_1 = \{3; 2; -2\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{1; 1; 4\}$ не пропорциональны, следовательно, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Составим уравнение плоскости Π , проходящей через прямую l_1 параллельно вектору $\mathbf{a}_2$. Если l_1 и l_2 пересекаются, то прямая l_2 будет лежать в этой плоскости (рис.9); если же l_1 и l_2 скрещиваются, то l_2 параллельна плоскости Π , и тогда расстояние между l_1 и l_2 (длина общего перпендикуляра) будет равно расстоянию от любой точки прямой l_2 до плоскости Π (рис.10).

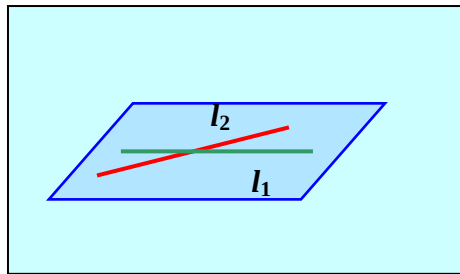


Рис. 9

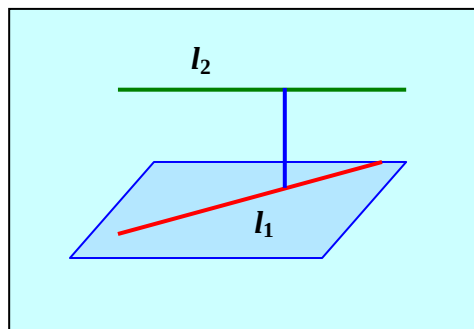


Рис. 10

$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = (10; -14; 1) = \mathbf{n}$, точка $A = \{5; 0; -25\}$ лежит на прямой l_1 , следовательно, она лежит и в плоскости Π . Тогда уравнение плоскости Π имеет вид:

$$10(x - 5) - 14(y - 0) + 1 \cdot (z + 25) = 0; \quad 10x - 14y + z - 25 = 0.$$

Точка $B = \{1; 2; 13\}$ принадлежит прямой l_2 . Проверим, лежит ли эта точка в плоскости Π :

$$10 \cdot 1 - 14 \cdot 2 + 13 - 25 = -30 \neq 0 \Rightarrow B \notin l_2 \Rightarrow l_2 \not\subset \Pi.$$

Тогда искомой величиной будет расстояние от B до Π . Его можно найти, составив нормальное уравнение плоскости Π :

$$\alpha: \frac{10}{\sqrt{33}}x - \frac{14}{\sqrt{33}}y + \frac{1}{\sqrt{33}}z - \frac{25}{\sqrt{343}} = 0,$$

$$d_B = \left| \frac{10}{\sqrt{33}} \cdot 1 - \frac{14}{\sqrt{33}} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{33}} \cdot 13 - \frac{25}{\sqrt{33}} \right| = \left| -\frac{28}{\sqrt{33}} \right| = \frac{28}{\sqrt{33}}.$$

Ответ: $\frac{28}{\sqrt{33}}$.

Задача 5.

Найти точку, симметричную точке $A(5; -10; 4)$ относительно плоскости $\Pi: x - 3y + z - 6 = 0$.

Указание

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости Π так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения Π с прямой AB .

Решение

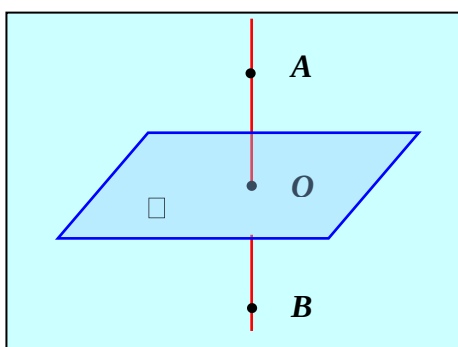


Рис. 11

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости Π так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения Π с прямой AB . Составим уравнения прямой AB . Эта прямая перпендикулярна Π , поэтому ее направляющим вектором можно считать нормаль к плоскости Π : $\mathbf{a} = \mathbf{n} = (1; -3; 1)$.

Параметрические уравнения прямой AB имеют вид:

$$\begin{cases} x = t + 5 \\ y = -3t - 10 \\ z = t + 4 \end{cases}$$

Точка O принадлежит и прямой AB , и плоскости Π , поэтому ее координаты должны удовлетворять и уравнениям прямой, и уравнению плоскости.

Подставим в уравнение плоскости $\square$ параметрические выражения для x, y, z из уравнений прямой AB :

$$t + 5 - 3(-3t - 10) + t + 4 - 6 = 0; 11t + 33 = 0; t = -3.$$

Итак, координаты точки O :

$$\begin{cases} x = -3 + 5 = 2 \\ y = -3(-3) - 10 = -1 \Rightarrow O(2; -1; 1). \\ z = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Поскольку точка O – середина отрезка AB , то

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_O = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_O - x_A = 4 - 5 = -1 \\ y_B = 2y_O - y_A = -2 + 10 = 8 \\ z_B = 2z_O - z_A = 2 - 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 8; -2).$$

Ответ: $(-1; 8; -2)$.

2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

2.3.1. Линейные операторы и квадратичные формы

Линейные операторы

Будем говорить, что на множестве векторов R задан **оператор** A , если каждому вектору $x \in R$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $Ax \in R$.

Оператор A называется **линейным**, если для любых векторов x и y и для любого действительного числа $\square$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} A(x + y) &= Ax + Ay, \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax \end{aligned} \quad (1)$$

Линейный оператор называется **тождественным**, если он преобразует любой вектор x в самого себя. Тождественный оператор обозначается E : $Ex = x$.

Рассмотрим трехмерное пространство с базисом e_1, e_2, e_3 , в котором задан линейный оператор A . Применив его к базисным векторам, мы получим векторы Ae_1, Ae_2, Ae_3 , принадлежащие этому трехмерному пространству. Следовательно, каждый из них можно единственным образом разложить по векторам базиса:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ A\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ A\mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного оператора** A в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Столбцы этой матрицы составлены из коэффициентов в формулах (2) преобразования базиса.

Замечание. Очевидно, что матрицей тождественного оператора является единичная матрица E .

Для произвольного вектора $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ результатом применения к нему линейного оператора A будет вектор $A\mathbf{x}$, который можно разложить по векторам того же базиса:

$$A\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + x'_3\mathbf{e}_3,$$

где координаты x'_i можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты в формулах этого линейного преобразования являются элементами строк матрицы A .

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим линейный оператор A и два базиса в трехмерном пространстве: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$. Пусть матрица C задает формулы перехода от базиса $\{\mathbf{e}_k\}$ к базису $\{\underline{\mathbf{e}}_k\}$. Если в первом из этих базисов выбранный линейный оператор задается матрицей A , а во втором – матрицей $\underline{A}$, то можно найти связь между этими матрицами, а именно:

$$A = C^{-1}\underline{A}C. \quad (4)$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \underline{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{r} \\ \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{r} \\ \underline{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \underline{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{u} \\ \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{u} \\ \underline{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad A \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \underline{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{r} \\ \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{r} \\ \underline{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \underline{A}C \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \underline{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{u} \\ \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{u} \\ \underline{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, результаты применения одного и того же линейного оператора A в базисе $\{\underline{e}_k\}$, т.е. $A \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$, и в базисе $\{\underline{e}_k\}$: соответственно $\underline{A} \begin{pmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \underline{p}_3 \end{pmatrix}$ -

связаны матрицей C :

$$\underline{A} \begin{pmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \end{pmatrix} = C A \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $CA = \underline{A}C$. Умножая обе части этого равенства слева на C^{-1} , получим $C^{-1}CA = C^{-1}\underline{A}C$, что доказывает справедливость формулы (4).

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Вектор x называется **собственным вектором** матрицы A , если найдется такое число λ , что выполняется равенство: $Ax = \lambda x$, то есть результатом применения к x линейного оператора, задаваемого матрицей A , является умножение этого вектора на число λ . Само число λ называется **собственным числом** матрицы A .

Подставив в формулы (3) $x'_j = \lambda x_j$, получим систему уравнений для определения координат собственного вектора:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad (5).$$

Эта линейная однородная система будет иметь нетривиальное решение только в случае, если ее главный определитель равен 0 (правило Крамера). Записав это условие в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим уравнение для определения собственных чисел λ , называемое **характеристическим уравнением**. Кратко его можно представить так:

$$|A - \lambda E| = 0, \quad (6)$$

поскольку в его левой части стоит определитель матрицы $A - \lambda E$. Многочлен относительно λ $|A - \lambda E|$ называется **характеристическим многочленом** матрицы A .

Свойства характеристического многочлена:

- 1) Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

$\Delta_A = \Delta_C \Delta_{\underline{A}} \Delta_{C^{-1}}$ (см. (11.4)), но $\Delta_C \Delta_{C^{-1}} = \Delta_E = 1$, следовательно, $\Delta_A = \Delta_{\underline{A}}$. Таким образом, Δ_A не зависит от выбора базиса. Значит, и $|A - \lambda E|$ не изменяется при переходе к новому базису.

- 2) Если матрица A линейного оператора является **симметрической** (т.е. $a_{ij} = a_{ji}$), то все корни характеристического уравнения (11.6) – действительные числа.

Свойства собственных чисел и собственных векторов:

- 1) Если выбрать базис из собственных векторов x_1, x_2, x_3 , соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы A , то в этом базисе линейное преобразование A имеет матрицу диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Доказательство этого свойства следует из определения собственных векторов.

- 2) Если собственные значения оператора A различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.
- 3) Если характеристический многочлен матрицы A имеет три различных корня, то в некотором базисе матрица A имеет диагональный вид.

Пример 1.

