Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

МАТИ – Российский Государственный технологический
Университет им. К. Э. Циолковского

Кафедра “ Высшая математика”

МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания к лабораторной работе
по курсу “Информатика”

Составители **Сидоров Б. Н.**
Никулин А. М.

Москва 1999

Данное руководство предназначено для студентов, изучающих предмет «Численные методы» и выполняющих лабораторные работы по курсу «Информатика». В методических указаниях рассмотрен ряд методов безусловной оптимизации функции одной переменной и приведены примеры решения задач на языке программирования и в среде Mathcad.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Точка xm называется точкой локального минимума функции f(x) на множестве X, если точка xm такая, что в окрестности этой точки

$$f(xm)<f(x);$$

если это неравенство выполняется для любых x, то xm – точка глобального минимума.
Точка xm называется точкой локального максимума функции f(x) на множестве X, если точка xm такая, что в окрестности этой точки

$$f(xm)>f(x);$$

если это неравенство выполняется для любых x, то xm – точка глобального максимума.
Задача отыскания всех точек локального минимума и локального максимума функции f(x), $x\in R$ называется задачей безусловной оптимизации функции одной переменной.
Задача 1 $f(x)\to \min$, $x\in R$.
Задача 2 $f(x)\to \max$, $x\in R$.
При этом решение задачи 2 можно свести к решению задачи 1:
$f(x)\to \max , x\in R \Leftrightarrow -f(x)\to \min , x\in R$

Аналитическое решение задачи безусловной оптимизации функции одной переменной основано на том, что если функция f(x) имеет в точке $xm\in R$ непрерывные производные до второго порядка включительно; и $f'(xm)=0$, а $f''(xm)>0$, то xm – точка локального минимума; если же $f'(xm)=0$, а $f''(xm)<0$, то xm – точка локального максимума.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

Пусть требуется решить задачу $f(x)\to \min$, $x\in R$. Применение численных методов для отыскания точек локального минимума предполагает:
1. Нахождение отрезка, внутри которого находится только одна точка экстремума;
2. Вычисление локального минимума, принадлежащего заданному отрезку с необходимой точностью.

Первая задача решается или визуально по графику функции, или с использованием того факта, что если отрезок содержит только одну экстремальную точку, то внутри него вторая производная сохраняет свой знак.
Рассмотрим методы нахождения локального минимума функции на заданном отрезке.
Метод предполагает, что отрезок содержит только один минимум.

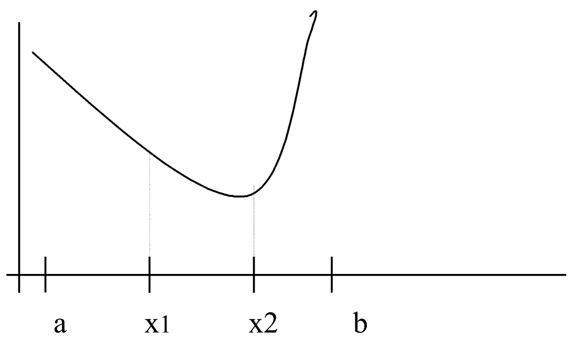
МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ.

Метод половинного деления состоит в том, что мы уменьшаем длину отрезка так, что минимум остается внутри отрезка; процесс продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше заданной точности. Уменьшение длины отрезка производится выбором двух точек x1,x2, расположенных симметрично относительно середины отрезка и сравнением значений функции в этих точках:

$$x1, x2 = \frac{a+b}{2} \mp k \cdot \frac{a-b}{2}, \quad где\ k \approx 0.01 \div 0.1 \quad .$$

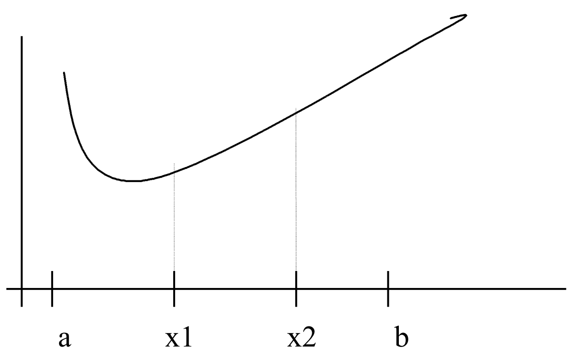
Возможны три случая, приводящие к сужению длины отрезка:

1.



