

**Министерство образования и науки
Российской Федерации**

**«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского**

Кафедра «Высшая математика»

Математическая логика и теория алгоритмов

Методические указания и варианты курсовых заданий

Составители: Агарева О.Ю.

Выск Н.Д.

Москва 2011

Методические указания предназначены для студентов МАТИ-РГТУ, изучающих в рамках курса высшей математики тему «Математическая логика и теория алгоритмов». В них рассматриваются исчисление высказываний и предикатов, нечеткие логики, машина Тьюринга и рекурсивные функции. Приводится решение типовых задач по всем разделам. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое задание по рассматриваемым темам.

Настоящие методические указания могут использоваться студентами на всех факультетах и специальностях.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Построить таблицу истинности и по ней найти СДНФ, СКНФ:

$$f = \left((A \wedge (B \rightarrow \bar{C})) \wedge ((\bar{B} \oplus A)) \vee B \right).$$

Решение

Воспользуемся определениями логических операций, их таблицами истинности. Определим порядок действий и заполним последовательно таблицу.

$$f = \left(\left(\underbrace{\left(A \wedge \underbrace{\underbrace{B \rightarrow \bar{C}}_1}_2 \right)}_3 \wedge \underbrace{\left(\bar{B} \oplus A \right)}_4 \right) \vee B \right).$$

6
7

A	B	C	1	2	3	4	5	6	7= f
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1

СДНФ $f(A,B,C)$ получаем как дизъюнкцию конъюнкций всех переменных, на которых $f(A,B,C)=1$; над теми переменными, которые равны нулю, ставим отрицание.

$$f(A,B,C) = (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge B \wedge C).$$

СКНФ $f(A,B,C)$ получаем как конъюнкцию дизъюнкций всех переменных, на которых $f(A,B,C)=0$; над теми переменными, которые равны единице, ставим отрицание.

$$f(A,B,C) = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}).$$

2. Построить какие-либо ДНФ, КНФ функции, используя тождественные преобразования:

$$(\bar{y} \sim z) \wedge ((x \vee \bar{z}) \rightarrow \bar{y}).$$

Решение

Выразим эквиваленцию и импликацию через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$$(\bar{y} \sim z) \wedge ((x \vee \bar{z}) \rightarrow \bar{y}) \equiv ((\bar{y} \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})) \wedge ((\overline{x \vee \bar{z}}) \vee \bar{y}).$$

Используя закон де Моргана, доведем отрицание до переменных:

$$((\bar{y} \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})) \wedge ((\bar{x} \wedge z) \vee \bar{y}).$$

Применим дистрибутивные законы:

$$\begin{aligned} & ((\bar{y} \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})) \wedge ((\bar{x} \wedge z) \vee \bar{y}) \equiv \\ & \equiv ((y \vee \bar{y}) \wedge (y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (z \vee \bar{z})) \wedge ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z)). \end{aligned}$$

Используя соотношение $a \vee \bar{a} = 1$, получим КНФ формулы:

$$(y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee z).$$

Для получения ДНФ вновь используем дистрибутивные законы:

$$\begin{aligned} & ((\bar{y} \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z})) \wedge ((\bar{x} \wedge z) \vee \bar{y}) \equiv \\ & \equiv (\bar{y} \wedge z \wedge \bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z} \wedge \bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge z \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z} \wedge \bar{y}) \equiv \\ & \equiv (\bar{y} \wedge z \wedge \bar{x}) \vee (\bar{y} \wedge z) \end{aligned}$$

(были использованы тождества $a \wedge \bar{a} = 0$, $a \wedge 0 = 0$).

3. Используя алгоритм Куайна, построить семантическое дерево: $\overline{(A \vee B \rightarrow (\bar{C} \sim B))}$.

Решение

$$f(A, B, C) = \overline{(A \vee B \rightarrow (\bar{C} \sim B))}.$$

Последовательно переменным A, B, C будем придавать значения 0, 1.

$$\text{Пусть } A=0, \text{ тогда } f(0, B, C) = \overline{(0 \vee B \rightarrow (\bar{C} \sim B))} = \overline{(B \rightarrow (\bar{C} \sim B))}.$$

$$f(0, 0, C) = \overline{(0 \rightarrow (\bar{C} \sim 0))} = \bar{1} = 0 \text{ для любого значения } C.$$

$$f(0, 1, C) = \overline{(1 \rightarrow (\bar{C} \sim 1))} \text{ результат зависит от значения } C.$$

$$f(0, 1, 0) = \overline{(1 \rightarrow (\bar{0} \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow (1 \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow 1)} = \bar{1} = 0.$$

$$f(0, 1, 1) = \overline{(1 \rightarrow (\bar{1} \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow (0 \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow 0)} = \bar{0} = 1.$$

$$\text{Пусть } A=1, \text{ тогда } f(1, B, C) = \overline{(1 \vee B \rightarrow (\bar{C} \sim B))} = \overline{(1 \rightarrow (\bar{C} \sim B))}.$$

$$f(1, 0, C) = \overline{(1 \rightarrow (\bar{C} \sim 0))} \text{ результат зависит от значения } C.$$

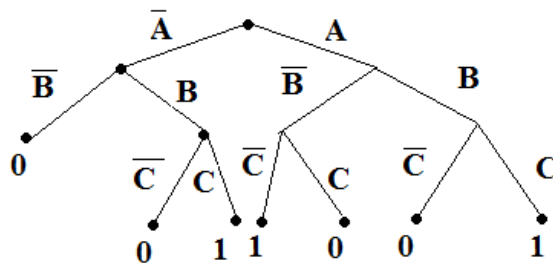
$$f(1, 0, 0) = \overline{(1 \rightarrow (\bar{0} \sim 0))} = \overline{(1 \rightarrow (1 \sim 0))} = \overline{(1 \rightarrow 0)} = \bar{0} = 1.$$

$$f(1,0,1) = \overline{(1 \rightarrow (\overline{1} \sim 0))} = \overline{(1 \rightarrow (0 \sim 0))} = \overline{(1 \rightarrow 1)} = \overline{1} = 0.$$

$$f(1,1,C) = \overline{(1 \rightarrow (\overline{C} \sim 1))} \text{ результат зависит от значения } C.$$

$$f(1,1,0) = \overline{(1 \rightarrow (\overline{0} \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow (1 \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow 1)} = \overline{1} = 0.$$

$$f(1,1,1) = \overline{(1 \rightarrow (\overline{1} \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow (0 \sim 1))} = \overline{(1 \rightarrow 0)} = \overline{0} = 1.$$



4. Решить логическую задачу, записав ее в виде формулы логики высказываний.

Определить, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно, что:

- 1) если первый сдал, то и второй сдал;
- 2) если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;
- 3) если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;
- 4) если четвертый сдал, то и первый сдал.

Решение

Запишем все утверждения логическими формулами и упростим их конъюнкцию.

Пусть A, B, C, E – следующие высказывания:

A – «первый студент сдал экзамен»;

B – «второй студент сдал экзамен»;

C – «третий студент сдал экзамен»;

E – «четвертый студент сдал экзамен».

Тогда:

- 1) $A \rightarrow B \equiv 1$; 2) $B \rightarrow (C \vee \bar{A}) \equiv 1$; 3) $\bar{E} \rightarrow (A \wedge \bar{C}) \equiv 1$; 4) $E \rightarrow A \equiv 1$.

Конъюнкция этих высказываний:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow (C \vee \bar{A})) \wedge (\bar{E} \rightarrow (A \wedge \bar{C})) \wedge ((E \rightarrow A)) \equiv 1.$$

Упростим эту формулу, используя свойства логических операций:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee (C \vee \bar{A})) \wedge (E \vee (A \wedge \bar{C})) \wedge ((\bar{E} \vee A)) \equiv \\ &\equiv [\text{раскроем скобки, опуская знак } \wedge] \equiv \\ &\equiv (\bar{A}\bar{B} \vee B\bar{B} \vee \bar{A}C \vee BC \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{A})(E\bar{E} \vee A\bar{C}\bar{E} \vee EA \vee A\bar{C}A) \equiv \\ &\equiv (BC \vee \bar{A})(A\bar{C}\bar{E} \vee EA \vee A\bar{C}) \equiv (BC \vee \bar{A})(EA \vee A\bar{C}) \equiv \\ &\equiv (BC \vee \bar{A})(EA \vee A\bar{C}) \equiv BCEA \vee EA\bar{A} \vee BCAC \vee \bar{A}A\bar{C} \equiv B \wedge C \wedge E \wedge A \equiv 1. \end{aligned}$$

Так как конъюнкция A, B, C, E равна единице, то экзамен сдали все четыре студента.

5. Методом резолюций проверить выводимость формулы.

$$\bar{A} \vee C, C \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C).$$

Решение

Выводимость данной формулы по методу резолюций следует из противоречивости множества Γ :

$$\Gamma = \{\bar{A} \vee C, C \rightarrow B, B \rightarrow A, \overline{A \rightarrow (B \rightarrow C)}\}.$$

Приведем все формулы из Γ к КНФ:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\bar{A} \vee C, \bar{C} \vee B, \bar{B} \vee A, \overline{A \vee (\bar{B} \vee C)}\} \equiv \{\bar{A} \vee C, \bar{C} \vee B, \bar{B} \vee A, A \wedge (\bar{B} \vee C)\} \equiv \\ &\equiv \{\bar{A} \vee C, \bar{C} \vee B, \bar{B} \vee A, A \wedge B \wedge \bar{C}\} \equiv \{\bar{A} \vee C, \bar{C} \vee B, \bar{B} \vee A, A, B, \bar{C}\}. \end{aligned}$$

Построим возможный резолютивный вывод нуля из Γ :

$$1. \text{ res}_A(\bar{A} \vee C, A) = C; \quad 2. \text{ res}(C \vee \bar{C}) = 0.$$

Таким образом, получили, что формула выводима.

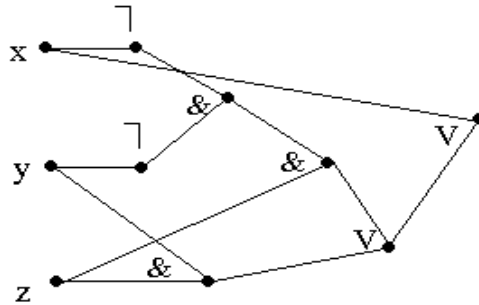
6. Построить СФЭ, оценить ее сложность и сложность функции, построить минимальную схему

$$x \vee yz \vee \bar{x} \bar{y} z.$$

Решение

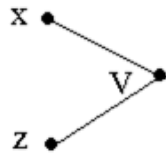
Сложность схемы равна числу операций в ней, $L(S)=7$.

Чтобы построить минимальную схему, нужно упростить функцию $f(x,y,z)$.

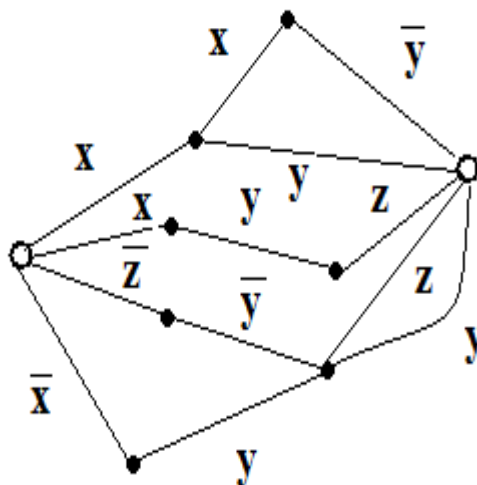


$$f(x,y,z) = x \vee yz \vee \bar{x} \bar{y} z = [x \vee \bar{x} y = x \vee y] = x \vee yz \vee \bar{y} z = x \vee (y \vee \bar{y}) z = x \vee 1z = x \vee z.$$

Сложность функции $L(f)=1$. Минимальная схема имеет вид:



7. Найти функцию проводимости, сложность контактной схемы и минимальную КС.



