

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МАТИ - Российский государственный технологический университет
им. К.Э.Циолковского

Кафедра высшей математики

РАБОТА С МАТРИЦАМИ НА ЯЗЫКЕ ПАСКАЛЬ
И В СРЕДЕ *Mathcad PLUS 6.0*

Методические указания к выполнению лабораторной работы

Составители: А.М. Никулин,
Н.З. Емельянова

Москва - 1998

В данных методических указаниях рассматриваются вопросы применения средств языка Паскаль и средств *Mathcad PLUS 6.0* для работы с матрицами.

Разбираются функции для обычных в линейной алгебре действий с матрицами.

В конце методических указаний даны задачи для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов, выполняющих лабораторные работы по курсу “Информатика”, и имеют целью разработать основные навыки программирования математических и инженерных задач.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Матрицы - это строительные блоки важного класса математических моделей. Аппарат матриц позволяет более просто представлять различные математические и физические операции с помощью числовых операций над элементами матриц.

Примеры: матричные представления операторов квантовой механики, графов, задачи линейного программирования, теория линейных цепей, теория линейных колебаний, механика твердого тела и т.д.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Определение матрицы

Матрица представляет собой прямоугольную таблицу чисел, расположенных строками и столбцами.

Она записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Вышеприведенная таблица называется $(m \times n)$ - матрицей, так как она имеет m - строк и n - столбцов.

Так как матрица представляет двумерную таблицу чисел, то для обозначения каждого из ее элементов необходимо использовать двойные индексы. По условию, первый индекс обозначает номер строки, а второй - номер столбца. Любая матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов, называется квадратной матрицей. Квадратная матрица, имеющая n строк и n столбцов, называется матрицей n - го порядка.

Матрицы обычно обозначаются прописными латинскими буквами (A, B и т.д.), а элементы матриц - строчными латинскими буквами (a_{ij}, b_{ij} и т.д.).

Вектор A является упорядоченной совокупностью n чисел, записанных либо строкой $(a_1; a_2; \mathbf{K}; a_n)$, либо столбцом

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \mathbf{L} \\ a_n \end{bmatrix}$$

где $a_i, i=1, \dots, n$ являются действительными числами и называются компонентами вектора A .

2.2. Операции над матрицами

Операции над матрицами - это операции над таблицами чисел.

2.2.1. Равенство. Две матрицы A и B называются равными, обозначают $A=B$, если они идентичны, другими словами, если равны их соответствующие компоненты, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для каждого i, j .

2.2.2. Умножение на скаляр. Пусть дана матрица A и скаляр l . Произведение $l \times A$, по определению является матрица

$$l \cdot A = \begin{bmatrix} l \cdot a_{11} & \mathbf{K} & l \cdot a_{1n} \\ l \cdot a_{21} & \mathbf{K} & l \cdot a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ l \cdot a_{m1} & \mathbf{K} & l \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Каждый элемент матрицы A умножен на скаляр l .

2.2.3. Сложение. Суммой матрицы A , имеющей m строк и n столбцов и матрицы B , имеющей m строк и n столбцов, называется матрица C , элементы которой равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ (для всех } i, j).$$

Это можно записать:

$$C = A + B.$$

Две матрицы суммируются сложением соответствующих элементов.

2.2.4. Вычитание. Определяется через уже рассмотренные действия:

$$A - B = A + (-1) \times B$$

Вычитание двух матриц сводится к вычитанию соответствующих элементов этих матриц.

2.2.5. Умножение. Произведением $(m \times n)$ - матрицы A и $(n \times r)$ - матрицы B (записывается $A \times B$) называется матрица C , элементы которой получаются из элементов матрицы A и B по следующей формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, \mathbf{K}, m, j = 1, \mathbf{K}, r$$

Матрица A допускает умножение на матрицу B и дает произведение $A \times B$ в том и только том случае, когда число столбцов в матрице A совпадает с числом строк в матрице B . Произведение $C = A \times B$ имеет одинаковое число строк с матрицей A и одинаковое число столбцов с матрицей B .

2.2.6. Транспонирование. Матрицей, транспонированной к матрице A , является матрица, образованная из матрицы A заменой i -й строки матрицы A ее i -м столбцом.

Транспонирование обозначается через A^T , т.е.

$$A^T = | a_{ji} |, \text{ когда } A = | a_{ij} |.$$

Можно заметить, что если A является $(m \times n)$ - матрицей, то A^T является $(n \times m)$ - матрицей.

2.2.7. Степень матрицы. Матрица A^n равна произведению

$$A^n = \prod_1^n A$$

Возведение в степень n сводится к n операциям умножения.

2.3. Специальные виды матриц

2.3.1. Диагональная матрица. Диагональной называется матрица, все элементы которой равны 0, кроме тех, что расположены на главной диагонали.