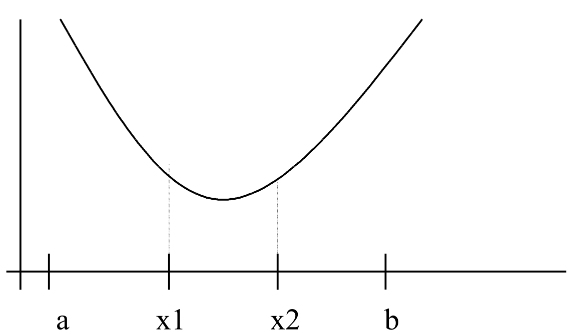
f(x1)>f(x2)
в промежутке [a,x1] функция убывает, значит минимума нет, поэтому новый уменьшенный отрезок [x1,b] т.е.
a:=x1

2.



f(x1)<f(x2)
в промежутке [x2,b] функция возрастает, значит минимума нет, поэтому новый уменьшенный отрезок [a,x2] т.е.
b:=x2

3.



f(x1)=f(x2)
минимум внутри отрезка [x1,x2], поэтому новый уменьшенный отрезок [x1,x2] т.е.
a:=x1
b:=x2

Алгоритм:

WHILE | a-b| > epsi

Вычисляем точки x1,x2 , симметричные относительно середины отрезка

x1=(a+b)/2-k*(a-b)/2 ; x2=(a+b)/2+k*(a-b)/2;

Выбираем ту часть отрезка, где минимум:

Если F(x1)>F(x2) , то минимум в [x1,b], поэтому a переносим в x1 a=x1

Если F(x1)<F(x2) , то минимум в [a,x2], поэтому b переносим в x2 b=x2

Если F(x1)=F(x2) , то минимум в [x1,x2],

поэтому b переносим в x2 ,а a переносим в x1 b=x2 a=x1

END.

МЕТОД СКАНИРОВАНИЯ

Метод сканирования состоит в последовательном движении вдоль функции в направлении уменьшения ее значения. Для этого выбирается шаг – h(выбирается произвольно, например: h =50*epsi) и от левой границы отрезка x:=a делается шаг h, т.е x:=x+h и вычисляются значения функции в точках x и x+h, при этом возможны два случая:

1. f(x+h)<f(x): – функция убывает, до минимума еще не дошли, и следует сделать следующий шаг x:=x+h.
2. f(x+h)>=f(x): – функция стала возрастать, минимум пройден, и следует вернуться назад, уменьшив шаг вдвое h:=-h/2; x:=x+h.

Вычислительный процесс продолжается при выполнении хотя бы одного из двух условий:

1. Шаг больше заданной точности |h|>epsi.
2. До минимума еще не дошли – функция продолжает убывать f(x+h)<f(x).

Поиск минимума функции методом сканирования представляет собой колебательный процесс, совершающийся около локального минимума функции с непрерывно уменьшающейся амплитудой.

Алгоритм

Начальные условия h:=50*epsi ; x:=a

{h–шаг; epsi– точность; x– текущая точка; a– нач. точка }

WHILE (|h| > epsi) или (f(x+h)<f(x))

Делаем шаг вычисляем точку x x:=x+h;

Если F(x+h)>F(x), то минимум пройден – возвращаемся назад

с уменьшенным шагом h:=-h/2

END.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В MATHCAD

Для нахождения экстремумов функции следует вычислить производную, и решить уравнение $f'(x)=0$.
Для решения уравнения необходимо прежде всего построить график функции, задающий уравнение и по графику визуально определить начальное приближение корня.
Уточнение корня производится стандартной функцией
root(F(x),x),
где F(x) – функция, задающий уравнение.
x – имя переменной, варьируя которую ищется корень; перед использованием переменной обязательно должно быть присвоено начальное значение; для уравнения с несколькими корнями ищется корень, наиболее близкий к начальному значению.
Для решения уравнения также можно воспользоваться блоком GIVEN – FIND, позволяющим находить все корни без заданий начального приближения.
Для определения является ли найденная точка минимумом или максимумом вычисляется вторая производная.

Безусловная оптимизация функции. Пример $f(x)=x^3+2*x^2-7*x+1$

a:=1 b:=2 c:=-7 d:=1

$F(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Поиск экстремума через вычисление производных с блоком Given - find

$Fp(x) := \frac{d}{dx}F(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 7$

$Fp2(x) := \frac{d^2}{dx^2}F(x) \rightarrow 6 \cdot x + 4$

Given

$\frac{d}{dx}F(x) = 0$

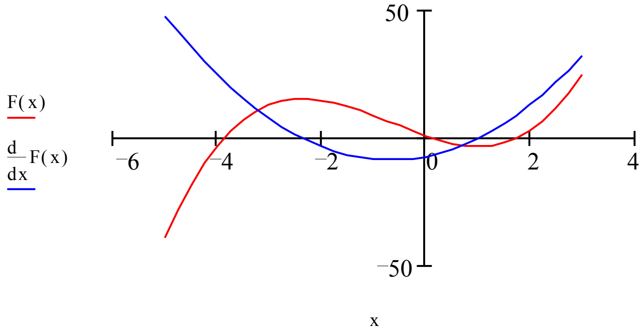
$find(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-7}{3} \end{pmatrix}$