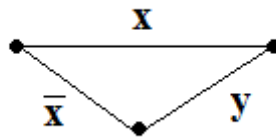
Решение

Сложность КС равна числу ребер (переменных) в ней, т.е. $L(KC)=13$.

Запишем функцию проводимости и упростим ее.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x(\bar{x}y \vee y) \vee xyz \vee (\bar{z}\bar{y} \vee \bar{x}y)(z \vee y) = \\ &= \bar{x}y \vee xy \vee xyz \vee z\bar{z}\bar{y} \vee z\bar{x}y \vee \bar{z}\bar{y}y \vee \bar{x}yy = (x \vee xyz) \vee (\bar{x}yz \vee \bar{x}y) = \\ &= x \vee \bar{x}y. \end{aligned}$$

Поэтому эквивалентная минимальная КС:



8. Найти область истинности предиката, заданного на множестве М.

$$P(x) \sim Q(x), \quad M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$P(x) = \text{«}x \text{ не больше 6}\text{»}, \quad Q(x) = \text{«}x \text{ – нечетное}\text{»}.$$

Решение

Предикат принимает значение истинности, равное 1, на тех элементах множества М, для которых предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ либо оба истинны (такими элементами являются 1,3,5 – нечетные числа, не превышающие 6), либо оба ложны (для элемента 8 – четного числа, большего 6). Таким образом, область истинности данного предиката: $\{1,3,5,8\}$.

9. Выразить область истинности данного предиката через области истинности входящих в него предикатов (используйте обозначения I_P , I_Q и т.д. для областей истинности и $\overline{I_P}$, $\overline{I_Q}$,... для подмножеств множеств значений, не входящих в область истинности).

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (P \vee Q).$$

Решение

Упростим формулу, используя равносильности:

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv P \sim Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \Rightarrow \\ \Rightarrow & (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (P \vee Q) \equiv ((P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q})) \wedge (P \vee Q) \equiv \\ & \equiv (P \wedge Q \wedge P) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge P) \vee (P \wedge Q \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge Q) \equiv \\ & \equiv (P \wedge Q) \vee 0 \vee (P \wedge Q) \vee 0 \equiv P \wedge Q. \end{aligned}$$

Следовательно, областью истинности данного предиката является пересечение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$: $I_P \cap I_Q$.

10. Привести к предваренной нормальной форме.

$$(\exists x \forall y \exists z A(x, y, z) \vee \exists x \forall y B(x, y, z)) \rightarrow \forall x \exists y \forall z C(x, y, z).$$

Решение

Воспользуемся определением предваренной нормальной формы (все кванторы вынесены вперед) и свойствами операций над кванторами.

$$\begin{aligned} & (\exists x \forall y \exists z A(x, y, z) \vee \exists x \forall y B(x, y, z)) \rightarrow \forall x \exists y \forall z C(x, y, z) \equiv \\ & \equiv \overline{\exists x \forall y \exists z A(x, y, z) \vee \exists x \forall y B(x, y, z)} \vee \forall x \exists y \forall z C(x, y, z) \equiv \\ & \equiv \forall x \exists y \forall z \bar{A}(x, y, z) \wedge \forall x \exists y \bar{B}(x, y, z) \vee \forall x \exists y \forall z C(x, y, z) \equiv \\ & \equiv \forall x \exists y \forall z \bar{A}(x, y, z) \wedge \forall x \exists b \bar{B}(x, b, c) \vee \forall a \exists y \forall d C(a, y, d) \equiv \\ & \equiv \forall x \exists y \forall z \exists b \forall a \forall d (\bar{A}(x, y, z) \wedge \bar{B}(x, b, c) \vee C(a, y, d)). \end{aligned}$$

11. Найти степень истинности нечеткого высказывания.

$$(\tilde{A} \wedge \tilde{B} \rightarrow \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \quad \tilde{A} = 0.2, \tilde{B} = 0.7, \tilde{C} = 0.4.$$

Решение

Выразим импликацию и эквиваленцию через дизъюнкцию и конъюнкцию: $\tilde{A} \wedge \tilde{B} \rightarrow \tilde{C} \equiv (\overline{\tilde{A} \wedge \tilde{B}}) \vee \tilde{C} \equiv \tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}$;

$$\begin{aligned} (\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \sim (\tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) &\equiv ((\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \wedge (\tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C})) \vee ((\overline{\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}}) \wedge (\overline{\tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}})) \equiv \\ &\equiv ((\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \wedge (\tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C})) \vee (\tilde{\tilde{A}} \wedge \tilde{\tilde{B}} \wedge \tilde{C} \wedge \tilde{\tilde{B}}). \end{aligned}$$

Поскольку значение истинности дизъюнкции равно максимуму значений истинности слагаемых, а значение истинности конъюнкции равно минимуму значений истинности сомножителей,

$$\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C} = \max(0.8, 0.3, 0.6) = 0.8; \quad \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C} = \max(0.7, 0.6) = 0.7;$$

$$(\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \wedge (\tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) = \min(0.8, 0.7) = 0.7;$$

$$\tilde{\tilde{A}} \wedge \tilde{\tilde{B}} \wedge \tilde{C} \wedge \tilde{\tilde{B}} = \min(0.2, 0.7, 0.4, 0.3) = 0.2;$$

$$((\tilde{\tilde{A}} \vee \tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \wedge (\tilde{\tilde{B}} \vee \tilde{C})) \vee (\tilde{\tilde{A}} \wedge \tilde{\tilde{B}} \wedge \tilde{C} \wedge \tilde{\tilde{B}}) = \max(0.7, 0.2) = 0.7.$$

12. Определить степень равносильности формул F_1, F_2 при условии, что $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества M_1, M_2 .

$$F_1 = \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{\tilde{X}} \wedge \tilde{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,2; 0,3\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,6\}$$

Решение

$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$F_1 = \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$	$F_2 = \tilde{\tilde{X}} \wedge \tilde{\tilde{Y}}$
0,2	0,1	0,8	0,8
0,2	0,6	0,8	0,4
0,3	0,1	0,7	0,7
0,3	0,6	0,7	0,4

Вычислим теперь степень равносильности формул F_1, F_2 :

$$F_1 \sim F_2 = \min(\max(1 - \tilde{X}, \tilde{Y}), \max(\tilde{X}, 1 - \tilde{Y})).$$

Вычислим значения эквивалентностей на всех наборах

значений формул F_1, F_2 :

$$0,8 \sim 0,8 = \min(\max(1 - 0,8; 0,8), \max(0,8; 1 - 0,8)) = 0,8.$$

$$0,8 \sim 0,4 = \min(\max(1 - 0,8; 0,4), \max(0,8; 1 - 0,4)) = 0,4.$$

$$0,7 \sim 0,7 = \min(\max(1 - 0,7; 0,7), \max(0,7; 1 - 0,7)) = 0,7.$$

$$0,7 \sim 0,4 = \min(\max(1 - 0,7; 0,4), \max(0,7; 1 - 0,4)) = 0,4.$$

$$\mu(F_1, F_2) = \bigwedge_{\text{по всем наборам}} F_1 \sim F_2 = 0,8 \wedge 0,4 \wedge 0,7 \wedge 0,4 = 0,4.$$

Следовательно, формулы F_1 и F_2 нечетко неравносильны.

13. Найти результат применения машины Тьюринга к записям на ленте:

$$\begin{array}{l} q_1 0 \rightarrow q_1 0R \\ q_1 1 \rightarrow q_2 0R \quad P_1: 0111010 \\ T: \quad q_2 0 \rightarrow q_0 1S \quad P_2: 011110 \\ \quad q_2 1 \rightarrow q_1 0R \end{array}$$

Решение

$$\begin{array}{l} P_1: 0111010 \rightarrow 0011010 \rightarrow 0001010 \rightarrow \\ \quad q_1 \quad \quad \quad q_2 \quad \quad \quad q_1 \\ \quad \rightarrow 0000010 \rightarrow 0000110, \\ \quad \quad \quad q_2 \quad \quad \quad q_0 \\ \\ P_2: 011110 \rightarrow 001110 \rightarrow 000110 \rightarrow \\ \quad q_1 \quad \quad \quad q_2 \quad \quad \quad q_1 \\ \\ \rightarrow 000010 \rightarrow 000000 \rightarrow 0000000 \rightarrow \dots \\ \quad q_2 \quad \quad \quad q_1 \quad \quad \quad q_1 \end{array}$$

В последнем случае машина никогда не остановится, и будет работать вечно. Таким образом, она неприменима ко второй записи на ленте.

14. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $f(x, y) = x + y$.

Решение

В начальном состоянии на ленте имеем: $\underset{q_1}{1} \dots \underset{x+1}{1} \underset{y+1}{0} \underset{y+1}{1} \dots 1.$

После работы машины Тьюринга на ленте должно быть:

$$\underset{q_0}{1} \dots 1.$$

$x+y+1$

Программа такой машины, например, такая:

$$\begin{aligned} q_1 1 &\rightarrow q_1 1R, & q_1 0 &\rightarrow q_2 1R, & q_2 1 &\rightarrow q_2 1R, & q_2 0 &\rightarrow q_3 0L, \\ q_3 1 &\rightarrow q_4 0L, & q_4 1 &\rightarrow q_5 0L, & q_5 1 &\rightarrow q_5 1L, & q_5 0 &\rightarrow q_0 0R. \end{aligned}$$

Машина, построенная таким образом, вначале, двигаясь вправо, заменяет нуль, разделяющий массивы единиц, единицей; затем, пройдя массив единиц, начинает движение влево, заменяя две последние единицы нулями.

15. Найти функцию, получаемую из $g(x) = x$, $h(x, y, z) = zy + z$ с помощью операции примитивной рекурсии.

Решение

$$\begin{cases} f(x, 0) = g(x), \\ f(x, y+1) = h(x, y, f(x, y)). \end{cases}$$

$$f(x, 0) = x,$$

$$f(x, 1) = h(x, 0, f(x, 0)) = h(x, 0, x) = x \cdot 0 + x = x = 1 \cdot x,$$

$$\begin{aligned}
f(x,2) &= h(x, 1, f(x, 1)) = h(x, 1, x) = x1 + x = 2x = 1 \cdot 2 \cdot x, \\
f(x,3) &= h(x, 2, f(x, 2)) = h(x, 2, 2x) = 2x^2 + 2x = 6x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x, \\
f(x,4) &= h(x, 3, f(x, 3)) = h(x, 3, 6x) = 6x^3 + 6x = 24x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x, \\
f(x,5) &= h(x, 4, f(x, 4)) = h(x, 4, 24x) = 24x^4 + 24x = 120x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x, \\
&\dots\dots\dots \\
f(x,y) &= y!x.
\end{aligned}$$

16. Найти функции, получаемые из данной с помощью операции минимизации по каждой ее переменной.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 - x_3.$$

Решение

1) Минимизируем данную функцию по переменной x_1 .