2.3.2. Единичная матрица - это диагональная матрица, все элементы которой равны 1.

2.3.3. Нулевая матрица - это матрица, все элементы которой равны 0.

2.4. След матрицы

Следом квадратной матрицы порядка n является сумма

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

ее диагональных элементов.

3. ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ЯЗЫКА ПАСКАЛЬ ДЛЯ РАБОТЫ С МАТРИЦАМИ

3.1. Определение матрицы на языке Паскаль

Типы данных в Паскале делятся на класс простых типов и класс структурированных типов (структур).

Матрица - это переменная, имеющая структуру массива (двухмерный массив), представляющего собой совокупность компонент переменных одного и того же типа. Массив, как и любую другую структуру, необходимо описать и только затем использовать.

Описание массива осуществляется с использованием служебного слова `array`.

Type

имя = `array` (тип индекса) `of` (тип компонент);

Определяется тип данных массив, а затем определяется переменная этого типа.

Определение двухмерного массива (матрицы):

Const

$n=100;$

Type

$matrix=array[1..n,1..n]$ of real;

Характерные особенности:

1. Каждая компонента массива может быть явно обозначена и к ней имеется прямой доступ.

2. Число компонент массива определяется при его описании и в дальнейшем не меняется.

В Паскале число элементов массива должно быть задано заранее. Если необходимо использовать массивы переменной размерности, то приходится описывать массивы с максимально возможным в данной задаче числом элементов, а затем использовать только часть из этих элементов.

Каждый элемент массива имеет свой порядковый номер, называемый индексом элемента в массиве. Индексы массива могут быть любого порядкового типа, чаще - целочисленного. Для матрицы необходимо задавать два индекса - индекс для строки и индекс для столбца.

При работе с матрицами можно выделить два класса задач: задачи с использованием одной матрицы и задачи, в которых осуществляются матричные операции над несколькими матрицами.

3.2. Работа с одной матрицей на языке Паскаль

Задача 1.1.

Сформировать квадратную матрицу A порядка n , элементы которой a_{ij} определяются с помощью функции $f(i,j)=i+j$. Найти минимальный элемент, максимальный элемент и след матрицы. Полученные результаты распечатать.

Решение:

Для формирования элементов матрицы используются два вложенных цикла *for*, в которых каждому элементу матрицы присваивается значение функции

$$A[i,j]:=i+j;$$

Для нахождения минимального элемента необходимо ввести переменную min , а для определения строки и столбца, в которой этот элемент находится, введем переменные $imin$ и $jmin$. Переменной min присваиваем значение

$$min:=A[1,1]; imin:=1; jmin:=1;$$

При просмотре матрицы (два вложенных цикла *for*) сравниваем очередной элемент $A[i,j]$ с минимальным. Если $A[i,j] < min$, то он становится минимальным и в переменных $imin$ и $jmin$ запоминаются соответствующие ему i и j . Если минимальных элементов несколько, то определяем первый из них.

Для нахождения максимального элемента введем переменные *max*, *imax* и *jmax*. Поиск максимального элемента осуществляется аналогично, только при сравнении используется неравенство $A[i,j] > max$.

Для нахождения следа матрицы (см. 2.4) введем переменную *tr*, в которой накопим сумму всех элементов, находящихся на главной диагонали.

Для выдаче на печать матрицы используются два вложенных цикла *for*. Матрицу печатаем в привычном виде (1 строка матрицы - 1 строка экрана).

Текст программы:

```
{*****}
Program Z11;
{ Программа формирует элементы матрицы А в соответствии с
  условием  $A[i,j]=f(i,j)$ . Находит максимальный, минимальный элемент
  и след матрицы. Все полученные результаты выдаются на печать }
Uses CRT;
Var
  A:array[1..10,1..10] of integer;
  n,i,j:integer;
  max,imax,jmax:integer;
  min,imin,jmin:integer;
  tr:integer;
Begin
  CLRSCR;
  Writeln('Введите порядок матрицы n<10');
  Readln(n);
  { формирование элементов матрицы }
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      A[i,j]:=i+j;
  { операторы обработки элементов матрицы }
  tr:=0;
  max:=A[1,1];
  imax:=1;
  jmax:=1;
  min:=A[1,1];
  imin:=1;
  jmin:=1;
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      begin
        if A[i,j] > max then
          begin
```

```

        max:=A[i,j];
        imax:=i;
        jmax:=j;
    end;
    if A[i,j] < min then
    begin
        min:=A[i,j];
        imin:=i;
        jmin:=j;
    end;
end;
for i:=1 to n do
    tr:=tr+A[i,i];
{ вывод полученной матрицы }
Writeln('Матрица A');
for i:=1 to n do
    begin
        for j:=1 to n do
            Write(A[i,j]:4,' ');
        Writeln;
    end;
Writeln('Максимальный элемент =',max:4,' i=',imax:2,' j=',jmax:2);
Writeln('Минимальный элемент =',min:4,' i=',imin:2,' j=',jmin:2);
Writeln('След матрицы =',tr:6);
Readln;
End. {Z11}
{*****}