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 6 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Найдем координаты собственных векторов, соответствующих каждому найденному значению λ . Из (5) следует, что если $\mathbf{x}_{(1)} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = -2$, то

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} -$$

совместная, но неопределенная система. Ее решение можно записать в виде $\mathbf{x}_{(1)} = (a, 0, -a)$, где a – любое число. В частности, если потребовать, чтобы $|\mathbf{x}_{(1)}| = 1$,

$$\mathbf{x}_{(1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Подставив в систему (5) $\lambda_2 = 3$, получим систему для определения координат второго собственного вектора – $\mathbf{x}_{(2)} = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases} ,$$

откуда $\mathbf{x}_{(2)} = (b, -b, b)$ или, при условии $|\mathbf{x}_{(2)}| = 1$,

$$\mathbf{x}_{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для $\lambda_3 = 6$ найдем собственный вектор $\mathbf{x}_{(3)} = (z_1, z_2, z_3)$:

$$\begin{cases} -5z_1 + z_2 + 3z_3 = 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 = 0 \\ 3z_1 + z_2 - 5z_3 = 0 \end{cases} ,$$

$\mathbf{x}_{(3)} = \{c, 2c, c\}$ или в нормированном варианте

$$\mathbf{x}_{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Можно заметить, что $\mathbf{x}_{(1)}\mathbf{x}_{(2)} = ab - ab = 0$, $\mathbf{x}_{(1)}\mathbf{x}_{(3)} = ac - ac = 0$, $\mathbf{x}_{(2)}\mathbf{x}_{(3)} = bc - 2bc + bc = 0$. Таким образом, собственные векторы этой матрицы попарно ортогональны.

Квадратичные формы и их связь с симметрическими матрицами

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Примеры квадратичных форм:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \quad (n=2) \\ f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ &+ 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \quad (n=3) \end{aligned} \quad (8)$$

Напомним определение симметрической матрицы:

Квадратная матрица называется
симметрической, если

$$a_{ij} = a_{ji},$$

то есть если равны элементы матрицы,
симметричные относительно главной
диагонали.

Свойства собственных чисел и собственных векторов симметрической матрицы:

1) Все собственные числа симметрической матрицы действительные.

Доказательство (для $n = 2$).

Пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \quad (9)$$

Найдем дискриминант:

$$D = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

следовательно, уравнение имеет только действительные корни.

2) Собственные векторы симметрической матрицы ортогональны.

Доказательство (для $n = 2$).

Координаты собственных векторов

$$\vec{e}_1 = (x_1, y_1) \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = (x_2, y_2)$$

должны удовлетворять уравнениям:

$$(a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}y_1 = 0, \quad (a_{11} - \lambda_2)x_2 + a_{12}y_2 = 0.$$

Следовательно, их можно задать так:

$$\vec{e}_1 = \left(a, \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} a \right), \quad \vec{e}_2 = \left(b, \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} b \right).$$

Скалярное произведение этих векторов имеет вид:

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \frac{ab}{a_{12}^2} (a_{12}^2 + \lambda_1 \lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2).$$

По теореме Виета из уравнения (9) получим, что

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Подставим эти соотношения в предыдущее равенство:

$$\frac{ab}{a_{12}^2} (a_{12}^2 + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 - a_{11} (a_{11} + a_{22}) + a_{11}^2) = 0.$$

Значит, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$.

Замечание. В примере 1 были найдены собственные векторы симметрической матрицы и обращено внимание на то, что они оказались попарно ортогональными.

Матрицей квадратичной формы (8) называется симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Таким образом, все собственные числа матрицы квадратичной формы действительны, а все собственные векторы ортогональны. Если все собственные числа различны, то из трех нормированных собственных векторов матрицы (10) можно построить базис в трехмерном пространстве. В этом базисе квадратичная форма будет иметь особый вид, не содержащий произведений переменных.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Каноническим видом квадратичной формы (8) называется следующий вид:

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2. \quad (11)$$

Покажем, что в базисе из собственных векторов квадратичная форма (8) примет канонический вид. Пусть

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= b_{11} \vec{e}_1 + b_{21} \vec{e}_2 + b_{31} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= b_{12} \vec{e}_1 + b_{22} \vec{e}_2 + b_{32} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= b_{13} \vec{e}_1 + b_{23} \vec{e}_2 + b_{33} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad -$$

нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы (10) в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда матрицей перехода от старого базиса к новому будет матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

В новом базисе матрица A примет диагональный вид (7) (по свойству собственных векторов). Таким образом, преобразовав координаты по формулам:

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3, \\ x'_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned}$$

получим в новом базисе канонический вид квадратичной формы с коэффициентами, равными собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\bar{f}(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \lambda_3 x'^2_3. \quad (12)$$

Замечание 1. С геометрической точки зрения рассмотренное преобразование координат представляет собой поворот координатной системы, совмещающий старые оси координат с новыми.

Замечание 2. Если какие-либо собственные числа матрицы (10) совпадают, к соответствующим им ортонормированным собственным векторам можно добавить единичный вектор, ортогональный каждому из них, и построить таким образом базис, в котором квадратичная форма примет канонический вид.

Пример 2.

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$$

Ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 1 найдены собственные числа и ортонормированные собственные векторы этой матрицы:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Составим матрицу перехода к базису из этих векторов:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(порядок векторов изменен, чтобы они образовали правую тройку). Преобразуем координаты по формулам:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z' \\y &= \frac{2}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z' \\z &= -\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned}& x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = \\& \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right)^2 + 5\left(\frac{2}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right)^2 + \\& + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right) + \\& + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right) + \\& + 2\left(\frac{2}{\sqrt{6}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{1}{\sqrt{6}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z'\right) = \\& = -2x'^2 + 6y'^2 + 3z'^2.\end{aligned}$$

Итак, квадратичная форма приведена к каноническому виду с коэффициентами, равными собственным числам матрицы квадратичной формы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «Линейные операторы и квадратичные формы»

Задача 1.

Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – базис в векторном пространстве. Разложить вектор $x = e_1 + 2e_2 - e_3 + 3e_4$ по новому базису u_1, u_2, u_3, u_4 , если $u_1 = e_1$, $u_2 = e_1 + e_2$, $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

Указание

Выпишите матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе. Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

Решение

Выпишем матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

Координаты вектора x в старом базисе: $x = (1; 2; -1; 3)$. Пусть в новом базисе он имеет координаты: $x = (x, y, z, t)$. Тогда, используя матрицу T , найдем связь между старыми и новыми координатами:

$$\begin{cases} 1 = x + y + z + t \\ 2 = y + z + t \\ -1 = z + t \\ 3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = -4 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Следовательно, в новом базисе $x = (-1; 3; -4; 3)$.

Ответ: $x = (-1; 3; -4; 3)$.

Задача 2.

Найти матрицу A' оператора A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисе $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = 2e_1 + e_2$, $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

Указание

Искомая матрица $A' = T^{-1} A T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому.

Решение

Искомая матрица $A' = T^{-1} A T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому. Составим матрицу T :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad A' = (T^{-1}A)T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$

Задача 3.

Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указание

Для определения собственных чисел составьте характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Координаты собственных векторов $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке λ_i .

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - 15 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 6.$$

Найдем собственные векторы:

1) для $\lambda = -2$ координаты собственного вектора $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке $\lambda = -2$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3y_1 = 0 \\ 5x_1 + 5y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -x_1.$$

Если $x_1 = 1$, то $y_1 = -1$, и $\mathbf{r}_1 = (1; -1)$. Остальные собственные векторы коллинеарны вектору $(1; -1)$, и общий вид собственного вектора, соответствующего $\lambda = -2$: $\mathbf{r}_1 = c_1(1; -1)$, где c_1 – произвольная постоянная.
 2) для $\lambda = 6$ координаты собственного вектора $\mathbf{r}_2 (x_2; y_2)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} -5x_2 + 3y_2 = 0 \\ 5x_2 - 3y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \frac{5}{3}x_2.$$

Пусть $x_2 = 3$, тогда $y_2 = 5$, и $\mathbf{r}_2 = (3; 5)$. Соответственно общий вид второго собственного вектора: $\mathbf{r}_2 = c_2(3; 5)$.

Ответ: собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$; собственные векторы $\mathbf{r}_1 = c_1(1; -1)$, $\mathbf{r}_2 = c_2(3; 5)$.

Задача 4.

В пространстве 3-мерных векторов задан оператор

$$A\mathbf{x} = (x\mathbf{i})\mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$ – базисный вектор декартовой системы координат.

Выяснить геометрический смысл этого оператора.

Указание

Множитель $x\mathbf{i}$ – скалярное произведение, то есть число, поэтому вектор $(x\mathbf{i})\mathbf{i}$ коллинеарен оси Ox .

Решение

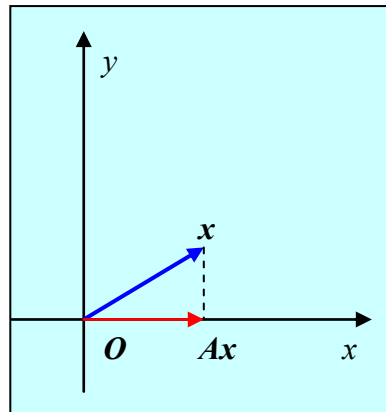


Рис. 1

Оператор A переводит произвольно направленный вектор $\mathbf{x}$ в вектор $k\mathbf{i}$, коллинеарный оси Ox , поскольку первый множитель – скалярное произведение, то есть число. Из определения скалярного произведения следует, что

$$A\mathbf{x} = (x\mathbf{i})\mathbf{i} = (|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos\varphi) \mathbf{i} = (|\mathbf{x}| \cos\varphi) \mathbf{i}.$$

Следовательно, A – оператор проектирования на ось Ox .

Ответ:

Оператор осуществляет проектирование вектора $\mathbf{x}$ на ось Ox ;

Задача 5.