Рассмотрим уравнение $yx_2 - x_3 = x_1$, при $y=0$ получаем $-x_3 = x_1$, что возможно только когда $x_3 = x_1 = 0$.

$$\mu_y[yx_2 - x_3 = x_1] = \begin{cases} 0, & \text{если } x_3 = x_1 = 0; \\ \text{не определено} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2) Минимизируем данную функцию по переменной x_2 .

Рассмотрим уравнение $x_1 y - x_3 = x_2$, при $y=0$ получаем $-x_3 = x_2$, что возможно только когда $x_3 = x_2 = 0$.

$$\mu_y[x_1 y - x_3 = x_2] = \begin{cases} 0, & \text{если } x_3 = x_2 = 0; \\ \text{не определено} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3) Минимизируем данную функцию по переменной x_3 .

Рассмотрим уравнение $x_1 x_2 - y = x_3 \Rightarrow y = x_1 x_2 - x_3$

$$\mu_y[x_1 x_2 - y = x_3] = \begin{cases} x_1 x_2 - x_3, & \text{если } x_1 x_2 \geq x_3; \\ \text{не определено} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Логика высказываний

Высказыванием называется утвердительное предложение, относительно которого однозначно можно сказать истинно оно (1) или ложно (0).

Операции над высказываниями: *отрицание* $\neg$, *дизъюнкция* $\vee$, *конъюнкция* $\wedge$, *импликация* $\rightarrow$, *эквиваленция* $\sim$ и *неравнозначность* $\oplus$.

$\neg$ – не...; $\wedge$ – ...и...;
 $\vee$ – ...или...; $\rightarrow$ – если..., то...;
 $\sim$ – ...эквивалентно...; $\oplus$ – либо..., либо....

Таблица истинности логических операций

A	B	$\bar{A} = \neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$	$A \oplus B$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Порядок выполнения логических операций, если отсутствуют скобки, следующий: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $\oplus$ (если отрицание над переменной, то оно выполняется раньше других).

Равносильные преобразования логики высказываний

1. $A \equiv A$ (закон тождества);
2. $A \wedge 0 \equiv 0$;
3. $A \vee 0 \equiv A$;
4. $A \wedge 1 \equiv A$;
5. $A \vee 1 \equiv 1$;
6. $\bar{\bar{A}} \equiv A$ (закон двойного отрицания);
7. $A \wedge \bar{A} \equiv 0$ (закон логического противоречия);

8. $A \vee \bar{A} \equiv 1$ (закон исключенного третьего);
9. $A \wedge A \equiv A$ (идемпотентность конъюнкции);
10. $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность дизъюнкции);
11. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (коммутативность конъюнкции);
12. $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
13. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (ассоциативность конъюнкции);
14. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность дизъюнкции);
15. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);
16. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);
17. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (первый закон поглощения);
18. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (второй закон поглощения);
19. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$ (первый закон де Моргана);
20. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$ (второй закон де Моргана);
21. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$ (первый закон расщепления);
22. $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$ (второй закон расщепления);
23. $A \rightarrow B \equiv \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ (закон контрапозиции);
24. $A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$;
25. $A \sim B \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A) \equiv (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$;
26. $A \oplus B \equiv (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$;
27. $A \vee A \wedge B \equiv A$;
28. $A \vee \bar{A} \wedge B \equiv A \vee B$.

ДНФ формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний, записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций переменных, т.е.

$$F = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee \dots, \text{ где } K_i = A \wedge B \wedge C \wedge \dots$$

КНФ формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний, записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных, т.е.

$$F = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \dots, \text{ где } D_i = A \vee B \vee C \vee \dots$$

Алгоритм приведения формул логики высказываний к ДНФ (КНФ)

Шаг 1. Все формулы вида $A \rightarrow B$ заменяем на $\bar{A} \vee B$ или на $A \wedge \bar{B}$.

Шаг 2. Все формулы вида $A \sim B$ заменяем на $(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A)$ или $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$.

Шаг 3. Все формулы вида $A \oplus B$ заменяем на $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (B \vee A)$ или $(\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$.

Шаг 4. Все отрицания, стоящие над сложными формулами, опускаем по законам де Моргана.

Шаг 5. Устраняем все двойные отрицания над формулами.

Шаг 6. Осуществляем раскрытие всех скобок по закону дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции для ДНФ или по закону дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции для КНФ.

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержит символы всех переменных, то такая формула называется *совершенной, совершенной дизъюнктивной нормальной формой* формулы (СДНФ) и *совершенной конъюнктивной нормальной формой* формулы (СКНФ).

Алгоритм представления логической функции, заданной таблицей, формулой в СДНФ

Шаг 1. Выбираем в таблице все наборы переменных $A_1, A_2, \dots, A_n$, для которых значение F равно 1.

Шаг 2. Для каждого такого набора (строки таблицы) составляем конъюнкцию переменных, причем в эту конъюнкцию переменная A_i записывается без изменений, если ее значение равно 1, и со знаком отрицания, если ее

значение равно 0.

Шаг 3. Составляем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций. В результате получится формула данной функции в СДНФ.

Алгоритм представления логической функции, заданной таблицей, формулой в СКНФ

Шаг 1. Выбираем в таблице все наборы переменных $A_1, A_2, \dots, A_n$, для которых значение F равно 0.

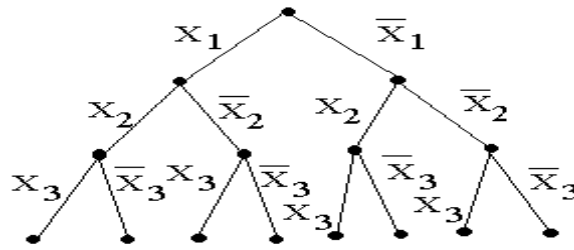
Шаг 2. Для каждого такого набора (строки таблицы) составляем дизъюнкцию переменных, причем в эту дизъюнкцию переменная A_i записывается без изменений, если ее значение равно 0, и со знаком отрицания, если ее значение равно 1.

Шаг 3. Составляем конъюнкцию всех полученных дизъюнкций. В результате получится формула данной функции в СКНФ.

Алгоритм Куайна

Для нахождения значений формулы $A(x_1, \dots, x_k)$ на различных наборах значений переменных используется так называемое *семантическое дерево*, представляющее собой бинарное однокорневое дерево (см. рис.), удовлетворяющее следующим условиям:

1. каждое ребро помечено x_i или $\bar{x}_i$ $i=1, \dots, k$;
2. ребра, выходящие из одной вершины, соответствуют противоположным переменным x_i и $\bar{x}_i$;
3. ребра соответствуют одной и той же переменной тогда и только тогда, когда они находятся на одинаковом расстоянии от корня. Граф, изображенный на рисунке, имеет 2^k концевых вершин, и для нахождения значений формулы в общем случае нужно исследовать 2^k маршрутов от корня до каждой текущей вершины.



Алгоритм Куайна позволяет проходить лишь часть дерева и заключается в последовательном переборе переменных x_i и придании им значений $0,1$.

Метод резолюций

Пусть $A_1 = C \vee B$, $A_2 = D \vee B$. Дизъюнкт $C \vee D$ называется *резольвентой* дизъюнктов A_1 и A_2 по переменной B и обозначается через $res_B(A_1, A_2)$:

$$res_B(A_1, A_2) = C \vee D.$$

Если дизъюнкты A_1 и A_2 не содержат противоположных переменных, то резольвент у них не существует. Очевидно, что $res(A, \bar{A}) = 0$.

Метод резолюций применяется в качестве механизма доказательства выводимости формулы.

Для доказательства того, что некоторое заключение A является логическим следствием множества гипотез $\{A_1, \dots, A_n\}$, нужно показать, что множество $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n, \bar{A}\}$ – противоречиво. Для этого надо все $A_1, \dots, A_n, \bar{A}$ привести к *КНФ*, заменить символ конъюнкции запятой и из множества полученных дизъюнктов попытаться вывести нулевую резольвенту.

При реализации данного алгоритма возможны два случая:

1. Среди текущего множества дизъюнктов нельзя вывести нулевую резольвенту. Это означает, что A не выводима из множества гипотез $\{A_1, \dots, A_n\}$.

2. На каком-то шаге получаем резольвенту, равную нулю. Следовательно, A выводима из множества гипотез $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Схемы из функциональных элементов

Схема из функциональных элементов (СФЭ) – это конечный ориентированный граф без ориентированных циклов, в каждую вершину которого входит не более двух ребер. При этом каждой вершине приписывается символ: переменная x_i , если в эту вершину ребра не входят; отрицание, если в вершину входит одно ребро; конъюнкция или дизъюнкция, если в вершину входит два ребра. Некоторым вершинам приписывается $*$. Элементами схемы называются вершины, помеченные логическими операциями. Функции, отвечающие вершинам, помеченным $*$, называются реализуемыми данной СФЭ.

Сложностью схемы S называется число элементов $L(S)$ в ней.

Сложностью функции f $L(f)$ называется минимальная сложность схемы для f .

Для определения сложности f нужно ее упростить так, чтобы число логических операций было минимальным.

Контактные схемы

Под *контактной схемой (КС)* понимают конечный граф, в котором каждому ребру приписана переменная или ее отрицание и отмечены некоторые вершины – полюса a, b .

Сложностью КС называется число ребер в ней. Контактная схема, имеющая наименьшую сложность среди всех эквивалентных ей схем, называется *минимальной*. Сложностью функции $f_{a,b}$, реализуемой КС, называется сложность минимальной контактной схемы.

Логика предикатов

Предикатом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, аргументы которой определены на некотором множестве M , $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$, а сама она принимает два значения: 1 (истина) и 0 (ложь).

Множество всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$, при которых $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, называется *множеством истинности предиката*:

$$I_p = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in M: P(x_1, \dots, x_n) = 1 \}.$$

Квантор общности. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, определенный для каждого $x \in M$. Тогда выражение $\forall x P(x)$ является истинным высказыванием, если $P(x)$ истинно для всякого $x \in M$, и ложным в противном случае. Символ $\forall x$ называется *квантором общности*.

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, $x \in M$. Тогда выражение $\exists x P(x)$ является истинным высказыванием, если $P(x)$ истинно хотя бы для одного $x \in M$, и ложным в противном случае. Символ $\exists x$ называется *квантором существования*.

Формулы логики предикатов, в которых из логических символов имеются только символы дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, причем символ отрицания встречается лишь над символами предикатов, называются *нормальными формулами*.

Нормальная формула называется *предваренной (ПНФ)*, если она не содержит символов кванторов или все символы кванторов стоят впереди.

Равносильные преобразования логики предикатов

Пусть $A(x)$, $B(x)$ – переменные предикаты, а C – переменное высказывание.

Если $\mu(\tilde{A}) = 0,5$, то высказывание называется *индифферентным*.

На множестве нечетких высказываний вводятся логические операции, аналогичные операциям логики высказываний.

1. *Отрицание* нечеткого высказывания: $\overline{\tilde{A}} = 1 - \tilde{A}$.
2. *Конъюнкция* нечетких высказываний: $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \min(\tilde{A}, \tilde{B})$.
3. *Дизъюнкция* нечетких высказываний: $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \max(\tilde{A}, \tilde{B})$.
4. *Импликация* нечетких высказываний:

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{B} = \max(1 - \tilde{A}, \tilde{B}).$$

5. *Эквиваленция* нечетких высказываний:

$$\tilde{A} \sim \tilde{B} = \min(\max(1 - \tilde{A}, \tilde{B}), \max(\tilde{A}, 1 - \tilde{B})).$$

6. *Неравнозначность* нечетких высказываний:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \max(\min(1 - \tilde{A}, \tilde{B}), \min(\tilde{A}, 1 - \tilde{B})).$$

Старшинство операций определяется аналогично логике высказываний.