```

3.3. Матричные операции на языке Паскаль

При решении этого класса задач важно отметить, что одни и те же операции производятся с несколькими матрицами, поэтому типовые операции с матрицами лучше оформить в виде процедур и использовать эти процедуры при решении задачи. Определим типовые процедуры для работы с матрицами: ввод матрицы, печать матрицы, умножение матрицы на скаляр, транспонирование матрицы, сложение матриц, умножение матриц. Операцию вычитания матриц ($A-B$) сведем к двум операциям: операция умножение матрицы B на скаляр (-1) и операция сложения двух матриц:

$$A-B = A + (-1) \times B$$

Возведение в степень n сводится к n операциям умножения матрицы A (см. 2.2.7).

.

Задача 2.1.

Ввести значения элементов квадратной матрицы A порядка n и полученную матрицу вывести в привычном виде (1 строка матрицы - 1 строка экрана). Ввод и вывод матрицы оформить в виде процедуры.

Решение.

Процедуры ввода и вывода матрицы должны содержать в качестве параметров: порядок матрицы, идентификатор, которой выдается при вводе или выводе и имя матрицы. Перед вводом элемента на экран выводится поясняющий текст, в котором кроме индексов очередного элемента матрицы выдается и имя матрицы (ее идентификатор). При выводе перед каждым элементом выводится имя матрицы, индексы элемента, а затем значение элемента. Максимальный порядок матрицы, с которой можно работать, задается с помощью константы NN (в данном случае $NN=10$). При работе с матрицами большей размерности надо увеличить значение этой константы. Если матрица используется в качестве параметра процедуры, то для нее надо дать явное определение типа:

Type Matr=array[1..NN,1..NN] of real ;

и при описании параметра в заголовке процедуры указать этот тип.

Текст программы:

```
{*****}
Program Z21;
{ Программа ввода и вывода элементов матрицы }
Uses CRT;
Const NN=10; { максимальная размерность матрицы }
Type Matr=array[1..NN,1..NN] of real ;
Var
  n:integer; {   порядок матрицы           }
  A:Matr;    {   матрица                   }
  ch:char;   {   идентификатор для ввода и вывода матрицы }
             {   Подпрограммы             }
             { Процедура ввода элементов матрицы }
Procedure Mv(n:integer;ch:char;var A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
    begin
      Write(' ',ch,[' ',i:1,', ',j:1,']=');
      Readln(A[i,j]);
    end;
  end;
end;
```

```

    end;
end; {Mv}
    { Процедура вывода (печати) элементов матрицы }
Procedure Mp(n:integer;ch:char;A:Matr);
Var
    i,j:integer;
begin
    for i:=1 to n do
    begin
        for j:=1 to n do
            Write(' ',ch,[' ',i:1,',','j:1,']=',A[i,j]:4:1);
            Writeln;
        end;
    end;
end; {Mp}
BEGIN { основная программа }
    CLRSCR;
    Writeln('Введите порядок матрицы n < 10 ');
    Readln(n);
    ch:='A';      { идентификатор при вводе и выводе - буква A}
    { ввод матрицы A}
    Mv(n,ch,A);
    { вывод матрицы A}
    Mp(n,'A',A); { идентификатор можно задать как параметр-значение}
    Readln;
END. {Z21}
{*****}

```

Задача 2.2.

Из квадратной матрицы A порядка n получить матрицу $C=3A^T$. Исходную и полученную матрицу распечатать.

Решение.

Для ввода и вывода результатов можно использовать рассмотренные в задаче 2.1 процедуры Mv и Mp . В данной задаче надо выполнить транспонирование матрицы и умножение матрицы на скаляр - число 3. Транспонирование матрицы заключается в замене строк на столбцы (см. 2.2.6). Процедура Mt , осуществляющая транспонирование матрицы, в качестве параметров содержит: порядок матрицы, имя исходной матрицы и имя матрицы, в которую помещается результат транспонирования. В качестве параметров процедуры умножения матрицы на скаляр Mc (см. 2.2.2), кроме перечисленных в процедуре Mt параметров, необходимо ввести дополнительный параметр - скаляр, на который надо умножить матрицу. Таким образом, для решения данной задачи используются 4 процедуры - Mv , Mp , Mt и Mc .