$Fp2(1) = 10$ Минимум

$Fp2\left(-\frac{7}{3}\right) = -10$ Максимум

График

$x := -5, -4.75 .. 3$



Поиск экстремума через вычисление производных с использованием функции root
(требуется начальное приближение)

x:=-3

$x1 := \mathrm{root}(Fp(x), x)$ $x1 = -2.$ $Fp2(x1) = -10$ Максимум

x:=3

$x2 := \mathrm{root}(Fp(x), x)$ $x2 = 1$ $Fp2(x2) = 10$ Минимум

Примеры написание программ.

Метод половинного деления

$$
\mathrm{Min}(F,a,b,tol) := \left|
\begin{array}{l}
\text{while } |b-a| > tol \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x1 \leftarrow \frac{a+b}{2} - 0.1 \cdot \frac{b-a}{2} \\
x2 \leftarrow \frac{a+b}{2} + 0.1 \cdot \frac{b-a}{2} \\
a \leftarrow x1 \text{ if } F(x1) > F(x2) \\
b \leftarrow x2 \text{ if } F(x1) < F(x2) \\
\text{if } F(x1) = F(x2) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
a \leftarrow x1 \\
b \leftarrow x2
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
x1
\end{array}
\right.
$$

Обращение к функции для поиска минимума:
Minf(F,0,5,0.0001)=1

Обращение к функции для поиска максимума:

$F1(x) := -F(x)$

Minf(F1,-3,0,0.0001)=-2.333

Метод сканирования:

$$
\mathrm{Minfscan}(f, a, epsi) := \left|
\begin{array}{l}
x \leftarrow a \\
h \leftarrow 50 \cdot epsi \\
\text{while } (|h| > epsi) + (f(x+h) < f(x)) \\
\quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x + h \\ h \leftarrow -\dfrac{h}{2} \text{ if } f(x+h) \ge f(x) \end{array} \right. \\
x
\end{array}
\right.
$$

Обращение к функции для поиска минимума:
Minfscan(F,0,0.001)=1

Обращение к функции для поиска максимума
Minfscan(F1,0,0.001)=-2.333

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Требуется решить задачу безусловной оптимизации в Mathcade, написать и отладить программу нахождения всех локальных экстремумов функции предложенным преподавателем методом.

1. $2*x^3+12*x^2+13*x+15$.
2. $2*x^3-3*x^2+4*x+9$.
3. $x^3-4*x^2-4*x-5$.
4. $2*x^4+3*x^3+8*x^2+6*x+5$.
5. $2*x^4-3*x^3+2*x^2-15*x+14$.
6. $15*x^4-4*x^3-6*x^2-4*x-1$.
7. $2*x^4-x^3+3*x^2-x+1$.
8. $x^4+3*x^3-44*x^2+15*x+25$.
9. $6*x^4+25*x^3+12*x^2-25*x+6$.
10. $x^4-2*x^3-11*x^2+12*x+36$.
11. $100*x^3+45*x^2-12*x+2.5$.
12. $10*x^3+20*x^2-0.1*x-0.2$.
13. $x^3+4.05*x^2-0.03*x+0.02$.
14. $x^3+79.9*x^2-1988*x-200$.
15. $x^3-4.6*x^2-52*x-20$.
16. $x^3-0.5*x^2-0.5*x$.
17. $200*x^3+78*x^2-41.2*x+0.42$.
18. $2*x^3-0.6*x^2+0.06*x-0.002$.
19. $0.5*x^3-2.3*x^2-26*x-10$.
20. $-0.1*x^3+0.405*x^2+0.003*x-0.002$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathcad 6.0 plus. Руководство пользователя. М.: Филинъ,1998.
2. Ракитин В. И. , Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений. М.: Высшая школа, 1998.
3. Попов В. Б. Turbo Pascal 7.0 для школьников.
М.: Финансы и статистика, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Борис Николаевич Сидоров
Алексей Михайлович Никулин

МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания к лабораторной работе по курсу " Информатика"

Редактор М.А.Соколова
Подписано в печать 18.06.99. объем 0,75 п.л.
Тираж 75 экз. Бесплатно. Заказ

Ротапринт МАТИ – РГТУ , Берниковская наб.,14