Пусть $F_1(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$, $F_2(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ – две нечеткие логические формулы. *Степенью равносильности* формул F_1 , F_2 называется величина

$$\mu(F_1, F_2) = \bigwedge_{\text{по всем наборам } (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)} F_1(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \sim F_2(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n).$$

Если $\mu(F_1, F_2) = 0,5$, то нечеткие формулы F_1, F_2 называются *индифферентными*.

Если $\mu(F_1, F_2) > 0,5$, то нечеткие формулы F_1, F_2 называются *нечетко равносильными*.

Если $\mu(F_1, F_2) < 0,5$, то нечеткие формулы F_1, F_2 называются *нечетко неравносильными*.

Теория алгоритмов

Машина Тьюринга

Машина Тьюринга – абстрактное устройство, состоящее из

бесконечной в обе стороны ленты, считывающей и печатающей головки, способной перемещаться вправо и влево, и управляющего устройства. Лента разбита на ячейки. В ячейках могут быть записаны символы некоторого конечного алфавита

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}.$$

Устройство обладает некоторым конечным набором состояний $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$.

Программа машины Тьюринга представляет собой конечный список команд вида:

$$qa \rightarrow q'a'D, \text{ где } q, q' \in Q; \quad D \in \{R, L, S\},$$

R, L, S – право, лево, стоп.

Команда расшифровывается так: если машина находится в состоянии q и считанный с ленты символ a , то машина переходит в состояние q' , печатает в текущей клетке символ a' и затем выполняет одно из трех действий D .

Изначально машина находится в состоянии q_1 . Если машина пришла в состояние q_0 , то она останавливается.

Машина называется *применимой к некоторой записи* на ленте, если при работе над этой записью после конечного числа шагов она останавливается.

Если она никогда не остановится, то машина называется *неприменимой к этой записи*.

Машину Тьюринга удобно применять при вычислении функций вида

$$f: N^k \rightarrow N^m,$$

где $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех целых неотрицательных чисел.

Число n будем записывать с помощью последовательности из $n+1$ единицы, а набор $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ в виде

$$\dots 0 \underset{n_1+1}{11} \dots 1 \underset{n_2+1}{011} \dots 1 \underset{n_k+1}{011} \dots 1 0 \dots$$

Таким образом, на ленте:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 010; \\ 1 &\rightarrow 0110; \\ 2 &\rightarrow 01110; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Рекурсивные функции

Рассмотрим функции $f: N^n \rightarrow N$, где $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Частичными числовыми функциями $f(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in N$ ($1 \leq i \leq n$) называют функции, определенные не на всех наборах $(x_1, \dots, x_n) \in N^n$.

Назовем *простейшими* следующие всюду определенные функции:

$o(x) = 0$ — нулевая функция;

$s(x) = x + 1$ — функция следования;

$I_n^m(x_1, \dots, x_n) = x_m$, $1 \leq m \leq n$, — функция выбора аргумента.

Операция суперпозиции

Пусть даны функция $f(y_1, \dots, y_m)$ от m аргументов и функции $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$ от n аргументов.

Функция

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

называется *суперпозицией функций* f и $g_1, \dots, g_m$.

Операция примитивной рекурсии

Пусть даны какие-либо две функции $g(x_1, \dots, x_n)$ и

$h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$.

Определим третью функцию $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$
по следующей схеме (схеме *примитивной рекурсии*):

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n), \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$

Операция минимизации

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($x_i \in N$) — некоторая частичная
числовая функция.

Операция минимизации по i -той переменной функции
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

обозначается

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_y (f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_i)$$

и определяется следующим образом.

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный набор чисел из
множества N . Рассмотрим соотношение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_i, \quad (*)$$

которое будем рассматривать как уравнение относительно y .
Это уравнение будем решать подбором, подставляя вместо y
последовательно числа $0, 1, 2, \dots$. Возможны случаи:

- 1) На некотором шаге левая часть соотношения (*) не
определена. В этом случае считаем, что на наборе
 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ операция минимизации не определена.
- 2) На каждом шаге левая часть соотношения (*)
определена, но ни при каких y равенство не
выполняется. В этом случае также считаем, что на
наборе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ операция минимизации не
определена.

- 3) Левая часть соотношения (*) определена при $y=0$, $y=1, \dots, y=y_0-1, y=y_0$, но при $y < y_0$ равенство (*) не выполнялось, а при $y=y_0$ оно выполняется. В этом случае полагаем $g(x_1, x_2, \dots, x_n)=y_0$, т. е. число y_0 считается значением операции минимизации на наборе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КУРСОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Построить таблицу истинности и по ней найти СДНФ, СКНФ.

- | | |
|---|---|
| 1. $(A \oplus B \vee \bar{C}) \rightarrow (\bar{B} \wedge C)$ | 2. $(A \sim B \wedge \bar{C}) \rightarrow (\bar{B} \vee C)$ |
| 3. $(A \sim (B \vee \bar{C})) \rightarrow ((\bar{A} \oplus B) \wedge C)$ | 4. $(A \sim B \wedge \bar{C}) \oplus (\bar{B} \rightarrow C)$ |
| 5. $(A \oplus (B \wedge A)) \rightarrow (\bar{A} \wedge C)$ | |
| 6. $((A \wedge B) \rightarrow C) \sim ((A \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{C})$ | |
| 7. $((\bar{A} \vee \bar{B}) \rightarrow C) \sim ((A \wedge \bar{B}) \rightarrow \bar{C})$ | |
| 8. $((\bar{A} \vee B) \wedge C) \sim ((A \oplus \bar{B}) \rightarrow C)$ | |
| 9. $((\bar{A} \vee B) \rightarrow C) \sim ((A \wedge B) \oplus C)$ | 10. $\overline{(A \oplus C)} \rightarrow (B \vee \bar{C})$ |
| 11. $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \oplus \bar{B}) \wedge \bar{C})$ | 12. $((\bar{A} \vee B) \rightarrow C) \sim \bar{A}$ |
| 13. $(A \sim C) \oplus B$ | 14. $(A \oplus B) \wedge (A \rightarrow C)$ |
| 15. $(A \rightarrow \bar{B}) \wedge (B \oplus C)$ | |
| 16. $(A \sim B) \vee (A \sim \bar{C})$ | |
| 17. $(A \oplus \bar{B}) \wedge (B \rightarrow C)$ | 18. $(\bar{A} \oplus \bar{B}) \wedge (B \rightarrow C)$ |
| 19. $((A \rightarrow B) \wedge (\bar{A} \rightarrow C) \wedge A) \rightarrow \bar{C}$ | 20. $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \rightarrow C)$ |

2. Построить какие-либо ДНФ, КНФ функции, используя тождественные преобразования.

1. $(y \oplus \bar{z}) \vee (x \vee z \rightarrow \bar{y} \wedge \bar{x})$

2. $(\bar{y} \rightarrow z) \oplus ((x \vee \bar{z}) \sim y)$
3. $(y \sim \bar{z}) \rightarrow ((x \wedge z) \oplus (\bar{y} \wedge \bar{x}))$
4. $(y \wedge \bar{x} \rightarrow \bar{z}) \vee (x \wedge z \sim \bar{y} \wedge \bar{x})$
5. $(\bar{y} \oplus z) \vee (x \wedge z \rightarrow y \vee \bar{x})$
6. $(y \rightarrow \bar{z}) \rightarrow ((x \oplus \bar{z}) \sim \bar{y})$
7. $(y \rightarrow \bar{z}) \sim ((\bar{x} \vee z) \oplus (\bar{y} \wedge x))$
8. $(y \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge z \sim (y \rightarrow \bar{x}))$
9. $(\bar{y} \oplus z) \wedge (x \vee z \rightarrow \bar{y} \wedge z)$
10. $(y \vee \bar{z}) \vee ((x \sim z) \rightarrow (\bar{y} \oplus x))$
11. $(\bar{y} \sim z) \oplus ((x \wedge \bar{z}) \rightarrow y)$
12. $(y \oplus \bar{z}) \rightarrow ((x \wedge z) \sim (\bar{y} \vee \bar{x}))$
13. $(y \wedge (\bar{x} \rightarrow z)) \vee (x \wedge z \sim (y \sim \bar{x}))$
14. $(x \oplus \bar{z}) \rightarrow (\bar{y} \vee z \rightarrow y \wedge \bar{x})$
15. $(\bar{y} \wedge z) \vee ((x \oplus z) \sim (y \wedge \bar{x}))$
16. $(y \rightarrow \bar{z}) \sim ((\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y})$
17. $(y \wedge \bar{z}) \oplus ((\bar{x} \wedge z) \sim (y \rightarrow \bar{x}))$
18. $((y \sim \bar{x}) \rightarrow z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z} \rightarrow y \wedge x)$
19. $(\bar{y} \oplus \bar{z}) \sim (x \wedge z \rightarrow \bar{y} \wedge z)$
20. $(y \wedge (\bar{x} \rightarrow z)) \oplus (y \wedge z \sim (z \vee \bar{x}))$

3. Используя алгоритм Куайна, построить семантическое дерево.

1. $(A \oplus B \vee \bar{C}) \rightarrow (\bar{B} \wedge C \sim \bar{A})$
2. $(A \oplus B \wedge \bar{C}) \rightarrow ((\bar{B} \vee C) \sim \bar{A})$
3. $(A \sim (B \vee \bar{C})) \rightarrow ((\bar{A} \oplus B) \wedge C)$
4. $(A \sim B \wedge \bar{C}) \oplus \overline{(\bar{B} \rightarrow C)}$
5. $((\bar{A} \vee B) \rightarrow C) \sim \bar{A}$
6. $\overline{(A \oplus C)} \rightarrow (B \vee \bar{C})$
7. $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \oplus \bar{B}) \wedge \bar{C})$
8. $(A \oplus B) \wedge (A \rightarrow C)$
9. $(A \rightarrow \bar{B}) \wedge (B \oplus C)$
10. $(A \vee (B \oplus C)) \wedge \bar{C}$

11. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
12. $(A \oplus (B \wedge A)) \rightarrow (\bar{A} \wedge C)$
13. $(A \wedge B) \rightarrow ((\bar{A} \vee B) \sim C)$
14. $(A \wedge B) \rightarrow ((B \wedge C) \sim (A \vee \bar{C}))$
15. $((\bar{A} \vee B) \rightarrow C) \sim A.$
16. $(A \oplus C) \rightarrow ((B \vee \bar{C}) \rightarrow A)$
17. $((A \vee B) \rightarrow C) \sim ((A \wedge \bar{B}) \rightarrow C)$
18. $((A \wedge B) \rightarrow C) \sim ((A \vee \bar{B}) \rightarrow \bar{C})$
19. $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow ((A \wedge \bar{B}) \oplus C)$
20. $((A \vee B) \oplus C) \rightarrow ((A \wedge \bar{B}) \sim C)$

4. Решить логическую задачу, записав ее в виде формулы логики высказываний.

1. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Петя в кино.

2. В школе четверем старшеклассникам: Иванову, Петрову, Медведеву, Сидорову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й, 10-й классы. Оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили следующее:

Иванов: «Я убирал 9-й, а Медведев 7-й».