Привести матрицу A линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы линейного оператора, задайте базис из линейно независимых собственных векторов r_1, r_2, r_3 , в котором матрица оператора примет диагональный вид, и составьте матрицу перехода к новому базису.

Решение

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным числам.

При $\lambda = 1$ для вектора $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ получаем:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 4y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 3y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = y_1 = z_1 = 1, \quad r_1 = (1; 1; 1).$$

Подставим в строки определителя $\lambda = 2$ и найдем связь между координатами собственного вектора $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$$

Та же зависимость получается для координат третьего собственного вектора $r_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Выберем значения двух координат каждого из этих векторов так, чтобы r_2 и r_3 были линейно независимы.

Пусть $x_2 = 1, y_2 = 0$, тогда $z_2 = -3$, и $r_2 = (1; 0; -3)$.

Для r_3 выберем $x_3 = 0, y_3 = 1$, тогда $z_3 = 3$, $r_3 = (0; 1; 3)$.

Получен базис из линейно независимых собственных векторов r_1, r_2, r_3 , в котором матрица оператора примет диагональный вид.

Составим матрицу перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную к T :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в базисе из собственных векторов матрица оператора

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: в базисе $(1; 1; 1)$, $(1; 0; -3)$, $(0; 1; 3)$ матрица оператора

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.

Линейный оператор A задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора A^{-1} – оператора, обратного к A .

Указание

Собственные числа обратного оператора являются обратными к собственным числам данного оператора, а их собственные векторы одинаковы.

Решение

Характеристическое уравнение для A :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, (\lambda - 2)^2 = 1, \lambda - 2 = \pm 1, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$$

Собственные векторы: для $\lambda = 3$ $\mathbf{r}_1 = c(1; 1)$, для $\lambda = 1$ $\mathbf{r}_2 = c(1; -1)$.

Найдем матрицу обратного оператора:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \lambda - \frac{2}{3} = \pm \frac{1}{3}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Собственные векторы: для $\lambda = 1$ $\mathbf{r}_1 = c(1; -1)$, для $\lambda = 1/3$ $\mathbf{r}_2 = c(1; 1)$.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/3$, $\mathbf{r}_1 = c(1; -1)$, $\mathbf{r}_2 = c(1; 1)$.

Задача 7.

Составить матрицу квадратичной формы $3x^2 - 10xy + 8y^2$ и найти ее собственные числа.

Указание

Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ является симметрической ($a_{ij} = a_{ji}$) и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение

В нашей задаче $a_{11} = 3$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 8$. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, корнями которого являются собственные числа:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ -5 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 11\lambda - 1 = 0, \lambda = \frac{11 \pm 5\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$,

собственные числа $\lambda_1 = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$.

Задача 8.

Найти базис, в котором квадратичная форма $2x^2 + 4xy + 5y^2$ будет иметь канонический вид, и указать этот вид.

Указание

Канонический вид квадратичной формы:

- 1) во-первых, не содержит произведения xy ;
- 2) во-вторых, коэффициенты при x^2 и y^2 равны собственным числам матрицы квадратичной формы.

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, состоит из нормированных собственных векторов матрицы квадратичной формы.

Решение

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Собственные векторы:

для $\lambda_1 = 1$ координаты вектора $\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ определяются уравнением $x_1 + 2y_1 = 0$, $x_1 = -2y_1$. Если $y_1 = 1$, то $x_1 = -2$, и $\mathbf{r}_1 = c\{-2; 1\}$. Найдем значение c из условия, что вектор $\mathbf{r}_1$ нормирован, то есть его длина равна 1:

$$|\mathbf{r}_1| = c\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = c\sqrt{5} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mathbf{r}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Аналогично для $\lambda_2 = 6$: $\mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2\}$, $-4x_2 + 2y_2 = 0$, $\mathbf{r}_2 = c\{1; 2\}$.

$$|\mathbf{r}_2| = c\sqrt{1^2 + 2^2} = c\sqrt{5} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mathbf{r}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Итак, базис имеет вид:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

и в этом базисе квадратичная форма примет вид: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$, то есть $x^2 + 6y^2$.

Ответ: в базисе $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ квадратичная форма имеет канонический вид: $x^2 + 6y^2$.

Задача 9.

Указать преобразование координат, приводящее квадратичную форму $8x^2 - 12xy + 17y^2$ к каноническому виду.

Указание

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$ – нормированные собственные векторы.

Решение

Найдем базис из нормированных собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 8 - \lambda & -6 \\ -6 & 17 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 20.$$

$$\vec{r}_1: 3x_1 - 6y_1 = 0, \quad x_1 = 2y_1, \quad \vec{r}_1 = c\{2; 1\},$$

$$|\vec{r}_1| = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \vec{r}_1 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right\};$$

$$\vec{r}_2: -12x_2 - 6y_2 = 0, \quad |\vec{r}_2| = 1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты новых базисных векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы определяют коэффициенты уравнений, выражающих старые координаты через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} (x' - 2y') \end{cases}'$$

где x, y – координаты в старом базисе, а x', y' – в новом. Таким образом, найдено искомое преобразование.

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} (x' - 2y') \end{cases}.$$

Задача 10.

Привести к каноническому виду квадратичную форму $5x^2 - 12xy$.

Указание

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

где $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ – нормированные собственные векторы. В новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, причем коэффициенты при x^2 и y^2 совпадают с собственными числами матрицы квадратичной формы.

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ -6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0, \quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = -4.$$

$$\vec{r}_1: -4x_1 - 6y_1 = 0, \quad x_1 = -\frac{3}{2}y_1, \quad \vec{r}_1 = c\{3; -2\},$$

$$|\vec{r}_1| = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad \vec{r}_1 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right\};$$

$$\vec{r}_2: 9x_2 - 6y_2 = 0, \quad |\vec{r}_2| = 1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}} \right\}.$$

Матрица перехода к базису из собственных векторов:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

Преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y' = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') \\ y = -\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' = \frac{1}{\sqrt{13}}(3y' - 2x') \end{cases}.$$

Подставим найденные выражения в квадратичную форму:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 12y^2 &= \frac{5}{13}(3x' + 2y')^2 - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3y' - 2x') = \\ &= \frac{5}{13}(9x'^2 + 12x'y' + 4y'^2) - \frac{12}{13}(6y'^2 + 5x'y' - 6x'^2) = \\ &= \frac{1}{13}(117x'^2 - 52y'^2) = 9x'^2 - 4y'^2. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, причем коэффициенты при x'^2 и y'^2 совпадают с собственными числами матрицы квадратичной формы.

Ответ: $9x^2 - 4y^2$.

Задача 11.

Найти преобразование координат, приводящее квадратичную форму $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$ к каноническому виду.

Указание

Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования координат:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ – нормированные собственные векторы.

Решение.

Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для заданной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0, (\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

(Мы не останавливаемся подробно на способах решения уравнений высших порядков. В данном случае, например, один из корней был найден перебором делителей свободного члена, а затем левая часть разложена на множители.)

Найдем нормированные собственные векторы:

$$1) \quad \lambda_1 = -2, \mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\} : \begin{cases} 3x_1 - 3y_1 + z_1 = 0 \\ -3x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ x_1 - y_1 + 7z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

$$2) \quad \lambda_2 = 3, \quad \vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\} : \begin{cases} -2x_2 - 3y_2 + z_2 = 0 \\ -3x_2 - 2y_2 - z_2 = 0 \\ x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = -x_2 \\ z_2 = -x_2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$3) \quad \lambda_3 = 6, \quad \vec{r}_3 = \{x_3, y_3, z_3\} : \begin{cases} -5x_3 - 3y_3 + z_3 = 0 \\ -3x_3 - 5y_3 - z_3 = 0 \\ x_3 - y_3 - z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = -x_3 \\ z_3 = 2x_3 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Матрица перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

задает преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{3}} y' - \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{2}{\sqrt{6}} z' \end{cases}$$

Заметим, что в новых координатах квадратичная форма примет вид:

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2,$$

где коэффициенты являются собственными числами, стоящими в той же последовательности, что и соответствующие собственные векторы в матрице T .

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{3}} y' - \frac{1}{\sqrt{6}} z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} y' + \frac{2}{\sqrt{6}} z' \end{cases}$$

2.3.2. Кривые и поверхности 2-го порядка

Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.

Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается *эллипс*, при пересечении образующих обеих полостей – *гипербола*, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является *парабола*.

Замечание. Все кривые второго порядка задаются уравнениями второй степени от двух переменных.

Эллипс

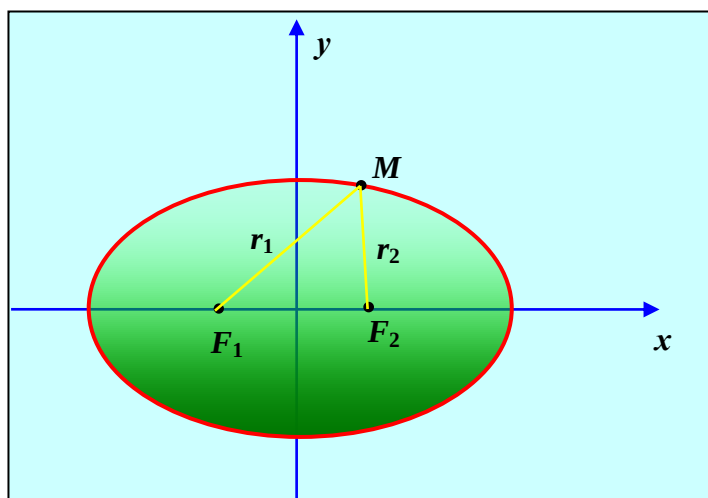


Рис. 1

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность.

