Министерство образования и науки
Российской Федерации
«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра высшей математики

MATHCAD В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания к практическим занятиям по теме:
“ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ”.

Составитель: Агарева О.Ю.

Москва 2012

УДК 517.2
ББК

Агарева О. Ю.
MATHCAD В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Методические указания к практическим занятиям по теме:
«ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ».
МАТИ.: Кафедра «высшей математики» 2012. – 26с.

Данные методические указания к практическим занятиям по теме «интегрирование функций одной переменной» имеют цель ознакомить студентов и преподавателей с математическим пакетом **Mathcad**. В них показано, как аналитически и с помощью пакета **Mathcad** вычисляются неопределенные, определенные и несобственные интегралы.

ВВЕДЕНИЕ

Цель данных методических указаний – познакомить студентов и преподавателей с математическим пакетом **Mathcad**, научить, как с помощью этого пакета и аналитически вычислять неопределенные, определенные и несобственные интегралы.

Mathcad – современный программный продукт, который может оказать существенную помощь студентам, инженерам и всем тем, кто выполняет какие-либо расчёты. Основное достоинство этой системы заключается в отсутствии необходимости пользователю осваивать основы программирования, так как **Mathcad** предельно приближен к обычному математическому языку. Поэтому на решение поставленных задач затрачивается незначительное время.

Система Mathcad содержит текстовый редактор, мощный вычислитель и очень простой в применении графический процессор. Это позволяет готовить документы, по виду напоминающие статьи или разделы из книг.

Современные версии Mathcad дают пользователям возможность производить символьные расчёты. В этом случае результатом вычисления выражения является другое выражение. При этом желаемая форма этого второго выражения может быть задана.

I. ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATHCAD

1. Интегрирование

Интегрирование – одна из самых простых, с вычислительной точки зрения, операции, реализованные в Mathcad в виде операторов.

Интегрирование, как и множество других математических действий, устроено в Mathcad по принципу «как пишется, так и вводится». Чтобы вычислить определенный интеграл, следует напечатать его обычную математическую форму в документе. Делается это с помощью панели Calculus (исчисления) нажатием кнопки со значком интеграла. Появится символ интеграла с несколькими местозаполнителями, в которые нужно ввести нижний и верхний интервалы интегрирования (для определенного интеграла), подынтегральную функцию и переменную интегрирования.

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare \qquad\qquad \int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$$

Можно вычислять интегралы с одним или обоими бесконечными пределами. Для этого на месте соответствующего предела введите символ бесконечности, воспользовавшись, например, той же самой панелью Calculus (Вычисления). Чтобы ввести -∞ (минус бесконечность), добавьте знак минус к символу бесконечности, как к обычному числу.

Чтобы получить результат интегрирования, следует ввести знак равенства (=) или символьного равенства (→). В первом случае интегрирование будет проведено численным методом, во втором – в случае успеха, будет найдено точное значение интеграла с помощью символьного процессора Mathcad.

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = 2$$

$$\int \sin(x)\, dx \rightarrow -\cos(x)$$

2. Об алгоритмах интегрирования

Результат численного интегрирования – это не точное, а приближенное значение интеграла, определенное с погрешностью, которая зависит от встроенной константы TOL. Чем она меньше, тем с лучшей точностью будет найден интеграл, но и тем больше времени будет затрачено на расчеты. По умолчанию TOL=0.001. Для того чтобы ускорить вычисления, можно установить меньшее значение TOL.

Кроме нее, пользователь имеет возможность выбирать сам алгоритм численного интегрирования.

Для этого:

1. Щелкните правой кнопкой мыши в любом месте на левой части вычисляемого интеграла.
2. В появившемся контекстном меню выберите один из четырех численных алгоритмов.

Обратите внимание, что перед тем как один из алгоритмов выбран впервые, флажок проверки в контекстном меню установлен возле пункта AutoSelect (Автоматический выбор). Это означает, что алгоритм определяется MathCAD, исходя из анализа пределов интегрирования и особенностей подынтегральной функции. Как только один из алгоритмов выбран, этот флажок сбрасывается, а избранный алгоритм отмечается точкой.

Разработчиками MathCAD запрограммированы четыре численных методаинтегрирования:

- Romberg (Ромберга) – для большинства функций, не содержащих особенностей;
- Adaptive (Адаптивный) – для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования;
- Infinite Limit (Бесконечный предел) – для интегралов с бесконечными пределами;
- Singular Endpoint – для интегралов с сингулярностью на конце. Модифицированный алгоритм Ромберга для функций, не определенных на одном или обоих концах интервала интегрирования.