Петров: «Я убирал 9-й, а Иванов 8-й».

Медведев: «Я убирал 8-й, а Петров 10-й».

Сидоров уже ушел домой. Выяснилось, что каждый ученик в одном высказывании солгал, а в другом сказал правду. Какой класс убирал каждый ученик?

3. Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

— Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.

— Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.

Питер, к которому обратился Ник, возмутился:

— Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

4. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

- Смит самый высокий;
- играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
- играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;
- когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;
- Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

5. Три одноклассника — Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой физиком, а третий юристом. Один полюбил туризм, другой бег, страсть третьего — регби.

- Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра — единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги.

- Забавно, но у двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен. Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

6. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

7. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты соглашения о полном разоружении, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

- Россия — "Проект не наш, проект не США";
- США — "Проект не России, проект Китая";
- Китай — "Проект не наш, проект России".

Один из них (самый откровенный) оба раза говорил правду; второй (самый скрытный) оба раза говорил неправду, третий (осторожный) один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Определите, представителями каких стран являются откровенный, скрытный и осторожный министры.

8. В соревнованиях по гимнастике на первенство школы участвуют Алла, Валя, Таня и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

- 1: "Первой будет Таня, Валя будет второй".
- 2: "Второй будет Таня, Даша - третьей".
- 3: "Алла будет второй, Даша - четвертой".

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний истинно,

другое же ложно. Какое место на соревнованиях заняла каждая из девочек, если все они оказались на разных местах?

9. Алеша, Боря и Гриша нашли в земле сосуд. Каждый из них высказал по два предположения.

Алеша: " Это сосуд греческий, V века".

Боря: " Это сосуд финикийский, III века".

Гриша: " Это сосуд не греческий, IV века".

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух своих предположений. Где и в каком веке был изготовлен сосуд?

10. На ледяном поле 5 хоккеистов: Ольховский, Малышев, Белов, Таманин, Лавров - штурмовали ворота. Раздался свисток судьи. "Удаляет двух", - подумали спортсмены. "Без Малышева или Ольховского я не останусь на поле", - сказал Таманин. "Я тоже, "- сказал Лавров. "Удаляют либо меня с Беловым, либо Таманина с Лавровым", - сказал Малышев. Когда судья объявил о своем решении, все оказались правы и, кроме того, Ольховский и Белов не остались вместе на поле. Кто остался на поле?

11. В спортивных соревнованиях принимали участие пять команд: "Вымпел", "Метеор", "Нептун", "Старт" и "Чайка". Об их итогах соревнования имеется пять высказываний:

1). Второе место занял "Вымпел", а "Старт" оказался на третьем.

2). Хорошо выступала команда "Нептун", она стала победителем, а "Чайка" вышла на второе место.

3). Да нет же, "Чайка" заняла только третье место, а "Нептун"- был последним.

4). Первое место по праву завоевал "Старт", а "Метеор" был 4-м.

5). Да, "Метеор", действительно, был четвертым, а "Вымпел" был 2-м.

Известно, что команды не делили места между собой и что в каждом высказывании одно утверждение правильное, а другое нет.

Как распределились места между командами?

12. Перед началом забегов зрители обсуждали скаковые возможности трех лучших лошадей с кличками "Абрек", "Ветер", "Стрелок".

- Победит или "Абрек", или "Стрелок", - сказал один болельщик.

- Если "Абрек" будет вторым, то победу принесет "Ветер", - сказал другой болельщик.

- Много вы понимаете в лошадях, - возмутился третий болельщик. Вторым придет или "Ветер", или "Абрек".

- А я вам скажу, - вмешался четвертый болельщик, - что если "Абрек" придет третьим, то "Стрелок" не победит.

После забега выяснилось, что три лошади - "Абрек", "Ветер" и "Стрелок" - заняли три первых места, не деля между собой ни одного из мест, и что все четыре предсказания болельщиков были правильны. Как кончился забег?

13. Один из 3 братьев поставил на скатерть кляксу.

- Кто запачкал скатерть? - спросила бабушка.

- Витя не ставил кляксу, - сказал Алеша, - и Боря этого не делал.

- Ну а ты что скажешь? - спросила бабушка Борю.

- Это Витя поставил кляксу, - сказал Боря, - А Алеша не пачкал скатерть.

- Ну а каков твой ответ? - спросила она Витю.

- Не сердись, бабуля! Я знаю, что Боря не мог этого сделать.

А я сегодня не готовил уроков. - сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

14. Нужно для 4 дежурных - Антипова, Климова, Маркова и Лебедева - составить график дежурств на агитпункте с соблюдением следующих условий:

- 1) Если Лебедев не будет дежурить в понедельник, то в понедельник согласен дежурить Климов.
 - 2) Если Климов не сможет дежурить ни в понедельник, ни в четверг, то Антипов будет дежурить в понедельник.
 - 3) Если Марков не сможет дежурить в четверг, то Климов будет дежурить в среду.
 - 4) Если Лебедев придет дежурить во вторник, то Климов не будет дежурить в понедельник.
 - 5) Если Антипов не сможет дежурить в Понедельник, то Марков не сможет дежурить во вторник.
- Каким должен быть график дежурств?

15. Обсуждался вопрос о включении в состав сборной команды пяти молодых игроков: Асеева, Валеева, Сватеева, Деева и Евтеева.

Выбор обусловлен следующими условиями:

- 1) В команду необходимо включить не менее чем одного из трех игроков: Асеева, Валеева, Евтеева, но не более чем одного из трех игроков: Асеева, Сватеева, Деева.
- 2) Сватеева можно включить в сборную без Валеева тогда и только тогда, когда Асеев будет включен, а Деев не будет включен.
- 3) Если Валеев будет включен в сборную, а Сватеев не будет включен, то сборную нужно пополнять и Деевым, и Евтеевым.
- 4) Если Асеев не будет включен в команду, то нужно в нее включить и Сватеева, и Евтеева.

Кого из игроков можно включить в сборную команду?

16. Семья, состоящая из отца, матери и трех дочерей – Ани, Веры и Светы, – купила телевизор. Каждому, конечно, хотелось посмотреть передачу в первый вечер.

- Нам нужно распределить обязанности, чтобы не остаться без ужина, - сказал папа.

- Правильно, - поддержала мама. - Но только когда ты будешь смотреть передачу, я тоже сяду у телевизора.

- Хорошо, - согласился папа. - Кому из нас повезло, так это Свете и Вере, - улыбнулся папа.

- По крайней мере, одна из них получит удовольствие.
- А нам с тобой, Анечка, придется смотреть передачу только по очереди, - сказала мама.
- Я согласна, - ответила Аня. - Только ты нам разреши с Верой вместе работать на кухне или вместе быть у телевизора.
- Пожалуй, Свету одну нельзя оставлять. - сказал папа. - Если она пожелает смотреть передачу, то придется и мне с Верой посидеть с ней.
Все предложения были приняты. Кто смотрел передачу в первый вечер?

17. Четыре молодых рабочих - Антонов, Петров, Степанов и Демьянов - работают на одном предприятии и учатся заочно. Как составить для них график свободных от работы дней в первые четыре дня, исходя из таких условий производства:

1) если во вторник выходными будут Демьянов или Антонов, то Степанову нужно дать выходной в понедельник;

2) если Демьянова освободить от работы в четверг, то Антонова нужно освободить в понедельник, и Степанова в среду;

3) если Степанова освободить от работы во вторник или Демьянова освободить в среду, то Петрову нужно давать выходной день в четверг;

4) если Антонов будет освобожден в среду, то у Петрова выходной день будет во вторник, а если Петрову поставить выходной в среду, то Антонов может не приходить на работу во вторник;

5) если Демьянову высвободить понедельник, то у Степанова выходной придется на среду, а если Демьянов получит выходной в среду, то тогда Антонов может не приходить на работу во вторник.

18. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что

в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

19. В поездке пятеро друзей — Антон, Борис, Вадим, Дима и Гриша, познакомились с попутчицей. Они предложили ей отгадать их фамилии, причём каждый из них высказал одно истинное и одно ложное утверждение:

Дима сказал: "Моя фамилия — Мишин, а фамилия Бориса — Хохлов". Антон сказал: "Мишин — это моя фамилия, а фамилия Вадима — Белкин". Борис сказал: "Фамилия Вадима — Тихонов, а моя фамилия — Мишин". Вадим сказал: "Моя фамилия — Белкин, а фамилия Гриши — Чехов". Гриша сказал: "Да, моя фамилия Чехов, а фамилия Антона — Тихонов".

Какую фамилию носит каждый из друзей?

20. Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

- 1) Сергей - первый, Роман - второй;
- 2) Сергей - второй, Виктор - третий;
- 3) Юрий - второй, Виктор - четвертый.

Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?

5. Методом резолюций проверить выводимость формулы.

1. $A \vee C \rightarrow B; C \rightarrow A \vee B; B \wedge C \rightarrow A \vee \bar{B} \mid - B \rightarrow C$
2. $(A \rightarrow B) \vee \bar{A}; C \wedge \bar{B} \mid - (\bar{A} \rightarrow B) \vee \bar{C}$
3. $A \rightarrow B; \bar{B} \rightarrow \bar{C}; B \vee \bar{C} \mid - (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
4. $A \rightarrow B \wedge C; B \rightarrow D; C \rightarrow E; \bar{A} \rightarrow F; C \mid - (D \wedge E) \vee F$
5. $(A \rightarrow B) \vee \bar{C}; C \rightarrow \bar{D}; B \vee D \mid - (\bar{A} \rightarrow \bar{D}) \wedge \bar{C}$
6. $A \wedge \bar{C} \rightarrow B; C \rightarrow \bar{A} \wedge B; B \wedge C \rightarrow (A \rightarrow \bar{B}) \mid - A \rightarrow (B \rightarrow C)$
7. $(A \rightarrow B) \vee D; C \wedge \bar{B}; C \rightarrow D; D \wedge B \mid - (\bar{A} \rightarrow D) \vee \bar{B}$
8. $A \rightarrow (B \rightarrow C); \bar{A} \wedge B; \bar{B} \oplus C \mid - \bar{A} \rightarrow (\bar{C} \wedge B)$

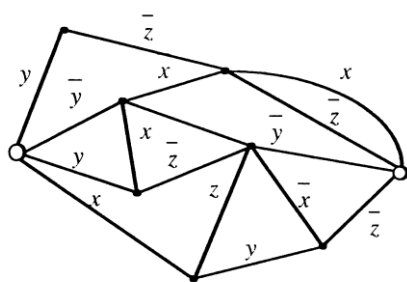
9. $(A \rightarrow B) \vee D; C \oplus \bar{B}; C \rightarrow D; D \wedge B \mid - (\bar{A} \rightarrow D) \wedge \bar{B}$
10. $A \rightarrow B \wedge C; B \rightarrow D; C \oplus E; \bar{A} \rightarrow C \mid - (D \vee E) \wedge (C)$
11. $A \vee C \rightarrow B; \bar{C} \oplus B; B \wedge C \rightarrow A \mid - (B \vee \bar{A}) \rightarrow C$
12. $A \rightarrow B; \bar{B} \rightarrow \bar{C}; B \oplus \bar{C} \mid - (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$
13. $A \rightarrow B; B \oplus C; \bar{B} \wedge \bar{D} \rightarrow \bar{C} \mid - (A \vee D) \rightarrow C$
14. $A \rightarrow B \wedge C; B \oplus D; \bar{A} \wedge D \rightarrow C \mid - \bar{C} \rightarrow (A \vee \bar{D})$
15. $A \rightarrow (B \rightarrow C); C \oplus \bar{D} \mid - (\bar{A} \wedge B) \rightarrow D$
16. $A \rightarrow (B \rightarrow C); A \oplus B; A \mid - (\bar{B} \vee C) \rightarrow \bar{A}$
17. $A \rightarrow B; B \rightarrow C; C \oplus D \mid - \bar{A} \rightarrow (\bar{D} \vee C)$
18. $A \rightarrow B; B \rightarrow C; C \oplus \bar{D} \mid - \bar{A} \rightarrow (B \vee D)$
19. $A \wedge B \vee C; B \rightarrow \bar{D}; C \wedge E; \bar{A} \rightarrow B \mid - D \rightarrow (E \rightarrow B)$
20. $A \rightarrow (B \rightarrow C); A \oplus D \mid - \bar{C} \rightarrow (D \vee \bar{B})$

6. Построить СФЭ, оценить ее сложность и сложность функции, построить минимальную схему.