Выведем уравнение эллипса, выбрав декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой F_1F_2 , начало координат – с серединой отрезка F_1F_2 . Пусть длина этого отрезка равна $2c$, тогда в выбранной системе координат

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, и сумма расстояний от нее до F_1 и F_2 равна $2a$. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, но

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

поэтому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$ и проведя несложные алгебраические преобразования, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Эксцентриситетом эллипса называется величина $e=c/a$. Директрисой D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i , называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Замечание. При ином выборе системы координат эллипс может задаваться не каноническим уравнением (1), а уравнением второй степени другого вида.

Свойства эллипса:

1) Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса). Если эллипс задан каноническим уравнением, то его главными осями являются оси координат, а центром – начало координат. Поскольку длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равны $2a$ и $2b$ ($2a > 2b$), то главная ось, проходящая через фокусы, называется большой осью эллипса, а вторая главная ось – малой осью.

2) Весь эллипс содержится внутри прямоугольника

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b.$$

3) Эксцентриситет эллипса $e < 1$. Действительно,

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \leq 1.$$

4) Директрисы эллипса расположены вне эллипса (так как расстояние от центра эллипса до директрисы равно a/e , а $e < 1$, следовательно, $a/e > a$, а весь эллипс лежит в прямоугольнике $|x| \leq a, |y| \leq b$)

5) Отношение расстояния r_i от точки эллипса до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство.

Расстояния от точки $M(x, y)$ до фокусов эллипса можно представить так:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Составим уравнения директрис:

$$-x - \frac{a}{e} = 0 (D_1), \quad x - \frac{a}{e} = 0 (D_2).$$

Тогда

$$d_1 = \frac{a + ex}{e}, \quad d_2 = \frac{a - ex}{e}.$$

Отсюда $r_i / d_i = e$, что и требовалось доказать.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

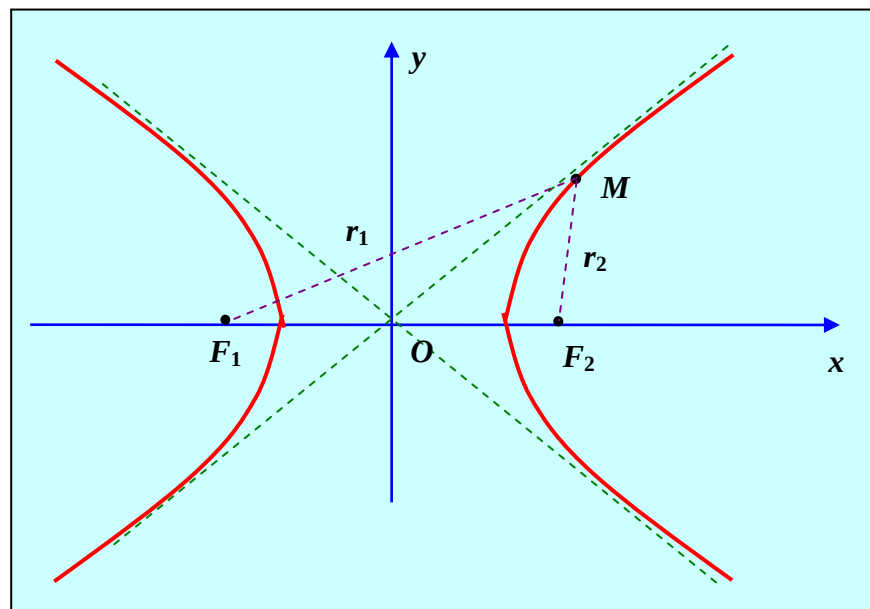


Рис. 2

Выведем каноническое уравнение гиперболы по аналогии с выводом уравнения эллипса, пользуясь теми же обозначениями.

$|r_1 - r_2| = 2a$, откуда

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Если обозначить $b^2 = c^2 - a^2$, откуда можно получить

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad (2)$$

каноническое уравнение гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина $e = c / a$. *Директрисой* D_i гиперболы, отвечающей фокусу F_i , называется прямая, расположенная в

одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Свойства гиперболы:

- 1) Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось Ox для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось Oy). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.
- 2) Ветви гиперболы имеют две асимптоты, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

- 3) Наряду с гиперболой (2) можно рассмотреть так называемую сопряженную гиперболу, определяемую каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

для которой меняются местами действительная и мнимая ось с сохранением тех же асимптот.

- 4) Эксцентриситет гиперболы $e > 1$.
- 5) Отношение расстояния r_i от точки гиперболы до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.

Доказательство можно провести так же, как и для эллипса.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой. Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая – ее *директрисой*.

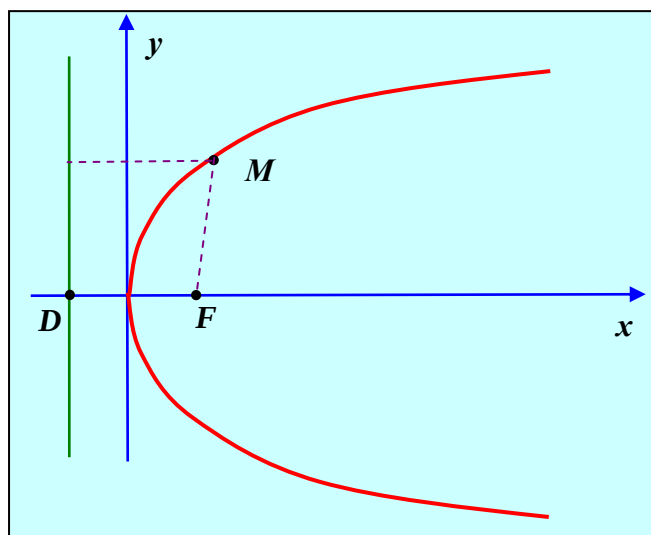


Рис. 3

Для вывода уравнения параболы выберем декартову систему координат так, чтобы ее началом была середина перпендикуляра FD , опущенного из фокуса на директрису, а координатные оси располагались параллельно и перпендикулярно директрисе. Пусть длина отрезка FD равна p . Тогда из равенства $r = d$ следует, что

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x,$$

поскольку

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \frac{p}{2} + x.$$

Алгебраическими преобразованиями это уравнение можно привести к виду:

$$y^2 = 2px, \quad (3)$$

называемому *каноническим уравнением параболы*. Величина p называется *параметром* параболы.

Свойства параболы:

- 1) Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Если парабола задана каноническим уравнением, то ее осью является ось Ox , а вершиной – начало координат.
- 2) Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости Oxy .
Замечание. Используя свойства директрис эллипса и гиперболы и определение параболы, можно доказать следующее утверждение:
Множество точек плоскости, для которых отношение e расстояния до некоторой фиксированной точки к расстоянию до некоторой прямой есть

величина постоянная, представляет собой эллипс (при $e < 1$), гиперболу (при $e > 1$) или параболу (при $e = 1$).

Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Линия, определяемая общим уравнением второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (4)$$

называется *алгебраической линией второго порядка*.

Для квадратичной формы $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ можно задать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы перейти к новой системе координат, в которой уравнение линии будет иметь канонический вид, необходимо провести два преобразования:

- 1) поворот координатных осей на такой угол, чтобы их направление совпало с направлением осей симметрии кривой (если она имеет две оси);
- 2) параллельный перенос, при котором начало координат совмещается с центром симметрии кривой (если он существует).

Замечание. Для параболы новые оси координат должны располагаться параллельно и перпендикулярно директрисе, а начало координат – совпасть с вершиной параболы.

Поскольку в канонических уравнениях кривых второго порядка отсутствуют произведения переменных, необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы A . В этом базисе уравнение (4) примет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + c' = 0$$

(в предположении, что $\lambda_{1,2}$ не равны 0).

Зададим последующий параллельный перенос формулами:

$$x'' = x' + \frac{b'_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{b'_2}{\lambda_2}.$$

Получим в новой координатной системе уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \tilde{c} \quad (5)$$

Рассмотрим возможные геометрические образы, определяемые этим уравнением в зависимости от знаков λ_1 , λ_2 и $\tilde{c}$:

- 1) если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 и $\tilde{c}$ одного знака, уравнение (5) представляет собой каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a = \sqrt{\frac{8}{\lambda_1}}, b = \sqrt{\frac{8}{\lambda_2}}$$

(случаи $\tilde{c} = 0$ и $\tilde{c}$, имеющего знак, противоположный знаку $\square_1$, $\square_2$, будут рассмотрены позднее).

- 2) если $\square_1$ и $\square_2$ имеют разные знаки, уравнение (5) является каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = -1,$$

в зависимости от знака $\tilde{c}$.

В случае, когда одно из собственных чисел матрицы A равно 0, уравнение (4) в результате двух преобразований координат можно привести к виду:

$$y''^2 = 2bx'',$$

являющимся каноническим уравнением параболы.

Пример 1.

Приведем к каноническому виду уравнение второго порядка

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Матрица квадратичной формы $3x^2 + 10xy + 3y^2$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0, \lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2.$$

Для координат собственного вектора e_1 , соответствующего $\square_1$, получим с учетом нормировки:

$$\begin{cases} -5x_1 + 5y_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Аналогично найдем e_2 :

$$\begin{cases} 5x_2 + 5y_2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 = 1 \end{cases}, \quad e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты собственных векторов:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим его вид в новой системе координат:

$$8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0.$$

Заметим, что коэффициентами при x^2 и y^2 являются $\square_1$ и $\square_2$.

Преобразуем полученное уравнение:

$$8(x'^2 - \sqrt{2}x' + \frac{1}{2}) - 2(y'^2 + 3\sqrt{2}y' + \frac{9}{2}) - 8 = 0,$$

$$8(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2(y' + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 8.$$

Зададим параллельный перенос формулами:

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Получим уравнение:

$$8x''^2 - 2y''^2 = 8,$$

а после деления на 8:

$$x''^2 - \frac{y''^2}{4} = 1 \quad -$$

каноническое уравнение гиперболы.