Текст программы:

```
{*****}
Program Z22;
{ Программа транспонирует матрицу A и умножает полученную
  матрицу на 3 }
Uses CRT;
Const NN=10; { максимальная размерность матрицы }
Type Matr=array[1..NN,1..NN] of real ;
Var
  n:integer;   { порядок матрицы }
  A,C:Matr;   { исх. матрица и матрица - результат }
  sc:real;    { скаляр, на который умножается матрица }
              { Подпрограммы }
  { Процедура ввода элементов матрицы }
Procedure Mv(n:integer;ch:char;var A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
    begin
      Write(' ',ch,[' ',i:1,', ',j:1,']=');
      Readln(A[i,j]);
    end;
  end;
end; {Mv}
  { Процедура вывода (печати) элементов матрицы }
Procedure Mp(n:integer;ch:char;A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
      Write(' ',ch,[' ',i:1,', ',j:1,']=',A[i,j]:4:1);
    Writeln;
  end;
end; {Mp}
  { Процедура умножения матрицы на скаляр sc }
Procedure Mc(n:integer;sc:real;A:Matr;var C:Matr);
```

```

Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      C[i,j]:=sc*A[i,j];
end; {Mc}
  { Процедура транспонирования матрицы }
  Procedure Mt(n:integer;A:Matr;var AT:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    begin
      for j:=1 to n do
        begin
          AT[j,i]:=A[i,j];
        end;
      end;
    end;
end; {Mt}
BEGIN { основная программа }
  CLRSCR;
  Writeln('Введите порядок матрицы n < 10 ');
  Readln(n);
  sc:=3;
  { ввод матрицы A }
  Mv(n,'A',A);
  { вывод матрицы A }
  Writeln('Матрица A - исходная');
  Mp(n,'A',A);
  { транспонирование матрицы A }
  Mt(n,A,C);
  Writeln('Транспонированная матрица ');
  Mp(n,'T',C);
  Writeln('Матрица C - результат ');
  { умножение матрицы на скаляр }
  Mc(n,sc,C,C);
  { вывод результата }
  Mp(n,'C',C);
  Readln;
END. {Z22}
{*****}

```

Задача 2.3.

Получить $C = A + B$, где A , B и C - квадратные матрицы порядка n . Исходные матрицы и результат распечатать.

Решение.

Для ввода и вывода результатов можно использовать рассмотренные в задаче 2.1 процедуры Mv и Mp . Две матрицы суммируются сложением соответствующих элементов (см. 2.2.3). Параметрами процедуры сложения двух матриц Ms являются: порядок матриц, матрицы, которые надо сложить и матрица, являющаяся результатом сложения. Для решения данной задачи используются 3 процедуры - Mv , Mp и Ms .

Текст программы:

```
{*****}
Program Z23;
{ Программа осуществляет сложение двух матриц А и В }
Uses CRT;
Const NN=10; { максимальная размерность матрицы }
Type Matr=array[1..NN,1..NN] of real ;
Var
  n:integer; { порядок матрицы }
  A,B,C:Matr; { исх. матрицы и матрица - результат }
  { Подпрограммы }
  { Процедура ввода элементов матрицы }
Procedure Mv(n:integer;ch:char;var A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
    begin
      Write(' ',ch,[' ',i:1,', ',j:1,']=');
      Readln(A[i,j]);
    end;
  end;
end; {Mv}
  { Процедура вывода (печати) элементов матрицы }
Procedure Mp(n:integer;ch:char;A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
```

```

    for i:=1 to n do
    begin
        for j:=1 to n do
            Write(' ',ch,[' ',i:1,',','j:1,']=',A[i,j]:4:1);
            Writeln;
        end;
    end; {Mp}
    { Процедура сложения двух матриц }
    Procedure Ms(n:integer;A,B:Matr;var C:Matr);
    Var
        i,j:integer;
    begin
        for i:=1 to n do
            for j:=1 to n do
                C[i,j]:=A[i,j]+B[i,j];
            end; {Ms}
        BEGIN { основная программа }
        CLRSCR;
        Writeln('Введите порядок матрицы n < 10 ');
        Readln(n);
        { ввод матрицы A }
        Mv(n,'A',A);
        { ввод матрицы B }
        Mv(n,'B',B);
        { вывод матрицы A }
        Writeln('Матрица A - исходная');
        Mp(n,'A',A);
        { вывод матрицы B }
        Writeln('Матрица B - исходная');
        Mp(n,'B',B);
        { сложение матриц A и B }
        Ms(n,A,B,C);
        Writeln('Матрица C - результат A+B ');
        { вывод результата }
        Mp(n,'C',C);
        Readln;
        END. {Z23}

        {*****}

```

Задача 2.4.

Получить $C = A \times B$, где A , B и C - квадратные матрицы порядка n . Исходные матрицы и результат распечатать.

Решение.