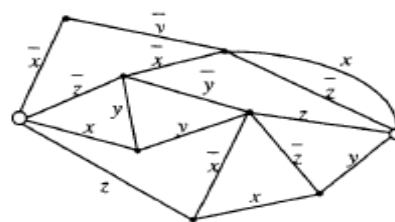
- | | |
|--|--|
| 1. $(A \wedge B \vee \bar{C}) \wedge (\overline{\bar{C} \vee B}) \vee \bar{A}$ | 2. $(\overline{A \vee B \wedge \bar{C}}) \vee (\overline{\bar{C} \vee A \wedge B})$ |
| 3. $(A \wedge B \vee \bar{C}) \vee (\overline{\bar{C} \vee B}) \wedge B$ | 4. $(A \wedge \bar{B} \vee \bar{C}) \vee (\overline{\bar{C} \vee B \wedge A})$ |
| 5. $(A \wedge \bar{B} \vee C) \wedge (\overline{A \vee \bar{C}}) \vee B$ | 6. $(\overline{A \wedge \bar{B} \vee C}) \wedge (\overline{B \vee \bar{C}}) \vee \bar{A}$ |
| 7. $(\overline{\bar{A} \wedge B \vee C}) \vee (\overline{B \vee \bar{C}}) \wedge \bar{A}$ | 8. $(\overline{\bar{A} \vee B \wedge C}) \vee (\overline{B \vee \bar{C}}) \wedge \bar{A}$ |
| 9. $(\bar{A} \vee \bar{B} \wedge C) \vee (\overline{A \vee B}) \wedge \bar{C}$ | 10. $(\bar{A} \vee \bar{B} \wedge C) \vee (\overline{A \wedge B \vee \bar{C}})$ |
| 11. $(\bar{A} \vee \bar{B} \wedge C) \vee (\overline{C \vee A \wedge B})$ | 12. $(A \vee \bar{B} \wedge C) \vee (\overline{A \vee \bar{C}}) \wedge B$ |
| 13. $(A \wedge \bar{B} \vee C) \wedge (\overline{A \wedge \bar{C}}) \vee \bar{A}$ | 14. $(\overline{A \wedge \bar{B} \vee C}) \wedge (\overline{B \vee \bar{C}}) \vee \bar{A}$ |
| 15. $(\overline{\bar{A} \wedge C \vee \bar{B}}) \vee (\overline{B \vee A}) \wedge \bar{C}$ | 16. $(\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}) \vee (\overline{\bar{C} \vee A}) \wedge \bar{B}$ |
| 17. $(A \wedge \bar{B} \vee \bar{C}) \vee (\overline{\bar{A} \vee B}) \wedge C$ | 18. $(A \wedge \bar{B} \vee \bar{C}) \vee (\overline{\bar{C} \vee B}) \wedge C$ |
| 19. $(A \wedge \bar{B} \vee \bar{C}) \vee (\overline{A \wedge \bar{B}}) \wedge C$ | 20. $(\overline{\bar{A} \vee B \wedge C}) \vee (\overline{B \vee A}) \wedge C$ |

7. Найти функцию проводимости, сложность контактной схемы и минимальную КС.

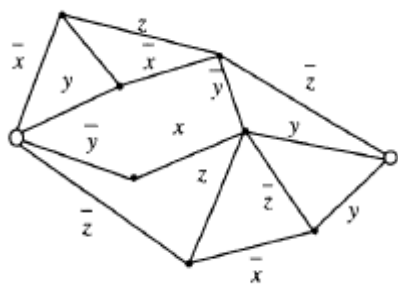
1.



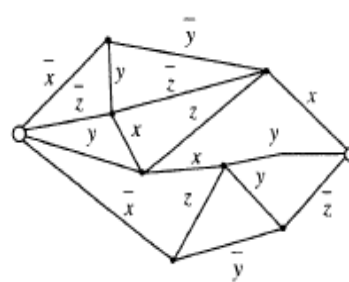
2.



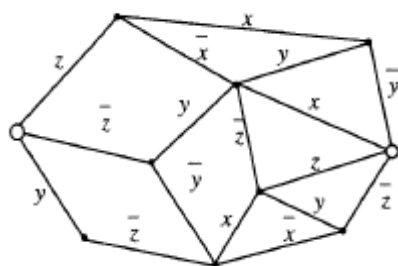
3.



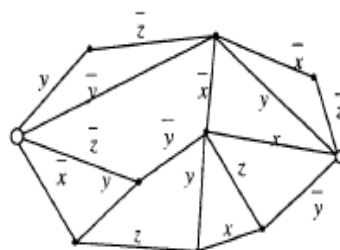
4.



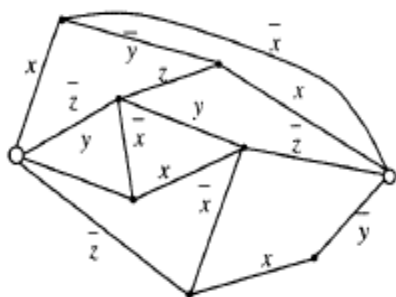
5.



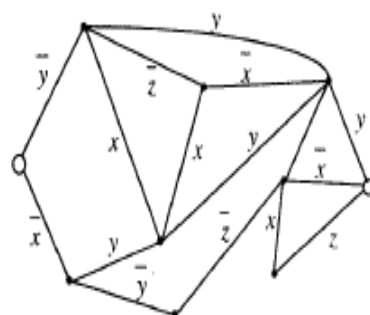
6.



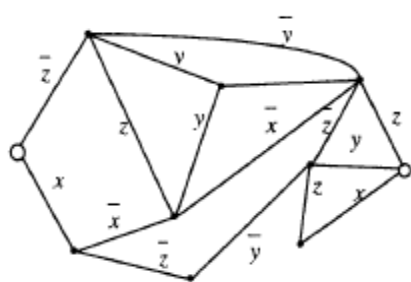
7.



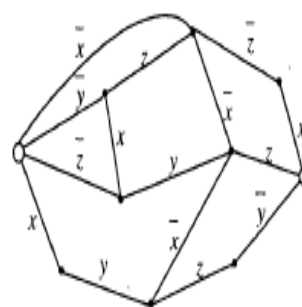
8.



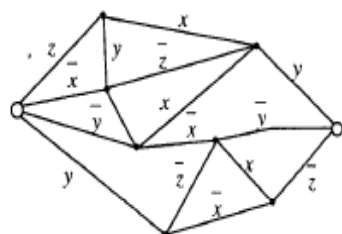
9.



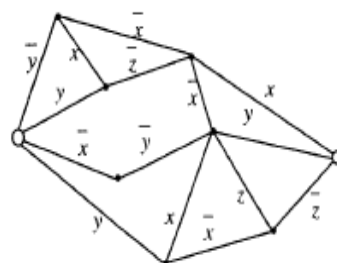
10.



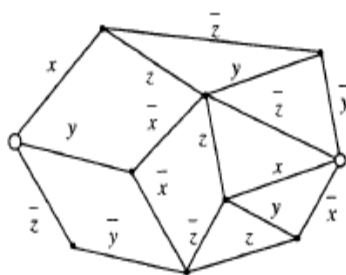
11.



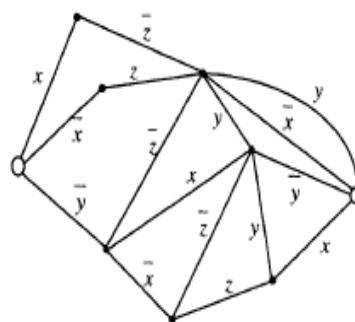
12.



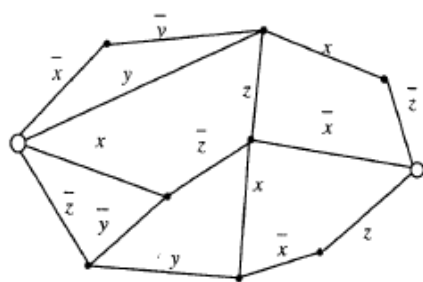
13.



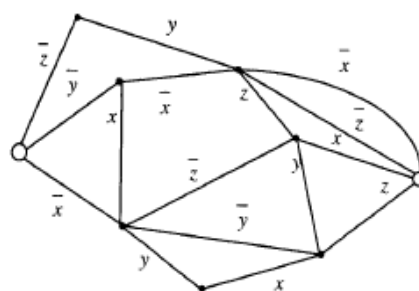
14.



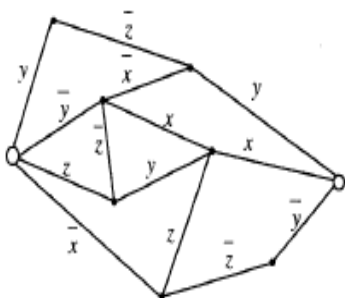
15.



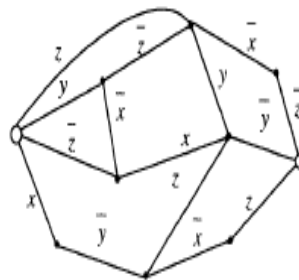
16.



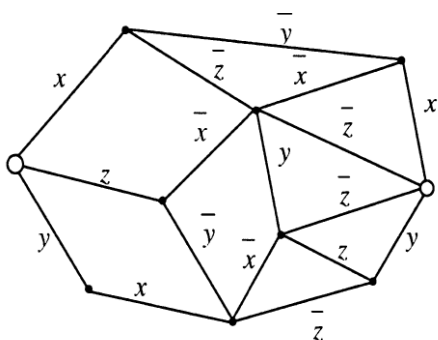
17.



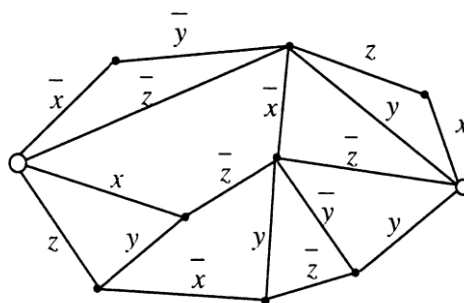
18.



19.



20.



8. Найти область истинности предиката, заданного на множестве M .

1. $P(x) \rightarrow \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x)$ = « x не больше 7», $Q(x)$ = « x делится на 4».

2. $\bar{P}(x) \oplus \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x)$ = « x больше 3», $Q(x)$ = « x не больше 6».