Старайтесь все-таки оставить выбор численного метода за MathCad, установив флажок AutoSelect (Автоматический выбор) в контекстном меню. Попробовать другой метод можно, например, чтобы сравнить результаты расчетов в специфических случаях, когда у вас закрадываются сомнения в их правильности.

Если подынтегральная функция «хорошая», т. е. не меняется на интервале интегрирования слишком быстро и не обращается на нем в бесконечность, то численное решение интеграла не принесет никаких неприятных сюрпризов.

3. О расходящихся интегралах

Если интеграл расходится (равен бесконечности), то вычислительный процессор Mathcad может выдать сообщение об ошибке, выделив, при этом, оператор интегрирования красным цветом. Чаще всего ошибка будет иметь тип «Found a number with a magnitude greater than $10^{Л}307$» (Найдено число, превышающее значение 10^{307}) или «Can't converge to a solution» (Не сходится к решению). Тем не менее, символьный процессор справляется с интегралом, совершенно правильно находя его бесконечное значение.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \to \propto$$

II. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНОЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ТАБЛИЦА ОСНОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Основные определения

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных $F(x)+C$.

Определение 2. **Неопределенным интегралом** от функции называется совокупность всех ее первообразных $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Определение 3. Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

2. Правила интегрирования

1). $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2). $\int f'(x)dx = f(x) + C$

3). $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a \neq 0$

4). $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

3. Таблица основных интегралов

$$1).\ \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$$

$$2).\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3).\quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$4).\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$5).\ \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6).\ \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7).\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$8).\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$9).\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$10).\ \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$11).\ \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, a \neq 0$$

$$12).\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, |x| > |a| > 0$$

$$13).\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, a \neq 0$$

$$14).\ \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$15).\ \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$16).\ \int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$

$$17).\ \int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$

$$18).\ \int shxdx = chx + C$$

$$19).\ \int chxdx = shx + C$$

$$20).\ \int \frac{dx}{ch^2 x} = tgx + C$$

$$21).\ \int \frac{dx}{sh\ x} = -cthx + C$$

Пример

Найти интеграл, ипользуя таблицу и правила интегрирования.

$$\int \left(2x - 5\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = x^2 + 5\cos x + 3\arcsin\frac{x}{2} + C\ .$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \left(2x - 5\sin(x) + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx \rightarrow 3\cdot\mathrm{asin}\left(\frac{x}{2}\right) + 5\cdot\cos(x) + x^2$$

III. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

1. Замена переменных

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

А) $x = g(t)$, где $g(t)$– монотонная, непрерывно дифференцируемая функкция переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид $\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$.

Пример

Найти $\int \frac{2^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx$.

$$\int \frac{2^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = d(t^2 - 1) = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2^t}{t} 2tdt = 2\frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2}{\ln 2} 2^{\sqrt{x+1}} + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \frac{2^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\, dx \rightarrow \frac{2 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}}{\ln(2)}$$

Б) $u = g(x)$, где u– новая переменная. Формула замены переменных при такой подстановке имеет вид:
$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$.

Пример

Найти $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{x}dx = d\ln x \\ u = \ln x \end{bmatrix} = \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx \rightarrow \frac{\ln(x)^2}{2}$$

2. Интегрирование по частям

$$\int UdV = UV - \int VdU,$$

где U, V– непрерывно дифференцируемые фуекции от x. При этом за $U(x)$ берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за $V(x)$ – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или легко может быть найден.

Пример

Найти $\int x^2 \sin x dx$.

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} U = x^2; dU = 2xdx \\ dV = \sin x dx; V = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x +$$

$$+2\int x \cos x dx = \begin{bmatrix} U = x; dU = dx \\ dV = \cos x dx; V = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx \rightarrow 2\cdot\cos(x) - x^2\cdot\cos(x) + 2\cdot x\cdot\sin(x)$$

IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Выражение вида $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}$ называется **рациональной дробью**.

Если $m < n$, то дробь называется **правильной**. Если $m \geq n$, то – **неправильной**.

Простейшими называются рациональные дроби вида:

1). $\dfrac{A}{x-a}$; 2). $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k = 2,3,\ldots)$; 3). $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $(p^2 - 4q < 0)$;

4). $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ $(p^2 - 4q < 0,\ k = 2,3,\ldots)$

При интегрированиии неправильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ необходимо предварительно выделить в ней целую часть, разделив числитель на знаменатель уголком, т.е. представить в виде суммы многочлена и правильной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}.$$

Операция выделения целой части сводит интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Для того, чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, следует предварительно разложить ее в сумму простейших дробей. Это разложенние осуществляется следующим образом.