Классификация кривых второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второго порядка (4):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

и выясним, какие геометрические образы на плоскости могут задаваться этим уравнением.

1. Если собственные числа матрицы A $\square_1$ и $\square_2$ одного знака, уравнение (4) называется уравнением *эллиптического типа*. Его можно привести к виду (5):

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \frac{8}{\tilde{c}}$$

которое, в свою очередь, преобразуется в следующую форму:

- а) если $\frac{8}{\tilde{c}}$ имеет тот же знак, что и $\square_{1,2}$, при делении на $\tilde{c}$ получаем

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad -$$

каноническое уравнение *эллипса*.

- б) если $\frac{8}{\tilde{c}} = 0$, уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$$

имеет единственное решение:

$$x'' = y'' = 0,$$

определяющее *точку на плоскости*.

в) если знак Δ противоположен знаку $\Delta_{1,2}$, уравнение после деления на $\tilde{c}$ примет вид:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1.$$

Множество его решений пусто (иногда это пустое множество называют *мнимым эллипсом*).

2. Если собственные числа матрицы A Δ_1 и Δ_2 разных знаков, уравнение (4) называется уравнением *гиперболического типа*.

а) при $\tilde{c} \neq 0$ оно сводится к одному из двух видов:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = -1,$$

в зависимости от знака Δ . Оба этих уравнения определяют *гиперболу*.

б) При $\tilde{c} = 0$ получаем уравнение

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0,$$

эквивалентное двум линейным уравнениям:

$$\frac{x''}{a} = \frac{y''}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x''}{a} = -\frac{y''}{b},$$

задающим *пару пересекающихся прямых*.

3. Если одно из собственных чисел равно 0, уравнение (4) называется уравнением *параболического типа*, и его можно привести к одному из следующих видов:

а) к уравнению

$$y''^2 = 2bx'',$$

определяющему *параболу*;

б) к уравнению

$$y''^2 = 2b^2, \quad \text{или} \quad y'' = \pm b\sqrt{2},$$

задающему *пару параллельных прямых*;

в) к уравнению

$$y''^2 = 0,$$

определяющему *одну прямую* (или *пару совпадающих прямых*);

г) к уравнению

$$y''^2 = -2b^2,$$

не имеющему решений и, следовательно, не определяющему никакого геометрического образа.

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \quad (6)$$

– уравнению второй степени от трех неизвестных, называемому *общим уравнением поверхности второго порядка*.

Если найти собственные числа и нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

и перейти к системе координат, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов, уравнение (6) можно привести к одному из следующих видов:

1. Если $\square_1, \square_2, \square_3$ – одного знака, уравнение (6) есть уравнение эллиптического типа и приводится к канонической форме:

$$a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \quad (7)$$

каноническое уравнение *эллипсоида*.

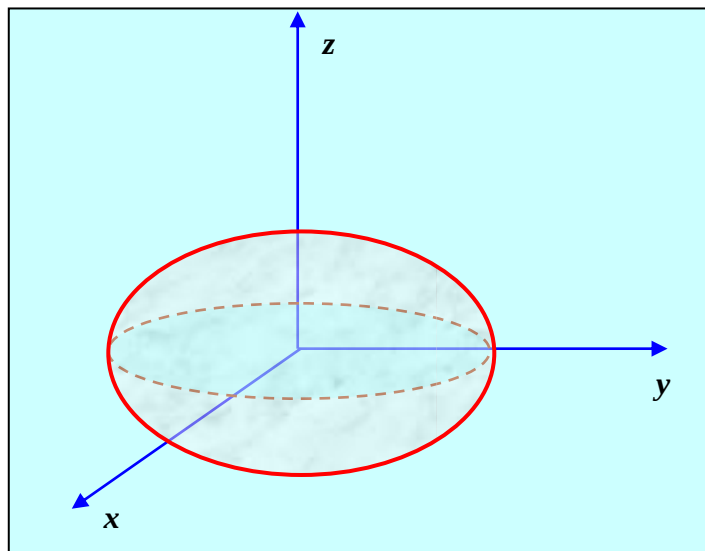


Рис. 4

Замечание. Если два собственных числа совпадают, эллипсоид называется эллипсоидом вращения и представляет собой поверхность, полученную в результате вращения эллипса вокруг одной из его осей. Если все собственные числа равны, уравнение (7) становится уравнением сферы.

$$б) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad -$$

уравнение задает *точку в пространстве*;

$$в) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad -$$

пустое множество.

2. Если собственные числа разных знаков, уравнение (12.6) приводится к каноническому виду:

$$а) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \quad (8)$$

каноническое уравнение *однополостного гиперболоида*,

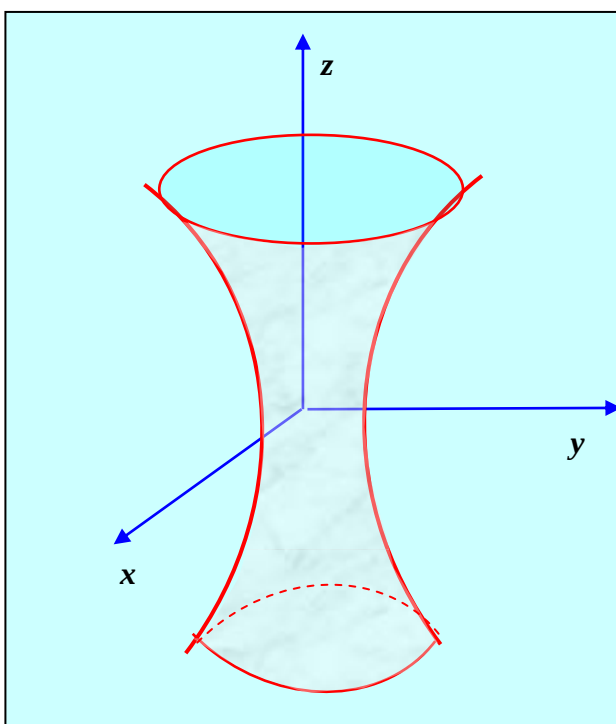


Рис. 5

$$б) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad - \quad (9)$$

каноническое уравнение *двуполостного гиперболоида*,

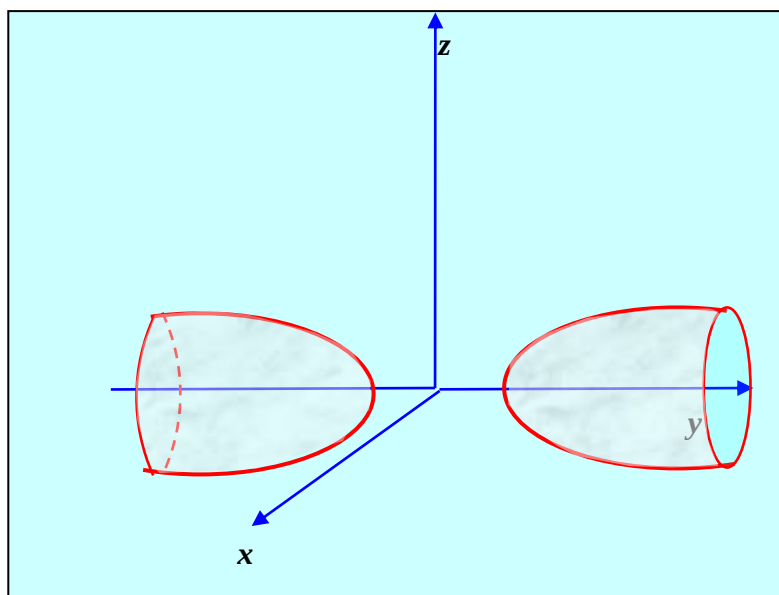


Рис. 6

$$\theta) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad - \quad (10)$$

уравнение конуса второго порядка.

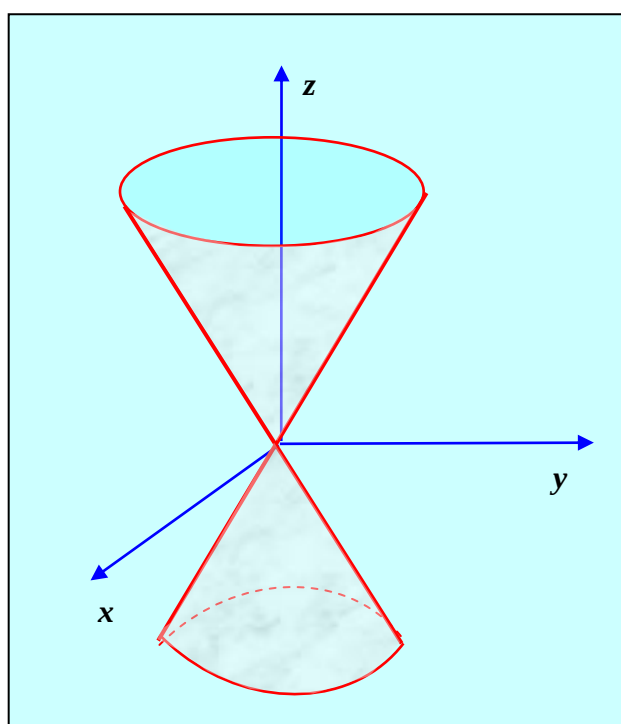


Рис. 7

3. Одно из собственных чисел равно 0. При этом с помощью преобразований координат можно получить следующие формы уравнения (6):

$$a) \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad - \quad (11)$$

каноническое уравнение *эллиптического параболоида*,

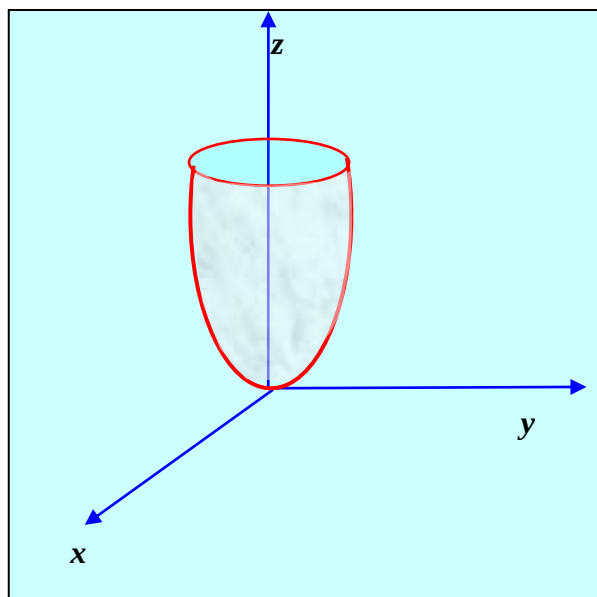


Рис. 8

$$\text{б) } z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad - \quad (12)$$