3. $\bar{P}(x) \vee Q(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x)$ = « x - нечетное», $Q(x)$ = « x делится на 3».

4. $\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ не больше } 6 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ делится на } 4 \rangle$.
5. $P(x) \wedge \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ делится на } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 7 \rangle$.
6. $P(x) \rightarrow \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ не меньше } 6 \rangle$, $Q(x) = \langle x - \text{четное} \rangle$.
7. $\bar{P}(x) \oplus \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ делится на } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 5 \rangle$.
8. $\bar{P}(x) \vee Q(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ не меньше } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x - \text{четное} \rangle$.
9. $P(x) \wedge \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x - \text{нечетное} \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ делится на } 5 \rangle$.
10. $\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ делится на } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 5 \rangle$.
11. $P(x) \sim \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ не меньше } 6 \rangle$, $Q(x) = \langle x - \text{четное} \rangle$.
12. $P(x) \wedge \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ больше } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 6 \rangle$.
13. $P(x) \rightarrow \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x - \text{четное} \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ делится на } 3 \rangle$.
14. $\bar{P}(x) \oplus \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 $P(x) = \langle x \text{ больше } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ делится на } 4 \rangle$.
15. $P(x) \sim \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x) = \langle x \text{ делится на } 5 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 4 \rangle$.

16. $\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x) = \langle x - \text{нечетное} \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ делится на } 3 \rangle$.

17. $\bar{P}(x) \vee Q(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x) = \langle x \text{ делится на } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 4 \rangle$.

18. $P(x) \wedge \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x) = \langle x \text{ не меньше } 5 \rangle$, $Q(x) = \langle x - \text{четное} \rangle$.

19. $\bar{P}(x) \oplus \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x) = \langle x \text{ больше } 3 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ не больше } 6 \rangle$.

20. $P(x) \rightarrow \bar{Q}(x)$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$P(x) = \langle x \text{ не больше } 7 \rangle$, $Q(x) = \langle x \text{ делится на } 4 \rangle$.

9. Выразить область истинности данного предиката через области истинности входящих в него предикатов (используйте обозначения I_P , I_Q и т.д. для областей истинности и $\bar{I}_P$, $\bar{I}_Q, \dots$ для подмножеств множеств значений, не входящих в область истинности).

1. $((\bar{P}(x) \vee \bar{Q}(x)) \wedge R(x)) \vee (\bar{R}(x) \wedge \bar{P}(x))$.

2. $(P(x) \rightarrow R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \bar{R}(x)) \wedge (P(x) \rightarrow \bar{R}(x))$.

3. $\overline{(P(x) \vee Q(x))} \sim (\bar{P}(x) \vee Q(x))$.

4. $(\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\bar{P}(x) \vee Q(x))$.

5. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \bar{R}(x))$.

6. $\overline{(P(x) \wedge \bar{R}(x))} \wedge \overline{(P(x) \wedge Q(x))} \wedge (P(x) \rightarrow Q(x))$.

7. $(P(x) \vee \bar{Q}(x)) \wedge \overline{(Q(x) \rightarrow R(x))}$.

8. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\bar{P}(x) \rightarrow \bar{R}(x))$.

9. $((\bar{P}(x) \vee \bar{Q}(x)) \wedge R(x)) \vee (R(x) \rightarrow P(x)).$
10. $(P(x) \rightarrow R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge (P(x) \vee \bar{R}(x)).$
11. $\overline{(P(x) \vee \bar{Q}(x))} \rightarrow (P(x) \wedge R(x)).$
12. $(\bar{P}(x) \vee Q(x)) \wedge (\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)).$
13. $(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\bar{Q}(x) \rightarrow R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x)).$
14. $\overline{(P(x) \wedge \bar{R}(x))} \wedge (P(x) \rightarrow Q(x)).$
15. $\overline{(P(x) \wedge Q(x))} \wedge (P(x) \rightarrow \bar{R}(x)).$
16. $(\bar{P}(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \bar{R}(x)).$
17. $(P(x) \rightarrow \bar{Q}(x)) \wedge \overline{(Q(x) \vee R(x))}.$
18. $(\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\bar{P}(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow \bar{R}(x)).$
19. $(\bar{P}(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \overline{(\bar{P}(x) \vee Q(x))}.$
20. $\overline{(P(x) \wedge Q(x))} \wedge (\bar{P}(x) \rightarrow R(x)).$

10. Привести к предваренной нормальной форме.

1. $\exists z(\forall x \forall y A(x, y, z) \vee \forall y B(y, z)) \rightarrow \forall x \forall y \exists z C(x, y, z)$
2. $(\exists z(\forall x \forall y A(x, y) \vee \forall z \bar{B}(y, z)) \rightarrow \overline{\exists z C(x, y, z)})$
3. $\overline{\exists z(\forall x \forall y A(x, y, z) \rightarrow \forall x B(x, z))} \vee \exists z C(x, y, z)$
4. $(\forall x \forall y A(x, y) \vee \forall y \exists z B(x, y, z)) \rightarrow \forall x \exists z \exists y \bar{C}(x, y, z)$
5. $(\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \vee \forall z B(y, z)) \rightarrow \forall x \exists y \exists z \bar{C}(x, y, z)$
6. $(\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \vee \forall x \exists z B(x, z)) \rightarrow \forall x \forall y \forall z C(x, y, z)$
7. $(\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \rightarrow \forall z B(x, z)) \wedge \forall x \forall y \exists z C(x, y, z)$
8. $\exists z(\forall x \forall y A(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y B(x, y, z)) \rightarrow \forall z C(x, y, z)$
9. $(\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \vee \forall x \forall y \forall z \bar{B}(x, y, z)) \wedge \overline{\exists z C(x, y, z)}$
10. $(\forall x \forall y \forall z A(x, y, z) \wedge \forall x \exists z B(x, z)) \vee \overline{\exists x \forall y \forall z C(x, y, z)}$
11. $(\forall x \exists y \exists z A(x, y, z) \rightarrow \exists x \exists z B(x, z)) \vee \forall x \forall y \forall z \bar{C}(x, y, z)$
12. $(\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \wedge \forall y \exists z B(y, z)) \rightarrow \forall x \forall y \forall z \bar{C}(x, y, z)$

13. $\exists z(\forall x\forall yA(x, y) \wedge \forall x\forall yB(x, y, z)) \rightarrow \forall z\exists x\bar{C}(x, y, z)$
14. $\overline{(\forall x\forall yA(x, y, z) \vee \forall x\forall y\exists zB(x, y, z))} \vee \exists x\forall z\forall yC(x, y, z)$
15. $(\forall x \ni y\exists zA(x, y, z) \vee \forall x\exists y\forall zB(x, y, z)) \rightarrow \exists z\exists y\bar{C}(x, y, z)$
16. $(\forall x\forall y\exists zA(x, y, z) \wedge \forall y\exists zB(y, z)) \rightarrow \forall z\exists y\bar{C}(x, y, z)$
17. $(\forall x\forall y\exists zA(x, y, z) \rightarrow \forall x\exists y\forall zB(x, y, z)) \vee \overline{\forall x\exists yC(x, y, z)}$
18. $(\forall x\forall y\exists zA(x, y, z) \wedge \overline{\forall x\exists zB(x, z)}) \rightarrow \forall x\exists y\exists zC(x, y, z)$
19. $(\forall x\forall y\forall zA(x, y, z) \wedge \overline{\forall x\forall y\exists zB(x, z)}) \rightarrow \forall x\exists z\bar{C}(x, y, z)$
20. $(\forall x\forall y\exists zA(x, y, z) \rightarrow \overline{\exists x\forall y\exists zB(x, y, z)}) \wedge \forall x\exists y\exists zC(x, y, z)$

11. Найти степень истинности нечеткого высказывания.

1. $(\tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \wedge \bar{\tilde{C}}) \sim (\bar{\tilde{B}} \vee \tilde{C}), \quad \tilde{A}=0.3, \tilde{B}=0.5, \tilde{C}=0.8.$
2. $(\tilde{A} \sim \bar{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \rightarrow (\tilde{B} \wedge \bar{\tilde{C}}), \quad \tilde{A}=0.2, \tilde{B}=0.5, \tilde{C}=0.7.$
3. $(\bar{\tilde{A}} \wedge \tilde{B} \sim \bar{\tilde{C}}) \vee (\bar{\tilde{B}} \rightarrow \tilde{C}), \quad \tilde{A}=0.4, \tilde{B}=0.5, \tilde{C}=0.$
4. $(\tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \wedge \bar{\tilde{C}}) \rightarrow (\bar{\tilde{B}} \sim \tilde{C} \vee \tilde{A}), \quad \tilde{A}=0.3, \tilde{B}=1, \tilde{C}=0.8.$
5. $(\tilde{A} \rightarrow \bar{\tilde{B}} \sim \tilde{C}) \wedge (\tilde{B} \vee \bar{\tilde{C}}), \quad \tilde{A}=0.4, \tilde{B}=0.6, \tilde{C}=0.9.$
6. $(\tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \wedge \bar{\tilde{C}}) \oplus (\tilde{B} \sim \tilde{C} \vee \bar{\tilde{A}}), \quad \tilde{A}=0.2, \tilde{B}=0.1, \tilde{C}=1.$
7. $(\tilde{A} \wedge \bar{\tilde{B}}) \rightarrow (\tilde{B} \sim \bar{\tilde{C}} \vee \tilde{A}), \quad \tilde{A}=0.8, \tilde{B}=0.1, \tilde{C}=0.3.$
8. $(\bar{\tilde{A}} \rightarrow \tilde{B} \wedge \bar{\tilde{C}}) \wedge (\bar{\tilde{B}} \vee \tilde{C}), \quad \tilde{A}=0.6, \tilde{B}=0.2, \tilde{C}=0.7.$
9. $(\bar{\tilde{A}} \rightarrow \tilde{B} \wedge \tilde{C}) \vee (\bar{\tilde{B}} \sim \bar{\tilde{C}} \wedge \tilde{A}), \quad \tilde{A}=1, \tilde{B}=0.3, \tilde{C}=0.7.$
10. $(\tilde{A} \oplus \bar{\tilde{B}}) \sim (\tilde{B} \rightarrow \tilde{C} \vee \bar{\tilde{A}}), \quad \tilde{A}=1, \tilde{B}=0.6, \tilde{C}=0.7.$
11. $(\tilde{A} \wedge \bar{\tilde{C}}) \sim (\bar{\tilde{B}} \rightarrow \tilde{C} \vee \bar{\tilde{A}}), \quad \tilde{A}=0.8, \tilde{B}=1, \tilde{C}=0.2.$
12. $(\bar{\tilde{A}} \rightarrow \bar{\tilde{B}} \wedge \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \rightarrow \bar{\tilde{C}}), \quad \tilde{A}=0.2, \tilde{B}=0.4, \tilde{C}=0.6.$
13. $(\tilde{A} \oplus \bar{\tilde{B}} \wedge \bar{\tilde{C}}) \sim (\tilde{B} \rightarrow \tilde{C} \vee \bar{\tilde{A}}), \quad \tilde{A}=0.7, \tilde{B}=1, \tilde{C}=0.2.$