Знаменатель раскладывается на простые множители

$Q_n(x) = a_n(x-a_1)^{s_1} \dots (x-a_l)^{s_l}(x^2+px+q)^{t_1} \dots (x^2+px+q)^{t_k}$,

где a_j, $j=\overline{1,l}$ – корни кратности s_j, а $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i=\overline{1,k}$. Тогда саму дробь можно представить как сумму простейших дробей

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{s_1}} + \frac{A_1^{(l)}}{x-a_l} + \dots + \frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-a_l)^{s_l}} +$$
$$+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{t_1}^{(1)}x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{B_1^{(k)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_kx+q_k} + \dots + \frac{B_{t_k}^{(k)}x + C_{t_k}^{(k)}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}$$

Коэффициенты $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ в этом разложении определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $P_m(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части этого выражения после приведения ее к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов). Можно также определять эти коэффициенты, придавая x подходящие значения (в первую очередь значения действительных корней знаменателя $Q_n(x)$).

Таким образом, интегрирование произвольной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей.

1). $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

2). $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$

3). $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q},$

где последний интеграл выделением полного квадрата в знаменателе своится к одному из табличных интегралов.

4). $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m},$

где первый интеграл сведется к табличному внесением $2x+p$ под знак дифференциала, а второй вычисляется выделением в знаменателе полного квадрата и использованием формулы:

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{t}{2a^2(m-1)(t^2-a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{a^2(2m-2)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}.$$

Пример

Найти $\displaystyle\int\frac{x^5+3x^2-1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}dx.$

$$\int\frac{x^5+3x^2-1}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}dx = \left[\begin{array}{l}\text{дробь неправильная,}\\ \text{выделяем целую часть}\end{array}\right] = \int\left(x+4+\frac{6x^3-25x^2+43x-21}{(x-1)^2(x^2-2x+5)}\right)dx =$$

$$
=\left[\begin{array}{c}
\text{раскладываем рациональную дробь на простейшие} \\
\dfrac{6x^3-25x^2+43x-21}{(x-1)^2\left(x^2-2x+5\right)}=\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{\left(x^2-2x+5\right)}= \\
=\dfrac{A(x-1)\left(x^2-2x+5\right)+B\left(x^2-2x+5\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2-2x+5\right)} \quad \Rightarrow \\
6x^3-25x^2+43x-21=A(x-1)\left(x^2-2x+5\right)+B\left(x^2-2x+5\right)+(Cx+D)(x-1)^2 \\
\text{приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях } x: \\
\left\{\begin{array}{l}
x^3: \quad 6=A+C \\
x^2: \quad -25=-A-2A+B+D-2C \\
x: \quad 43=2A+5A-2B-C-2D \\
const: \quad -21=-5A+5B+D
\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
A=\dfrac{11}{4} \\
B=\dfrac{3}{4} \\
C=\dfrac{13}{4} \\
D=-11
\end{array}\right.
\end{array}\right]=
$$

$$
=\int\left(x+4+\frac{11/4}{(x-1)}+\frac{3/4}{(x-1)^2}+\frac{13/4\,x-11}{\left(x^2-2x+5\right)}\right)dx=
$$

$$
=\frac{x^2}{2}+4x+\frac{11}{4}\ln(x-1)-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{13}{8}\int\frac{2x-\frac{88}{13}}{x^2-2x+5}dx=
$$

$$
=\frac{x^2}{2}+4x+\frac{11}{4}\ln(x-1)-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{13}{8}\int\left(\frac{2x-2}{x^2-2x+5}-\frac{62/13}{x^2-2x+1+4}\right)dx=
$$

$$
=\frac{x^2}{2}+4x+\frac{11}{4}\ln(x-1)-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{13}{8}\ln\left(x^2-2x+5\right)-\frac{31}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+2^2}=
$$

$$
=\frac{x^2}{2}+4x+\frac{11}{4}\ln(x-1)-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{13}{8}\ln\left(x^2-2x+5\right)-\frac{31}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arc}tg\,\frac{x-1}{2}+C
$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\left[\int \frac{x^5+3x^2-1}{\left(x^2-2x+5\right)\cdot\left[(x-1)^2\right]}\,dx\right] \to 4\cdot x+\frac{31\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)}{8}+\frac{13\cdot\ln\left[(x-1)^2+4\right]}{8}+\frac{11\cdot\ln(x-1)}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4\cdot(x-1)}$$

V. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция

Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$tg\,\frac{x}{2}=t.$$

В результате имеем:

$$\sin x=\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2arctgt;\quad dx=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Пример

Найти $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

$$\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}=\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{3(1+t^2)+10t+3(1-t^2)}=2\int\frac{dt}{10t+6}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t+\frac{3}{5}}=\frac{1}{5}\ln\left(t+\frac{3}{5}\right)+C=$$

$$=\left[t=tg\,\frac{x}{2}\right]=\frac{1}{5}\ln\left(tg\,\frac{x}{2}+\frac{3}{5}\right)+C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \frac{1}{3+5\sin(x)+3\cos(x)}\,dx \to \frac{\ln\left(5\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3\right)}{5}$$

В некоторых частных случаях удобно воспользоваться другими подстановками.

А) Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, то интеграл вычисляется подстановкой $t = \cos x$.

Б) Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, то интеграл вычисляется подстановкой $t = \sin x$.

В) Если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$, $\cos x$, то интеграл вычисляется подстановкой $t = tgx$.

Пример

Найти $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \left[\begin{array}{l} R(-\sin x) = -R(\sin x) \\ t = \cos x \\ \sin x dx = -d\cos x = -dt \end{array}\right] = -\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -arctgt + C = -arctg\cos x + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \frac{\sin(x)}{1+(\cos(x))^2}\,dx \to -\mathrm{atan}(\cos(x))$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

А) Один из показателей m или n нечетное положительное число.

Если m–нечетное, то применяется подстановка $\cos x = t$.

Если n–нечетное, то применяется подстановка $\sin x = t$.

Пример

Найти $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x d\left(-\cos x\right) =$$

$$= \left[\cos x = t\right] = \int \left(1-t^2\right)t^2 d(-t) = -\int (t^2 - t^4)dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int (\sin(x))^3 \cdot (\cos(x))^2 dx \rightarrow -\frac{\cos(x)^3 \cdot \sin(x)^2}{5} - \frac{2 \cdot \cos(x)^3}{15}$$

Б) Оба показателя степени m и n – положительные четные числа. Тогда подынтегральное выражение нужно преобразовать с помощью формул

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример

Найти $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \frac{1}{4}\sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x)\sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}(\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx) = \frac{1}{8}\left(\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx + \int \sin^2 2x d\frac{\sin 2x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int (\sin(x))^2 \cdot (\cos(x))^4 dx \rightarrow \frac{x}{16} - \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)^5}{6} + \frac{\sin(2\cdot x)}{24} + \frac{\sin(4\cdot x)}{192}$$

В) Сумма показателей степеней $m+n$ является целым четным отрицательным числом, т.е. $m+n=-2k,\quad k\in\mathrm{N}$, можно вычислять с помощью подстановок $tgx=t$ и $ctgx=t$.

Пример

Найти $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\begin{bmatrix} t=ctgx\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \\ \dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}=\dfrac{1+t^2}{t}\end{bmatrix}=-\int\frac{1+t^2}{t}dt=$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=-\ln|t|-\frac{t^2}{2}+C=-\ln|ctg\ x|-\frac{(ctg\ x)^2}{2}+C=$$

$$=\ln|tg\ x|-\frac{(ctg\ x)^2}{2}+C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int\frac{1}{(\sin(x))^3\cdot\cos(x)}\,dx\rightarrow\ln(\tan(x))-\frac{1}{2\cdot\sin(x)^2}$$

3. Интегралы вида $\int\sin mx\cos nzdx;\quad\int\sin nx\sin mxdx;\quad\int\cos mx\cos nxdx$

Вычисляются с помощью формул:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

Пример

Найти $\int \cos 5x \sin 17x dx$.

$$\int \cos 5x \sin 17x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 22x + \sin 12x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 22x}{22} - \frac{\cos 12x}{12}\right) + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \cos(5x)\cdot\sin(17x)\,dx \rightarrow -\frac{\cos(12\cdot x)}{24} - \frac{\cos(22\cdot x)}{44}$$

VI. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{v_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$

где R – рациональная функция своих аргументов, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ – целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s- общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