Для ввода и вывода результатов можно использовать рассмотренные в задаче 2.1 процедуры Mv и Mp . Формула для умножения двух матриц приведена выше (см. 2.2.5). Параметры процедуры умножения двух матриц Mu аналогичны параметрам процедуры сложения двух матриц Ms , рассмотренной в предыдущей задаче 2.3. Для решения данной задачи используются 3 процедуры - Mv , Mp и Mu .

Текст программы:

```

{*****}
Program Z24;
{ Программа осуществляет умножение двух матриц А и В }
Uses CRT;
Const NN=10; { максимальная размерность матрицы }
Type Matr=array[1..NN,1..NN] of real ;
Var
  n:integer; { порядок матрицы }
  A,B,C:Matr; { исх. матрицы и матрица - результат }
              { Подпрограммы }
  { Процедура ввода элементов матрицы }
Procedure Mv(n:integer;ch:char;var A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
    begin
      Write(' ',ch,[' ',i:1,', ',j:1,']=');
      Readln(A[i,j]);
    end;
  end;
end; {Mv}
  { Процедура вывода (печати) элементов матрицы }
Procedure Mp(n:integer;ch:char;A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin

```

```

    for j:=1 to n do
        Write(' ',ch,['i:1','j:1,']=',A[i,j]:4:1);
    Writeln;
end;
end; {Mp}
    { Процедура умножения матриц }
Procedure My(n:integer;A,B:Matr;var C:Matr);
Var
    i,j,k:integer;
    s:real; { сумма произведений A[k,i]*B[i,j] }
begin
    for k:=1 to n do
        begin
            for j:=1 to n do
                begin
                    s:=0;
                    for i:=1 to n do
                        s:=s+A[k,i]*B[i,j];
                    C[k,j]:=s;
                end;
            end;
        end;
    end; {My}
BEGIN { основная программа }
CLRSCR;
Writeln('Введите порядок матрицы n < 10 ');
Readln(n);
{ ввод матрицы A }
Mv(n,'A',A);
{ ввод матрицы B }
Mv(n,'B',B);
{ вывод матрицы A }
Writeln('Матрица A - исходная');
Mp(n,'A',A);
{ вывод матрицы B }
Writeln('Матрица B - исходная');
Mp(n,'B',B);
{ умножение матриц A и B }
My(n,A,B,C);
Writeln('Матрица C - результат AB ');
{ вывод результата }
Mp(n,'C',C);
Readln;

```


END. {Z24}

{*****}

Задача 2.5.

Получить $C = A + B^T + 2 \times A \times B$, где A , B и C - квадратные матрицы порядка n . Исходные матрицы и результат распечатать.

Решение.

Для решения этой задачи надо воспользоваться всеми рассмотренными ранее процедурами: Mv , Mp - для ввода и вывода результатов, Mt - для транспонирования матрицы B , Ms - для умножения матрицы A на 2, Mu - для умножения матриц и Mz - для сложения матриц. Для выполнения вычислений, кроме матриц A , B , C , нужна матрица D для запоминания промежуточных результатов (в эту матрицу помещаем результат умножения матрицы $A \times 2$ и результат умножения матрицы $2 \times A \times B$).

Все задачи данного типа можно решить по этой схеме: разделить все действия на элементарные типовые операции и применить для каждой операции нужную процедуру. Если необходимо, ввести дополнительные переменные.

Текст программы:

{*****}

Program Z25;

{ Программа вычисляет матрицу $C = A + B^T + 2AB$,
где B^T - транспонированная матрица }

Uses CRT;

Const NN=10; { максимальная размерность матрицы }

Type Matr=array[1..NN,1..NN] of real ;

Var

n:integer; { порядок матрицы }

A,B,D,C:Matr; { исх. матрицы и матрица - результат }
{ Подпрограммы }

{ Процедура ввода элементов матрицы }

Procedure Mv(n:integer;ch:char;var A:Matr);

Var

i,j:integer;

begin

for i:=1 to n do

begin

for j:=1 to n do

begin

Write(' ',ch,['i:1','j:1','=']);

Readln(A[i,j]);

end;

```

end;
end; {Mv}
  { Процедура вывода (печати) элементов матрицы }
Procedure Mp(n:integer;ch:char;A:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
      Write(' ',ch,[' ',i:1,',','j:1,']=',A[i,j]:4:1);
      Writeln;
    end;
  end;
end; {Mp}
  { Процедура умножения матрицы на скаляр sc }
Procedure Mc(n:integer;sc:real;A:Matr;var C:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      C[i,j]:=sc*A[i,j];
    end;
  end;
end; {Mc}
  { Процедура транспонирования матрицы }
Procedure Mt(n:integer;A:Matr;var AT:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
  begin
    for j:=1 to n do
      AT[j,i]:=A[i,j];
    end;
  end;
end; {Mt}
  { Процедура сложения двух матриц }
Procedure Ms(n:integer;A,B:Matr;var C:Matr);
Var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do