14. $(\bar{A} \wedge \tilde{B}) \oplus (\bar{\tilde{B}} \sim \tilde{C} \vee \tilde{A}), \quad \tilde{A}=0.2, \tilde{B}=0.9, \tilde{C}=1.$
15. $(\bar{A} \wedge \tilde{B} \rightarrow \bar{\tilde{C}}) \oplus (\bar{\tilde{B}} \vee \tilde{C}), \quad \tilde{A}=0.3, \tilde{B}=0.8, \tilde{C}=0.6.$
16. $(\bar{A} \vee \tilde{B} \rightarrow \tilde{C}) \rightarrow (\bar{\tilde{B}} \sim \bar{\tilde{C}} \wedge \tilde{A}), \quad \tilde{A}=0.6, \tilde{B}=0.2, \tilde{C}=0.8.$
17. $(\tilde{A} \sim \bar{\tilde{B}}) \wedge (\bar{\tilde{B}} \rightarrow \bar{\tilde{C}} \vee \tilde{A}), \quad \tilde{A}=0.4, \tilde{B}=1, \tilde{C}=0.2.$
18. $(\tilde{A} \oplus \bar{\tilde{C}}) \wedge (\bar{\tilde{B}} \rightarrow \tilde{C} \vee \tilde{A}), \quad \tilde{A}=0.4, \tilde{B}=0.3, \tilde{C}=1.$
19. $(\bar{A} \rightarrow \bar{\tilde{B}} \vee \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \wedge \tilde{C}), \quad \tilde{A}=0.4, \tilde{B}=0.5, \tilde{C}=0.2.$
20. $(\tilde{A} \sim \tilde{B} \wedge \bar{\tilde{C}}) \rightarrow (\bar{\tilde{B}} \oplus \tilde{C} \vee \bar{\tilde{A}}), \quad \tilde{A}=0.4, \tilde{B}=1, \tilde{C}=0.3.$

12. Определить степень равносильности формул F_1, F_2 при условии, что $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества M_1, M_2 .

1. $F_1 = \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \wedge \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,2; 0,3\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,6\}$
2. $F_1 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \vee \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,3; 0,5\}; \quad M_2 = \{0,4; 0,1\}$
3. $F_1 = \tilde{X} \vee \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,1; 0,2\}; \quad M_2 = \{0,3; 0,4\}$
4. $F_1 = \tilde{X} \vee \bar{\tilde{Y}}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \wedge \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,7; 0,1\}; \quad M_2 = \{0,2; 0,4\}$
5. $F_1 = \tilde{X} \rightarrow \bar{\tilde{Y}}; \quad F_2 = \tilde{X} \oplus \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,3; 0,4\}; \quad M_2 = \{0,5; 0,6\}$
6. $F_1 = \tilde{X} \wedge \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,7; 0,9\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,4\}$
7. $F_1 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \bar{\tilde{Y}}; \quad F_2 = \tilde{X} \wedge \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,3; 0,5\}; \quad M_2 = \{0,4; 0,6\}$
8. $F_1 = \tilde{X} \wedge \bar{\tilde{Y}}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \vee \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,2; 0,6\}; \quad M_2 = \{0,3; 0,9\}$
9. $F_1 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{X} \wedge \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,1; 0,5\}; \quad M_2 = \{0,4; 0,6\}$
10. $F_1 = \tilde{X} \oplus \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,2; 0,8\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,3\}$
11. $F_1 = \bar{\tilde{X}} \vee \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{X} \oplus \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,4; 0,7\}; \quad M_2 = \{0,3; 0,8\}$
12. $F_1 = \tilde{X} \sim \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \wedge \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,2; 0,6\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,4\}$
13. $F_1 = \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \sim \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,7; 0,8\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,5\}$
14. $F_1 = \tilde{X} \vee \bar{\tilde{Y}}; \quad F_2 = \bar{\tilde{X}} \sim \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,2; 0,6\}; \quad M_2 = \{0,7; 0,9\}$
15. $F_1 = \bar{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{X} \sim \bar{\tilde{Y}}; \quad M_1 = \{0,1; 0,3\}; \quad M_2 = \{0,5; 0,6\}$

16. $F_1 = \tilde{X} \oplus \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{X} \vee \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,2; 0,4\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,9\}$
17. $F_1 = \tilde{X} \vee \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{X} \sim \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,3; 0,4\}; \quad M_2 = \{0,5; 0,7\}$
18. $F_1 = \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}; \quad F_2 = \tilde{X} \vee \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,2; 0,6\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,3\}$
19. $F_1 = \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}; \quad F_2 = \tilde{X} \vee \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,4; 0,9\}; \quad M_2 = \{0,2; 0,7\}$
20. $F_1 = \tilde{X} \sim \tilde{Y}; \quad F_2 = \tilde{X} \vee \tilde{Y}; \quad M_1 = \{0,6; 0,7\}; \quad M_2 = \{0,1; 0,2\}$

13. Найти результат применения машины Тьюринга к записи на ленте.

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 0 \rightarrow q_0 0R.
 \end{array}
 \quad K: 0 \underset{q_1}{111110}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 0 \rightarrow q_0 0R.
 \end{array}
 \quad K: 0 \underset{q_1}{11010}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 0 \rightarrow q_0 0R.
 \end{array}
 \quad K: 0 \underset{q_1}{10000110}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
 q_2 0 \rightarrow q_0 0R.
 \end{array}
 \quad K: 0 \underset{q_1}{111010}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_2 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_2 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_3 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_3 0 \rightarrow q_0 0.
 \end{array}
 \quad K: \underset{q_1}{111001}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_2 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_2 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_3 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_3 0 \rightarrow q_0 0.
 \end{array}
 \quad K: \underset{q_1}{11001101}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_2 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_2 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_3 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_3 0 \rightarrow q_0 0.
 \end{array}
 \quad K: \underset{q_1}{100001}$$

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
 q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_2 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_2 0 \rightarrow q_2 0R \\
 q_3 1 \rightarrow q_3 1R \\
 q_3 0 \rightarrow q_0 0.
 \end{array}
 \quad K: \underset{q_1}{110011}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 0 \rightarrow q_3 0L \\
q_3 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_3 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{111101}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 0 \rightarrow q_3 0L \\
q_3 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_3 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{11111}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 0 \rightarrow q_3 0L \\
q_3 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_3 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{110101}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_1 0R \\
q_2 0 \rightarrow q_3 0L \\
q_3 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_3 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{110011}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_0 1 \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_2 0 \rightarrow q_0 1.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{01110}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_0 1 \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_2 0 \rightarrow q_0 1.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{011010}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_0 1 \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_2 0 \rightarrow q_0 1.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{0111110}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_0 1 \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1R \\
q_2 0 \rightarrow q_0 1.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{0110110}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0L \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_2 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{110011}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0L \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_2 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{110101}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0L \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_2 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{111101}$$

$$\begin{array}{l}
q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\
q_1 0 \rightarrow q_2 0L \\
q_2 1 \rightarrow q_2 1L \\
q_2 0 \rightarrow q_0 0.
\end{array}
\quad K : \underset{q_1}{11111}$$

14. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию.

$$1. \quad f(x) = \frac{2}{4-x}$$

$$2. \quad f(x) = 2^{x-1}$$

$$3. \quad f(x, y) = x + 2y$$

$$4. \quad f(x, y) = x - y, \quad x \geq y$$

$$5. \quad f(x) = \frac{x+3}{2}$$

$$6. \quad f(x) = 2x$$

$$7. \quad f(x, y) = 2x + 1$$

$$8. \quad f(x, y) = 3x - 2$$

$$9. \quad f(x, y) = x \div y$$

$$10. \quad f(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$11. \quad f(x) = \left\lceil \frac{x+3}{2} \right\rceil$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{четное} \\ 0, & x - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$13. \quad f(x) = \left\lceil \frac{x+2}{3} \right\rceil$$

$$14. \quad f(x) = \left\lceil \frac{3}{x} \right\rceil$$

$$15. \quad f(x, y) = x \div 1$$

$$16. \quad f(x) = \left\lceil \frac{2}{x-3} \right\rceil$$

$$17. \quad f(x, y) = 2x + y$$

$$18. \quad f(x) = \frac{3}{5-x}$$

$$19. \quad f(x) = 2^{1-x}$$

$$20. \quad f(x) = 2^{x+y}$$

15. Найти функцию $f(x, y)$, получаемые из $g(x)$, $h(x, y, z)$ с помощью операции примитивной рекурсии.

$$1. \quad g(x) = x, \quad h(x, y, z) = x + 2z$$

$$2. \quad g(x) = x, \quad h(x, y, z) = zy + z$$

$$3. \quad g(x) = x, \quad h(x, y, z) = x + y + z$$

$$4. \quad g(x) = 2, \quad h(x, y, z) = z^{y+1}$$

$$5. \quad g(x) = 2x, \quad h(x, y, z) = xy + 2z$$

$$6. \quad g(x) = x + 1, \quad h(x, y, z) = x + 2yz$$

$$7. \quad g(x) = 3, \quad h(x, y, z) = 2xy + z$$

$$8. \quad g(x) = x + 2, \quad h(x, y, z) = x + xy + 2z$$

$$9. \quad g(x) = 1, \quad h(x, y, z) = xyz + z$$

10. $g(x) = 3x, \quad h(x, y, z) = x + z^y$
11. $g(x) = x + 1, \quad h(x, y, z) = xz + y$
12. $g(x) = x, \quad h(x, y, z) = xy + y + z$
13. $g(x) = 2x, \quad h(x, y, z) = 3x + 4z$
14. $g(x) = x, \quad h(x, y, z) = x + 2y + 3z$
15. $g(x) = x + 3, \quad h(x, y, z) = xyz + 3y$
16. $g(x) = x, \quad h(x, y, z) = x + 3yz$
17. $g(x) = 3x, \quad h(x, y, z) = x(y + z)$
18. $g(x) = x, \quad h(x, y, z) = xy + yz$
19. $g(x) = 3, \quad h(x, y, z) = z^{y+2}$
20. $g(x) = x, \quad h(x, y, z) = x^z$

16. Найти функции, получаемые из данной с помощью операции минимизации по каждой ее переменной.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1(x_2 + 1)}{x_3}$
2. $f(x_1, x_2) = x_1(x_2 - 1)^2$
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2}{x_3}$
4. $f(x_1, x_2) = 4(x_1 - x_2)$
5. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3(2x_2 - 1)}{x_1}$
6. $f(x_1, x_2) = x_2(x_1 + 2)^2$
7. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 - \frac{x_1}{x_3}$
8. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$
9. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + 3x_2}{x_3}$
10. $f(x_1, x_2) = x_1^2(x_2 + 3)$
11. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_3} + 2x_2$
12. $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_1x_2$
13. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2(x_3 + 4)}{x_1}$
14. $f(x_1, x_2) = x_2^2(x_1 + 1)$
15. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1x_2}{x_3}$
16. $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)(x_2 + 4)^2$
17. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1(3x_3 - 2)}{x_2}$
18. $f(x_1, x_2) = 3(x_2 - x_1)$
19. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_3 - \frac{x_1}{x_2}$
20. $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3)(3x_2 - 2)$

Литература

1. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: «Физматлит», 2005.
2. Гуц А. К. Математическая логика и теория алгоритмов. – Омск, Изд-во Наследие. Диалог-Сибирь, 2003.
3. Зюзьков В. М., Шелупанов А. А. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: «Горячая линия – Телеком», 2007.
4. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: «Академия», 2007.
5. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. – М.: «Физматлит», 2006.
6. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: «Физматлит», 2004.
7. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. СПб.: «БХВ-Петербург», 2008.
8. Шапорев С. Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2005.