каноническое уравнение *гиперболического параболоида*

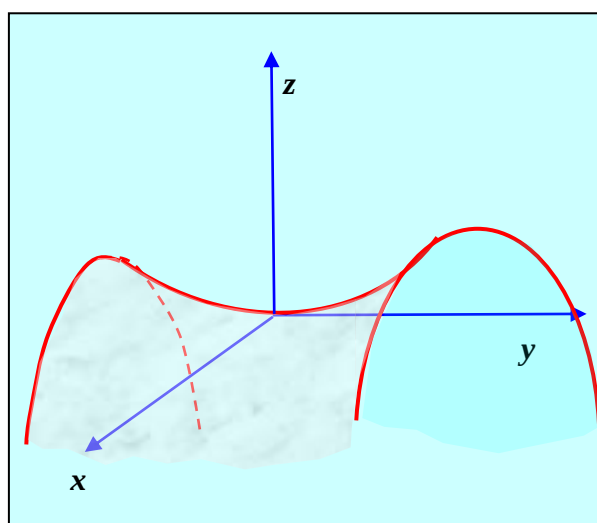


Рис. 9

и уравнения цилиндрических поверхностей:

$$\text{в) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad (13)$$

эллиптический цилиндр,

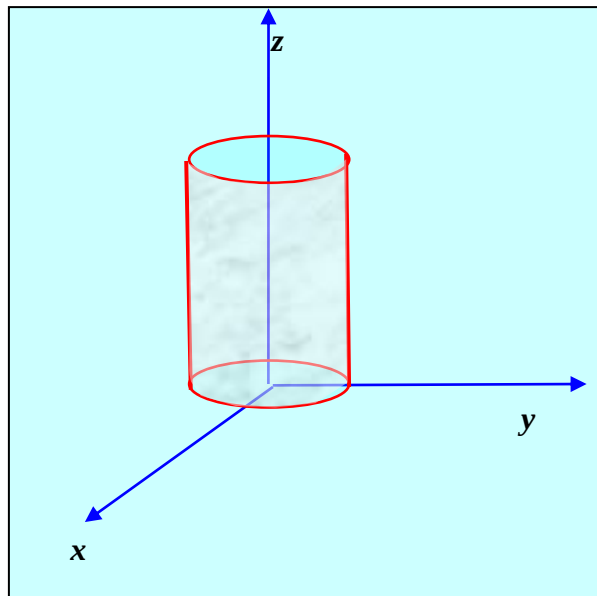


Рис. 10

$$е) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad (14)$$

гиперболический цилиндр.

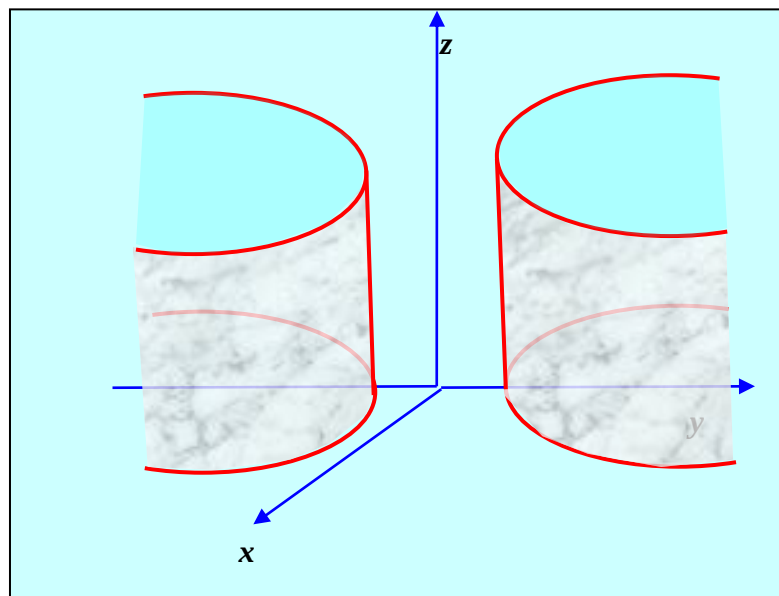


Рис 11

Наконец, уравнение может определять **пару плоскостей**:

$$д) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (15)$$

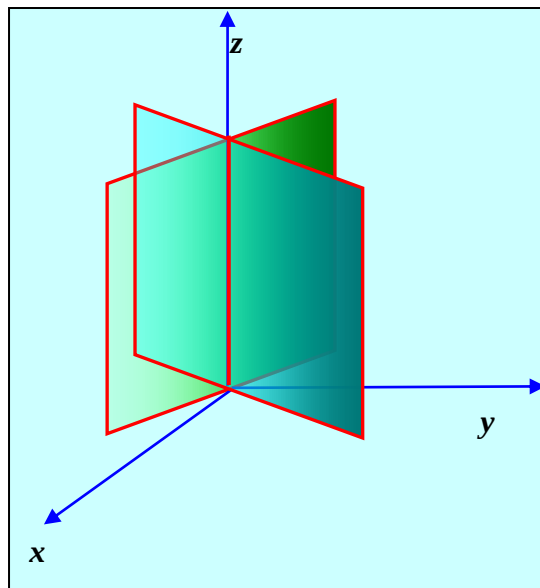


Рис. 12

4. Если два собственных числа равны 0, уравнение (6) приводится к одному из следующих видов:

$$a) \quad a_{33}z^2 + 2qy = 0 \quad - \quad (16)$$

параболический цилиндр,

$$б) \quad a_{33}z^2 - r^2 = 0 \quad - \quad (17)$$

пара параллельных плоскостей,

$$в) \quad a_{33}z^2 + r^2 = 0 \quad -$$

пустое множество.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «Кривые 2-го порядка»

Задача 1.

Определить тип уравнения кривой 2-го порядка:

$$2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0.$$

Указание

Если $\square_1 \cdot \square_2 > 0$, то уравнение эллиптического типа;
если $\square_1 \cdot \square_2 < 0$, то уравнение гиперболического типа;
если $\square_1 \cdot \square_2 = 0$, то уравнение параболического типа.

Решение

Ответ на вопрос задачи зависит от знаков собственных чисел матрицы квадратичной формы их старших членов левой части уравнения:

Матрица квадратичной формы $2x^2 + 10xy + 12y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 14\lambda - 1 = 0.$$

По теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 < 0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

Ответ: уравнение гиперболического типа.

Задача 2.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

Указание

В уравнении отсутствует произведение $xу$, следовательно, квадратичная форма его старших членов имеет канонический вид; поэтому коэффициенты при x^2 и y^2 являются собственными числами матрицы квадратичной формы. Итак, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, следовательно, перед нами уравнение эллиптического типа.

Решение

В уравнении отсутствует произведение $xу$, следовательно, квадратичная форма его старших членов имеет канонический вид; поэтому коэффициенты при x^2 и y^2 являются собственными числами матрицы квадратичной формы. Итак, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, следовательно, перед нами уравнение эллиптического типа.

Геометрические образы, определяемые уравнением эллиптического типа:

- эллипс;
- точка;
- пустое множество («мнимый эллипс»).

Для приведения уравнения к каноническому виду нужно исключить из него слагаемые. Содержащие первые степени переменных. Для этого преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} (4x^2 - 40x) + (9y^2 + 36y) + 100 &= 0, \\ 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) + 100 &= 0, \\ 4(x^2 - 10x + 25) - 100 + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 100 &= 0, \\ 4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 &= 36. \end{aligned}$$

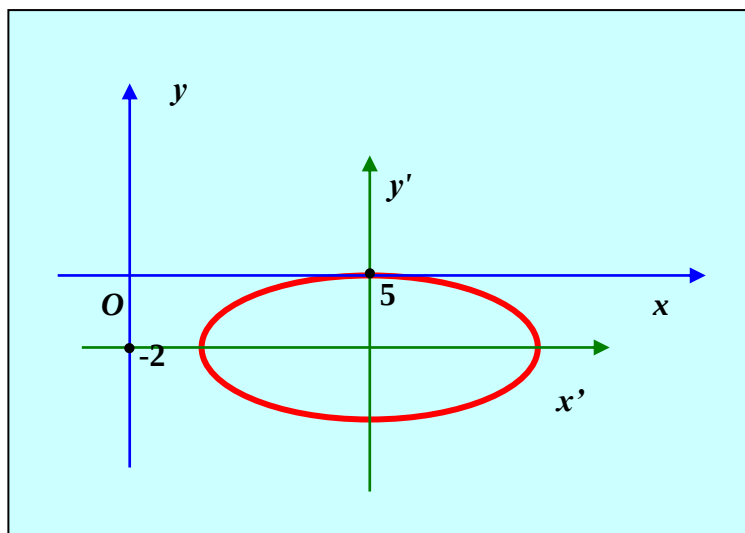


Рис. 13

Зададим параллельный перенос осей координат:

$$\begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Тогда в новых координатах уравнение примет вид:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \Rightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1 -$$

каноническое уравнение эллипса.