```

```

    for j:=1 to n do
      C[i,j]:=A[i,j]+B[i,j];
    end; {Ms}
    { Процедура умножения матриц }
Procedure My(n:integer;A,B:Matr;var C:Matr);
Var
  i,j,k:integer;
  s:real; { сумма произведений A[k,i]*B[i,j] }
begin
  for k:=1 to n do
    begin
      for j:=1 to n do
        begin
          s:=0;
          for i:=1 to n do
            s:=s+A[k,i]*B[i,j];
          C[k,j]:=s;
        end;
      end;
    end; {My}
BEGIN { основная программа }
  CLRSCR;
  Writeln('Введите порядок матрицы n < 10 ');
  Readln(n);
  { ввод матрицы A }
  Mv(n,'A',A);
  { ввод матрицы B }
  Mv(n,'B',B);
  CLRSCR;
  { вывод матрицы A }
  Writeln('Матрица A - исходная');
  Mp(n,'A',A);
  { вывод матрицы B }
  Writeln('Матрица B - исходная');
  Mp(n,'B',B);
  { транспонирование матрицы B - результат матрица C }
  Mt(n,B,C);
  { сложение матриц A и C (A+B') -результат матрица C }
  Ms(n,A,C,C);
  { умножение матрицы A на 2 - результат матрица D }
  Mc(n,2,A,D);
  { умножение матрицы D (2A) на B - результат матрица D }

```

```

My(n,D,B,D);
Writeln('Матрица C - результат A+B"+2AB ');
Ms(n,C,D,C);
{ вывод результата }
Mp(n,'C',C);
Readln;
END. {Z25}
{*****}

```

4. ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ПАКЕТА *Mathcad PLUS 6.0* ДЛЯ РАБОТЫ С МАТРИЦАМИ

4.1. Определение матрицы в пакете *Mathcad PLUS 6.0*

Рассматривая работу с математическим пакетом *Mathcad PLUS 6.0*, будем в дальнейшем называть его просто *Mathcad*. Этот пакет является системой для работы с формулами, числами, текстами и графиками. Он позволяет записывать на экране компьютера формулы в их привычном виде. Для создания простых выражений их достаточно напечатать. *Mathcad* допускает ввод формул и текста в любом месте рабочего документа.

Mathcad работает под управлением операционной системы *Windows*, и для запуска *Mathcad*, необходимо загрузить *Windows*, а затем, выбрав соответствующий ярлык, запустить *Mathcad*. Если нет нужного ярлыка, то использовать меню Пуск для запуска программы. Чтобы сохранить рабочий документ, нужно выбрать пункт Сохранить (*Save*) из меню Файл (*File*). Для окончания работы в *Mathcad* нужно выбрать пункт Выход (*Exit*) из меню Файл (*File*).

При работе в пакете *Mathcad* рекомендуется использовать размер шрифта 12 или 14, тип шрифта следует брать - *Time New Roman Cyr*.

Одиночное число в *Mathcad* называется скаляром. Столбец чисел называется вектором, а прямоугольная таблица чисел - матрицей. Общий термин для вектора или матрицы - массив.

При работе с матрицами удобно использовать палетку "*Vectors and Matrices Palette*".

Для создания матрицы можно использовать один из двух способов:

1. Ввод матрицы вручную, заполняя массив пустых полей.
2. Используя дискретный аргумент, чтобы определить элементы с его помощью. Эта методика подходит, когда имеется некоторая явная формула для вычисления элементов через их индексы.

Как только матрица создана, ее можно использовать в вычислениях точно также, как и число. Чтобы просматривать или определить элемент матрицы, используются два нижних индекса, отделяемые запятой.

Mathcad имеет следующие ограничения размеров массивов: нельзя создать массив, имеющий более чем 100 элементов, используя палетку для работы с матрицами. Для создания массивов большей размерности надо использовать специальные функции.

Рассмотрим те же задачи, что и в разделе 3, но для их решения будем использовать пакет *Mathcad*.

4.2. Работа с одной матрицей в пакете *Mathcad PLUS 6.0*

Задача 1.1.

Сформировать квадратную матрицу A порядка n , элементы которой a_{ij} определяются с помощью функции $f(i,j) = i+j$. Найти минимальный элемент, максимальный элемент и след матрицы. Полученные результаты распечатать.

Решение:

Задана явная формула для вычисления элементов через их индексы, поэтому воспользуемся вторым способом создания матрицы. При задании элементов матрицы по формулам необходимо помнить, что начальный индекс элементов матрицы по умолчанию равен нулю и обозначается символом *ORIGIN*. Определяем $ORIGIN := 1$ для того, чтобы индексы первого элемента матрицы были равны 1.