Пример

Найти $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} \frac{1-x}{1+x} = t^2 \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{-4tdt}{\left(1+t^2\right)^2} \end{bmatrix} = -4\int \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \frac{dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -4\int \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)} dt =$$

$$= -4\int \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1+t\right)\left(1-t\right)} dt =$$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1+t\right)\left(1-t\right)}=\dfrac{A}{1+t}+\dfrac{B}{1-t}+\dfrac{Ct+D}{1+t^2}=\\ =\dfrac{A\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)+B\left(1+t^2\right)\left(1+t\right)+\left(Ct+D\right)\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left(1+t\right)\left(1-t\right)}\Rightarrow\\ \qquad\Rightarrow\begin{cases}-A+B-C=0\\ A+B-D=1\\ -A+B+C=0\\ A+B+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\ B=\dfrac{1}{4}\\ C=0\\ D=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right]=$$

$$=-4\int\left(\frac{1/4}{1+t}+\frac{1/4}{1-t}+\frac{-1/2}{1+t^2}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}arctgt+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+1}\right|+\frac{1}{2}arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+\frac{1}{2}arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

2. Вычисление интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{\pm a^2\mp x^2}\right)dx$

где – рациональная функция двух аргументов, производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной исходный интеграл приводится к одному из интегралов:

А) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, который вычисляется с помощью подстановки

$$x=a\sin t;\quad dx=a\cos tdt.$$

Б) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, который вычисляется с помощью подстановки

$$x = atgt; \quad dx = \frac{adt}{\cos^2 t}.$$

В) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, который вычисляется с помощью подстановки

$$x = \frac{a}{\cos t}; \quad dx = \frac{atgtdt}{\cos t}.$$

Пример

Найти $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t} \\ dx = \dfrac{2\sin tdt}{\cos^2 t} \end{array}\right] = \int \frac{\dfrac{2\sin tdt}{\cos^2 t}}{\left(\dfrac{2}{\cos t}\right)^3 \sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 t} - 4}} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\sin tdt}{\dfrac{1}{\cos t}\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{8}\int \frac{\sin t\cos^2 t}{\sin t}dt = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t} \\ t = \arccos\dfrac{2}{x} \end{array}\right] = \frac{1}{16}\left(\arccos\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\frac{2}{x}\right)\right) + C.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-4}}\,dx \rightarrow \frac{\operatorname{acos}\left(\frac{2}{x}\right)}{16} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{8\cdot x^2}$$

VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определение определенного интеграла

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ – произвольное разбиение этого отрезка на n частей, то интегральной суммой функции $f(x)$ на $[a,b]$ называется сумма вида $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}.$

Геометрически S_n есть алгеброическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $f(\xi_k)$.

Если определенная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при условии, что наибольшая из разностей стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на отрезки $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, ни от выбора точек ξ_k на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, а сам предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образм

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Геометрически определенный интеграл представляет собой алгеброическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a,\quad x = b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox, – со знаком минус.

2. Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример

Вычислить $\int\limits_1^2 x^2 dx$.

$$\int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{7}{3}.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int_1^2 x^2\,dx \to \frac{7}{3} = 2.333$$

3. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\left[t_1, t_2\right]$, причем $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример

Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} tgx = t,\ \ x = arctgt, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int\limits_0^1 \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+2\dfrac{t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2+2t^2} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+\dfrac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\sqrt{3}t\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\sqrt{3} - 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+(\sin(x))^2}\,dx = 0.676$$

4. Интегрирование по частям

Если функции $U(x)$, $V(x)$ и их производные $U'(x), V'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU$$

Пример

Вычислить $\int_0^1 arctgxdx$.

$$\int_0^1 arctgxdx = \begin{bmatrix} U = arctgx, & dU = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dV = dx, & V = x \end{bmatrix} = xarctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int_0^1 \operatorname{atan}(x)\,dx = 0.439$$

VIII. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна при $x \geq a$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет смысл при любом $b > a$ и является непрерывной функцией аргумента b.

Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то его называют **несобственным интегралом 1-го рода** от функции *f(x)* на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл существует или **сходится**.

Если же не существует конечного предела, несобственный интеграл не существует или расходится.

Пример

Найти $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx.$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b=-\left(0-1\right)=1.$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\to 1=1$$

2. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна при $a\le x<b$ и имеет разрыв при $x=b$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

и называется **несобственным интегралом 2-го рода**.

Если предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется **сходящимся**, в противном случае – **расходящимся**.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы от функции, имеющей разрыв при $x = a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

и от функции, разрывной в точке c ($a<c<b$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если существуют оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Пример

Найти $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx.$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon}\right) = \infty - \text{расходится.}$$

Пример решения с использованием Mathcad:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx \to \infty \;\; = 1 \times 10^{307}$$

Ольга Юрьевна Агарева

MATHCAD В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания к практическим занятиям по теме:
“ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ”.

Под редакцией автора