Ответ: уравнение эллипса, канонический вид $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$.

Задача 3.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

Указание

Собственные числа имеют разные знаки, значит, тип уравнения – гиперболический.

Геометрические образы, определяемые уравнением гиперболического типа:

- гипербола;
- пара пересекающихся прямых.

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 32 - \lambda & 26 \\ 26 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0, \quad \lambda_1 = -20, \quad \lambda_2 = 45.$$

Собственные числа имеют разные знаки, значит, тип уравнения – гиперболический.

Геометрические образы, определяемые уравнением гиперболического типа:

- гипербола;
- пара пересекающихся прямых.

Заметим, что для данного уравнения нет необходимости искать явный вид преобразования координат, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Это связано с тем, что уравнение не содержит линейных членов, а его свободный член не изменится при преобразовании вида

$$\begin{cases} x = a_1x' + b_1y' \\ y = a_2y' + b_2x' \end{cases}$$

Найденные собственные числа будут коэффициентами при x'^2 и y'^2 для канонического вида квадратичной формы. Следовательно, в соответствующей координатной системе уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} -20x'^2 + 45y'^2 + 180 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 20x'^2 - 45y'^2 &= 180 \Rightarrow \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1 - \end{aligned}$$

каноническое уравнение гиперболы.

Ответ: уравнение гиперболического типа, канонический вид

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Задача 4.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0.$$

Указание

Перед нами полное уравнение 2-го порядка, и для приведения его к каноническому виду потребуется провести оба преобразования координатных осей: поворот на такой угол, чтобы новые оси стали параллельными собственным векторам матрицы квадратичной формы (это преобразование квадратичной формы к каноническому виду), и параллельный перенос.

Решение

Перед нами полное уравнение 2-го порядка, и для приведения его к каноническому виду потребуется провести оба преобразования

координатных осей: поворот на такой угол, чтобы новые оси стали параллельными собственным векторам матрицы квадратичной формы (это преобразование квадратичной формы к каноническому виду), и параллельный перенос.

1) Поворот:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 30 \\ 30 & 32 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 30 \\ 30 & 32 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 39\lambda - 676 = 0, \quad \lambda_1 = 52, \quad \lambda_2 = -13.$$

Итак, тип уравнения – гиперболический.

Собственные векторы:

$$\vec{r}_1 = \{x_1; y_1\}, \quad -45x_1 + 30y_1 = 0, \quad y_1 = \frac{3}{2}x_1,$$

$$\vec{r}_1 = c\{2; 3\}, \quad |\vec{r}_1| = 1 \Rightarrow \vec{r}_1 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}} \right\}.$$

$$\vec{r}_2 = \{x_2; y_2\}, \quad 20x_2 + 30y_2 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{2}y_2,$$

$$\vec{r}_2 = c\{-3; 2\}, \quad |\vec{r}_2| = 1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}.$$

Матрица перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix},$$

преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') \end{cases}.$$

Собственные векторы следует выбирать так, чтобы определитель матрицы перехода равнялся +1 – при этом не нарушается взаимное расположение координатных осей.

Запишем исходное уравнение в новых координатах:

$$\begin{aligned} & \frac{7}{13}(4x'^2 - 12x'y' + 9y'^2) + \frac{60}{13}(2x' - 3y')(3x' + 2y') + \\ & + \frac{32}{13}(9x'^2 + 12x'y' + 4y'^2) - \frac{14}{\sqrt{13}}(2x' - 3y') - \frac{60}{\sqrt{13}}(3x' + 2y') + 7 = 0, \\ & 52x'^2 - 13y'^2 - 16\sqrt{13}x - 6\sqrt{13}y + 7 = 0, \\ & 52\left(x'^2 - \frac{4}{\sqrt{13}}x' + \frac{4}{13}\right) - 16 - 13\left(y'^2 + \frac{6}{\sqrt{13}}y + \frac{9}{13}\right) + 9 + 7 = 0, \\ & 52\left(x' - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - 13\left(y' + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

2) Параллельный перенос:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{\sqrt{13}} \\ y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

В новых координатах получаем уравнение

$$52x''^2 - 13y''^2 = 0, \quad y''^2 = 4x''^2, \quad y'' = \pm 2x'' \quad -$$

пара пересекающихся прямых.

Ответ: уравнение гиперболического типа, определяет пару пересекающихся прямых, канонический вид: $y'' = \pm 2x''$.

Задача 5.

Не проводя преобразования координат, установить, что уравнение

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$$

определяет прямую, и найти уравнение этой прямой.

Указание

Обратите внимание на то, что квадратичная форма, образованная старшими членами уравнения, является полным квадратом.

Решение

Иногда привести уравнение к простому виду удастся с помощью алгебраических приемов. Представим левую часть уравнения в виде:

$$(x - 3y)^2 + 4(x - 3y) + 4 = 0, \quad ((x - 3y) + 2)^2 = 0, \quad x - 3y + 2 = 0.$$

Ответ: уравнение определяет прямую $x - 3y + 2 = 0$.

Задача 6.

Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки

$$M = \{2\sqrt{3}, \sqrt{6}\} \quad \text{и} \quad A = \{6, 0\}.$$

Найти его эксцентриситет.

Указание

По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид, а во-вторых, полуось a равна абсциссе точки A .

Решение

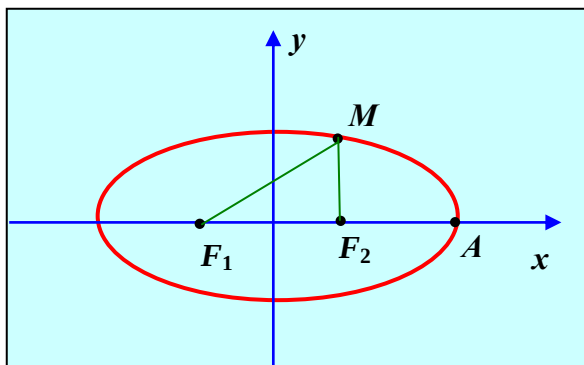


Рис. 14

По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а во-вторых, полуось a равна абсциссе точки A , т.е. $a = 6$. Найдем b , подставив в уравнение эллипса координаты точки M :

$$\frac{12}{36} + \frac{6}{b^2} = 1, \quad \frac{6}{b^2} = \frac{2}{3}, \quad b^2 = 9, \quad b = 3.$$

Итак, уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Тогда расстояние от фокуса до начала координат

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Вычислим эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 7.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на прямой $y + 6 = 0$,

эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а точка $M(3; -1)$ является концом малой полуоси.

Указание

Найдите расстояние от точки M до прямой $y + 6 = 0$, т.е. длину малой полуоси эллипса. Центром симметрии эллипса будет точка O пересечения прямых F_1F_2 ($y + 6 = 0$) и MO , проходящей через точку M перпендикулярно F_1F_2 .

Решение

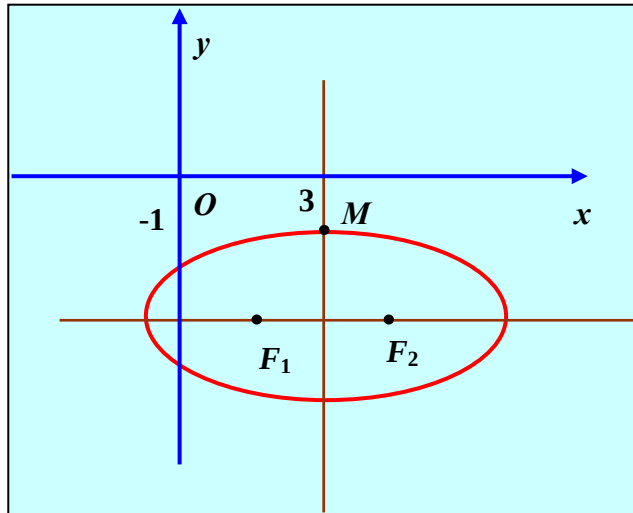


Рис. 15

Найдем расстояние от точки M до прямой $y + 6 = 0$, т.е. длину малой полуоси эллипса. Нормальный вид уравнения данной прямой: $-y - 6 = 0$, тогда

$$d_M = | -(-1) - 6 | = | 1 - 6 | = 5.$$

Центром симметрии эллипса будет точка O пересечения прямых F_1F_2 ($y + 6 = 0$) и MO , проходящей через точку M перпендикулярно F_1F_2 .

Поскольку прямая F_1F_2 параллельна оси абсцисс, прямая MO параллельна оси ординат; следовательно, ее уравнение: $x = 3$. Тогда координаты точки O : $O(3; -6)$.

С учетом расположения осей эллипса можно утверждать, что в системе координат, полученной параллельным переносом начала координат в точку $O(3; -6)$, то есть заданной преобразованием

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 6 \end{cases}$$

уравнение эллипса имеет канонический вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Найдем a из условия, что

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - 25}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{a^2 - 25}{a^2} = \frac{1}{2}, \quad a^2 = 50. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения a и b в уравнение эллипса:

$$\begin{aligned}\frac{x'^2}{50} + \frac{y'^2}{25} &= 1 \Rightarrow x'^2 + 2y'^2 = 50 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-3)^2 + 2(y+6)^2 = 50 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 2y^2 + 24y + 72 - 50 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0.\end{aligned}$$

Ответ: уравнение эллипса: $x^2 + 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0$.

Задача 8.

Дана гипербола

$$16x^2 - 9y^2 = 144.$$

Составить уравнения директрис гиперболы.