Для решения данной задачи используются дискретные аргументы. Дискретный аргумент - переменная, которая принимает ряд значений при каждом ее использовании. В этой задаче используются два дискретных аргумента - i и j . Для задания i как дискретного аргумента надо:

1. Напечатали i и затем нажали клавишу двоеточие (:).

2. Напечатали 1 и затем нажали клавишу точки с запятой (;). Это сообщает *Mathcad*, что определяется дискретный аргумент. *Mathcad* показывает точку с запятой как две точки .., что означает диапазон. Завершаем описание дискретного аргумента, печатая 3 в оставшемся поле.

Аргумент j задается аналогично.

Дискретный аргумент применяется для присвоения значений элементам матрицы.

$i:=1..3 \quad j:=1..3 \quad ORIGIN:=1$

$A_{i,j}:=i+j$

Для набора индексов нажать “[“.

После того, как матрица задана ее можно вывести на экран, набрав

$A=$

В пакете *Mathcad* имеются функции для нахождения минимального элемента матрицы, максимального элемента матрицы и для нахождения следа матрицы. Для решения задачи достаточно обратиться к этим функциям.

$min(A) =$ самый маленький элемент в матрице A ;

$max(A) =$ самый большой элемент в матрице A ;

$tr(A)$ = след матрицы

Решение данной задачи в среде *Mathcad* будет выглядеть так:

```
{*****}
i:=1..3 j:=1..3  ORIGIN:=1
Aij:=i+j
A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 
min(A)=2  max(A)=6  tr(A)=12
{*****}
```

4.3. Матричные операции в пакете *Mathcad PLUS 6.0*

Mathcad содержит функции для обычных в линейной алгебре действий с матрицами. Приведем эти функции в той последовательности, в которой они описаны в разделе 2.

Операция	Обозначение	Клавиши
Умножение матрицы на скаляр	$A \cdot z$	*
Сложение	$A + B$	+
Вычитание	$A - B$	-
Умножение	$A \cdot B$	*
Транспонирование	A^T	Ctrl + 1
Степень матрицы	A^n	^

Для создания матрицы используется ввод матрицы вручную, путем заполнения массива пустых полей .

Для ввода матрицы вручную требуется нажать [*Ctrl-M*]. В открывшемся меню набрать число строчек (*Rows*) и столбцов (*Columns*). Щелкнуть по кнопке *Create*. Появится шаблон для ввода значений элементов матрицы. Заполнить шаблон соответствующими значениями. При заполнении использовать клавишу *Tab*. Если в задании несколько исходных матриц, то для других матриц проделать аналогичные операции.

Рассмотрим задачу 2.5.

Получить $C = A + B^T + 2 \times A \times B$, где A , B и C - квадратные матрицы порядка n . Исходные матрицы и результат распечатать.

Для решения этой задачи с помощью пакета *Mathcad* достаточно ввести матрицы A и B , а затем просто набрать эту формулу: C клавиша двоеточие (:) и

далее формула. После ввода формулы для получения матрицы результата C надо набрать: C клавиша равно (=) и система выдает результат. Решение данной задачи в среде *Mathcad* будет выглядеть так:

{*****}

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C := A + B^T + 2 \cdot A \cdot B$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 10 \\ 12 & 14 & 10 \\ 12 & 20 & 26 \end{pmatrix}$$

{*****}

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Работа с одной матрицей

Сформировать квадратную матрицу A порядка n , элементы которой a_{ij} определяются с помощью функции $f(i,j)$. Найти минимальный элемент, максимальный элемент и след матрицы. Полученные результаты распечатать.

Функция $f(i,j)$ определяется согласно заданному варианту.

Варианты для задания функции $f(i,j)$:

1. $f(i,j) = i + 2*j$;
2. $f(i,j) = i + 10*j$;
3. $f(i,j) = 2*i + 3*j$;
4. $f(i,j) = 10*i + j$;
5. $f(i,j) = 2 - i + 10*j$;
6. $f(i,j) = i - j*j + i*j$;
7. $f(i,j) = i*i - (j-2)*(j-2)$;
8. $f(i,j) = 2*i*i - 3*j*j$;
9. $f(i,j) = (i-1)*(j+3)$;
10. $f(i,j) = (i+2)*(j-4)$;
11. $f(i,j) = i*i*i + j$;
12. $f(i,j) = (i-2)*(j-2)$;
13. $f(i,j) = (i+1)*(j+10)$;
14. $f(i,j) = (i+5)*(j-1)$;
15. $f(i,j) = i*(i-2) + j*(j-4)$;