Указание

Приведите уравнение гиперболы к каноническому виду и составьте уравнения директрис в виде

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Решение

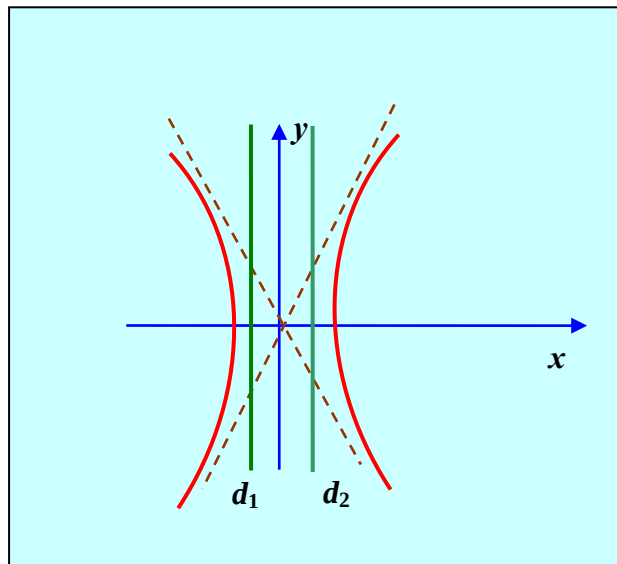


Рис. 16

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Осями симметрии являются координатные оси, $a = 3$, $b = 4$. Тогда

$$F_1O = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}.$$

Уравнения директрис:

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm 3 : \frac{5}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{9}{5}.$$

Ответ: уравнения директрис: $x = \pm \frac{9}{5}$.

Задача 9.

Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Указание

Найдите вначале координаты вершин и фокусов эллипса, а затем определите коэффициенты a и b в каноническом уравнении гиперболы.

Решение

Координаты вершин гиперболы: $(a; 0)$ и $(-a; 0)$, координаты фокусов: $(c; 0)$ и $(-c; 0)$. Соответственно координаты вершин эллипса: $(a_1; 0)$ и $(-a_1; 0)$, координаты фокусов: $(c_1; 0)$ и $(-c_1; 0)$. У данного эллипса $a_1 = 5$,

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогда для гиперболы $a = 4$, $c = 5$, откуда

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3,,$$

и уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 10.

Составить уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

в ее точке $M = \{15; 4\sqrt{6}\}$.

Указание

Найдите вначале координаты нормали к гиперболе в точке M (если кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$, то нормаль к ней в точке $M_0 = \{x_0; y_0\}$ имеет координаты: $\mathbf{n} = (F'_x(x_0; y_0); F'_y(x_0; y_0))$), а затем составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M = \{15; 4\sqrt{6}\}$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$.

Решение

Найдем координаты нормали к гиперболе в точке M .

Если кривая задана уравнением $F(x,y) = 0$, то нормаль к ней в точке $M_0 = \{x_0; y_0\}$ имеет координаты: $\mathbf{n} = (F'_x(x_0; y_0); F'_y(x_0; y_0))$.

$$F'_x = \frac{2x}{9}, \quad F'_y = -\frac{2y}{4} = -\frac{y}{2}, \quad F'_x(15; 4\sqrt{6}) = \frac{2 \cdot 15}{9} = \frac{10}{3},$$
$$F'_y(15; 4\sqrt{6}) = -\frac{4\sqrt{6}}{2} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \mathbf{n} = \left\{ \frac{10}{3}; -2\sqrt{6} \right\}.$$

*Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$, имеет вид:
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.*

Запишем уравнение касательной:

$$\frac{10}{3}(x - 15) - 2\sqrt{6}(y - 4\sqrt{6}) = 0,$$
$$\frac{10}{3}x - 50 - 2\sqrt{6}y + 48 = 0, \quad 5x - 3\sqrt{6}y - 3 = 0.$$

Ответ: Уравнение касательной:

$$5x - 3\sqrt{6}y - 3 = 0.$$

Задача 11.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

Указание

Используйте определение параболы: параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Решение

Используем определение параболы:

***Параболой** называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.*

Пусть точка $M(x, y)$ лежит на параболе. Тогда ее расстояние до фокуса

$$MF = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}.$$

Выразим через x и y расстояние от точки M до директрисы.
Нормальное уравнение директрисы:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \quad d_M = \left| \frac{x - y - 1}{\sqrt{2}} \right|.$$

Из определения параболы $d_M = MF$,

$$\left| \frac{x - y - 1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2};$$

$$\frac{(x - y - 1)^2}{2} = (x - 2)^2 + (y + 1)^2,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0.$$

Ответ: уравнение параболы: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

Задача 12.

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $A = \{9; 6\}$. Найти координаты ее фокуса.

Указание

Из условий задачи следует, что данная парабола задается каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Подставьте в это уравнение координаты точки A и найдите значение параметра p параболы.

Решение

Из условий задачи следует, что данная парабола задается каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Подставим в это уравнение координаты точки A : $36 = 2p \cdot 9$, откуда $p = 2$.

Следовательно, уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 4x$.

Координаты фокуса параболы задаются формулой: $F = \{0,5p; 0\}$, то есть $F = \{1; 0\}$.

Ответ: уравнение параболы: $y^2 = 4x$; фокус $F = \{1; 0\}$.

ГЛОССАРИЙ

базисный минор – ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы
вектор – направленный отрезок

векторное произведение векторов – вектор, перпендикулярный обоим сомножителям, образующий с ними правую тройку, модуль которого равен произведению модулей сомножителей на синус угла между ними

гипербола – множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до некоторых двух фиксированных точек есть величина постоянная

канонические уравнения прямой – уравнения, использующие координаты направляющего вектора прямой

канонический вид квадратичной формы – квадратичная форма, не содержащая произведения переменных

квадратичная форма действительных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ – многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени

коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой

компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости

кривые второго порядка – линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину (эллипс, гипербола, парабола)

линейная комбинация – результат применения линейных операций

линейное уравнение – уравнение, в которое неизвестные входят в виде линейной комбинации

линейные операции – сложение и умножение на число

матрица – прямоугольная таблица из чисел

минор матрицы – определитель, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении любых ее k строк и k столбцов

направляющий вектор прямой – вектор, параллельный прямой

нормальное уравнение прямой (плоскости) – уравнение, коэффициенты которого вычисляются с помощью характеристик перпендикуляра, проведенного к прямой (плоскости) из начала координат

нормальный вектор прямой (плоскости) – вектор, перпендикулярный прямой (плоскости)

определенная система уравнений – система, имеющая единственное решение

определитель – число, поставленное в соответствие квадратной матрице

отклонение точки от прямой (плоскости) – расстояние от точки до прямой (плоскости), если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой (плоскости), или величина, противоположная по знаку, в противном случае

парабола – множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой

ранг матрицы – наибольший порядок ее ненулевого минора

симметрическая матрица – матрица, у которой равны элементы, симметричные относительно главной диагонали

скалярное произведение векторов – произведение модулей векторов, умноженное на косинус угла между ними

скалярный квадрат вектора – скалярное произведение вектора на себя

смешанное произведение трех векторов – скалярное произведение одного вектора на векторное произведение двух других

собственное число матрицы – число, для которого результат умножения матрицы на некоторый вектор равен его произведению на это число

собственный вектор матрицы – вектор, для которого умножение на матрицу равносильно умножению на число

совместная система уравнений – система, имеющая хотя бы одно решение

эллипс – множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до некоторых двух фиксированных точек есть величина постоянная

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A = \ a_{ij}\ $	Матрица A
$\sum_{j=1}^n a_j$	Сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$ A $	Определитель квадратной матрицы
A^T	Транспонированная матрица
A^{-1}	Обратная матрица
E	Единичная матрица
$\text{rg } A$	Ранг матрицы
$\underline{a}, \underline{AB}$	Вектор
$\underline{a} \parallel \underline{b}$	Коллинеарные векторы
$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$	Базис декартовой системы координат
$\underline{a} = (x_1, y_1, z_1)$	Координаты вектора
$A = \{x_1, y_1, z_1\}$	Координаты точки
$\text{пр}_l \underline{AB}$	Проекция вектора на ось
$\underline{e}_a$	Орт вектора $\underline{a}$
$ \underline{a} $	Модуль вектора
$\underline{ab}$	Скалярное произведение векторов
$[\underline{a}, \underline{b}]$	Векторное произведение векторов
$\underline{abc}$	Смешанное произведение векторов
$\perp$	Знак перпендикулярности
$\in$	знак принадлежности
$\Rightarrow$	знак следования
$\Leftrightarrow$	знак равносильности
$\cup$	знак объединения

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра – М.: Наука, 1999.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия – М.: Наука, 1999.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах – М.: Физматлит, 2001.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре – М.: Наука, 1984.
5. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре – М.: Наука, 1968.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 – М.: Высшая школа, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические указания.....	3
1. Линейная алгебра.....	4
1.1. Матрицы.....	4
1.1.1. Матрицы. Операции над матрицами.....	4
1.1.2. Определители матриц.....	18
1.1.3. Определитель произведения матриц. Обратная матрица.....	37
1.2. Системы линейных алгебраических уравнений.....	48
1.2.1. Системы с квадратной матрицей. Решение с помощью обратной матрицы. Правило Крамера.....	48
1.2.2. Ранг матрицы.....	57
1.2.3. Решение систем линейных уравнений в общем случае. Теорема Кронекера-Капелли.....	68
2. Аналитическая геометрия.....	87
2.1. Векторная алгебра.....	87
2.1.1. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение.....	87
2.1.2. Векторное и смешанное произведения.....	107
2.2. Прямые и плоскости.....	118
2.2.1. Уравнение прямой на плоскости.....	118
2.2.2. Уравнения плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве.....	138
2.3. Линейные операторы и кривые 2-го порядка.....	154
2.3.1. Линейные операторы и квадратичные формы.....	154
2.3.2. Кривые и поверхности 2-го порядка.....	174
Глоссарий.....	200
Обозначения.....	202
Литература.....	203