16. $f(i,j) = i*(i-1)+j*(j-5);$
17. $f(i,j) = 3*i*i-2*j*j;$
18. $f(i,j) = (i-1)*(i-2)+j*(j-1);$
19. $f(i,j) = 3-i+j;$
20. $f(i,j) = 5+i-j;$
21. $f(i,j) = i*i-j*j+i*j;$
22. $f(i,j) = 2*i*i-3*j*j+2*i*j;$
23. $f(i,j) = i*i+j*j-2*i*j;$
24. $f(i,j) = i*i*i-4*i*j;$
25. $f(i,j) = (3-i)*(3-i)+j*j-i*j;$

5.2. Матричные операции

1. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=A^2+B^2+2A \times B$
2. Дано $A(3,3)$ и $B(3,3)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=A^2-B^2+2A^T$
3. Дана $A(4,4)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A^3-3A^T$
4. Дана $A(3,3)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A^5+2A^T$
5. Дано $A(4,4)$, $B(4,4)$ и $C(4,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=A^T-B^T+C^T \times A$
6. Дано $A(4,4)$, $B(4,4)$ и $C(4,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=A^T \times B^T + C^T \times A-2 \times C$
7. Дано $A(4,4)$, $B(4,4)$ и $C(4,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=(A+2 \times B) \times C- A^T$
8. Дано $A(4,4)$, $B(4,5)$ и $C(5,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=2 \times A^T \times B \times C$
9. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=(A+B) \times (A^T - B^T)$
10. Дано $A(5,5)$ и $B(5,5)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $C=A^T \times B+2 \times A$
11. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=A^T \times B+ B^T \times A-2 \times B$
12. Дано $A(3,3)$ и $B(3,3)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=A^T \times B- B^T \times A+2 \times A$
13. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=(A+2 \times B) \times (A^T - B)$
14. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=A \times A^T + B \times B^T - 2 \times A \times B$

15. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=(A^T+B) \times (A-B^T)$
16. Дано $A(4,4)$, $B(4,4)$ и $C(4,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=(A \times A^T + 2 \times B) \times C$
17. Дано $A(4,4)$, $B(4,4)$ и $C(4,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=(A^T - 2 \times B) \times (C+B)$
18. Дана $A(4,4)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A^5 \times A^T + 2 \times A$
19. Дано $A(4,4)$, $B(4,4)$ и $C(4,4)$ - произвольные матрицы.
Вычислить матрицу $D=2 \times A^T - B^T + B \times C$
20. Дана $A(4,4)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A+A^2+A^3+A^4$
21. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=(2 \times A - B) \times (A^T + B^T)$
22. Дано $A(4,4)$ и $B(4,4)$ - произвольные квадратные матрицы.
Вычислить матрицу $C=(A^2 - B^2) \times A^T$
23. Дана $A(4,4)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A - A^T + A^2 + A^4$
24. Дана $A(3,3)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A+A^2+A^3+ \dots +A^n$,
где n - натуральное число.
25. Дана $A(4,4)$ - произвольная квадратная матрица.
Вычислить матрицу $C=A + A^T - A^2 + A^3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Емелина Е.И. Основы программирования на языке ПАСКАЛЬ. - М.: Финансы и статистика, 1997. - 206 с.
2. Зубов В.С. Программирование на языке TURBO PASCAL. - М.: Информационно-издательский дом "Филинь", 1997. - 317 с.
3. Очков В.Ф. Mathcad PLUS 6.0 для студентов и инженеров. - М.: ТОО фирма "КомпьютерПресс", 1996. - 238 с.
4. Хедли Дж. Линейная алгебра. - М.: Высшая школа, 1966. - 205 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Вводные замечания	3
2. Основные определения	3
2.1. Определение матрицы	3
2.2. Операции над матрицами	4
2.3. Специальные виды матриц	5
2.4. След матрицы	5
3. Применение средств языка Паскаль для работы с матрицами	5
3.1. Определение матрицы на языке Паскаль	5
3.2. Работа с одной матрицей на языке Паскаль	6
3.3. Матричные операции на языке Паскаль	8
4. Применение средств пакета <i>Mathcad PLUS 6.0</i> для работы с матрицами	20
4.1. Определение матрицы в пакете <i>Mathcad PLUS 6.0</i>	20
4.2. Работа с одной матрицей в пакете <i>Mathcad PLUS 6.0</i>	21
4.3. Матричные операции в пакете <i>Mathcad PLUS 6.0</i>	22
5. Задачи для самостоятельного решения	23
5.1. Работа с одной матрицей	23
5.2. Матричные операции	24
Литература	25

Алексей Михайлович Никулин
Наталья Захаровна Емельянова

РАБОТА С МАТРИЦАМИ НА ЯЗЫКЕ ПАСКАЛЬ И В СРЕДЕ *Mathcad PLUS*
6.0
Методические указания к выполнению лабораторной работы

Редактор М.А.Соколова
Подписано в печать . Объем 1.75 п.л.
Тираж 75 экз. Бесплатно. Заказ

Ротапринт МГАТУ, Берниковская наб., 14