Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Ю. В. Селиванов

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Москва 2017

УДК 517

Автор:
Селиванов Ю. В., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая математика», институт информационных систем и технологий МАИ

Селиванов, Ю. В.
Функции многих переменных [Текст] : учеб. пособие / Ю. В. Селиванов. — М. : МАИ, 2017. — 62 с.

Учебное пособие предназначено для студентов МАИ, изучающих тему «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» в рамках общего курса математики, а также для преподавателей. Оно ставит своей целью помочь студентам лучше усвоить теоретический и практический материал. В каждом разделе приводится решение типовых задач. Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовое (контрольное) задание по рассматриваемым темам.

УДК 517

Введение

Данное учебное пособие входит в серию учебно-методических разработок кафедры «Высшая математика», призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса математики. Оно предназначено для студентов МАИ и преподавателей. В пособии рассмотрены следующие вопросы: функции n переменных, область определения, геометрическое истолкование; частные производные первого и высших порядков; полный дифференциал и его применение; дифференцирование сложных функций; неявные функции и их дифференцирование; касательная плоскость и нормаль к поверхности; экстремумы и нахождение наибольших и наименьших значений функций многих переменных. Пособие предназначено главным образом для использования во время практических занятий по математическому анализу и в качестве задачника для самостоятельной работы, а также для проведения контрольных работ у студентов дневного и вечернего отделений всех факультетов.

В первом разделе приведены некоторые основные понятия и определения, а также расчетные формулы и примеры решения задач по указанным темам, а во втором разделе помещены 28 вариантов индивидуальных расчетных заданий. Среди задач — отыскание области определения функции двух переменных, вычисление частных производных и полного дифференциала, применение полного дифференциала к приближенным вычислениям, дифференцирование сложных и неявных функций, построение касательной плоскости и нормали к поверхности, исследование функции многих переменных на экстремум, отыскание наибольшего и наименьшего значений функции в ограниченной замкнутой области.

1. Основные определения, расчетные формулы и разбор примеров

1.1. Понятие функции многих переменных

Произвольный упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается $M = M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ и называется точкой n-мерного арифметического пространства R^n; сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами точки M.

Пусть $D \subset R^n$ — произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке

$$M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in D$$

поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(M) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $f: R^n \to R$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Множество D называется *областью определения* функции f, а множество U, состоящее из всех чисел вида $f(M)$, где $M \in D$, — множеством значений этой функции.

В частном случае, когда $n = 2$, функция двух переменных $z = f\left(x, y\right)$ может рассматриваться как функция точек плоскости Oxy в трехмерном геометрическом пространстве с фиксированной декартовой системой координат. *Графиком* этой функции называется множество точек пространства

$$\Gamma = \left\{\left(x, y, z\right) \in R^3 : \ \ z = f\left(x, y\right)\right\},$$

представляющее собой некоторую поверхность в R^3.

Линией уровня функции $z = f\left(x, y\right)$ называется линия

$$f\left(x, y\right) = C$$

на плоскости Oxy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$. *Поверхностью уровня* функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется поверхность

$$f(x, y, z) = C,$$

в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z = \arccos\left(x^2 + y^2\right).$$

Решение. Функция определена при $x^2 + y^2 \leq 1$. Следовательно, областью определения функции является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат.

1.2. Частные производные

Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Придавая значению переменной x приращение Δx, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется *частной производной* (первого порядка) данной функции по переменной x в точке (x, y) и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $f'_x(x, y)$. Точно так же определяется частная производная этой функции по переменной y и обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или $f'_y(x, y)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме одной, рассматриваются как постоянные («замораживаются»).

Пример 2. Найти частные производные функции

$$z = \arcsin\frac{x}{y} \quad (y > 0).$$

Решение. Считая величину y постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Считая величину x постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y}\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных x и y. Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx};\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высокого порядка. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.*

Пример 3. Найти частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ от функции $z=e^x\left(\cos y+x\sin y\right)$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\left(\cos y+\sin y+x\sin y\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=e^x\left(\cos y-\sin y+x\cos y\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=e^x\left(2\cos y-\sin y+x\cos y\right).$$

Пример 4. Пусть

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\ y=0.\end{cases}$$

Тогда

$$f\left(0,y\right)=f\left(x,\,0\right)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=-y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,\,0\right)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,\,0)}{y}=x,$$

$$f_{xy}^{//}\left(0,\,0\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(0,\,0\right)=-1,$$

$$f_{yx}^{//}\left(0,\,0\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(0,\,0\right)=1.$$

Таким образом, значение второй смешанной производной в этом примере зависит от порядка дифференцирования. Это происходит из-за того, что обе производные $f_{xy}^{//}$ и $f_{yx}^{//}$ не имеют предела при $x\to 0$ и $y\to 0$, а потому, в точке $\left(0,\,0\right)$ терпят разрыв.

1.3. Полный дифференциал и его применение

Пусть дана функция двух переменных $z=f\left(x,y\right)$. Предположим, что ее аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy. Тогда функция $z=f\left(x,y\right)$ получает полное приращение

$$\Delta z=f\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right).$$

Полезно отметить следующий геометрический факт: *полное приращение функции* Δz *равно приращению аппликаты графика функции* $z = f(x, y)$ *при переходе от точки* $M(x, y)$ *в точку* $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y), если ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = A(x, y) \cdot \Delta x + B(x, y) \cdot \Delta y + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, а $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в данной точке, то ее *полным дифференциалом* (или просто *дифференциалом*) называется главная часть полного приращения этой функции, линейная относительно Δx и Δy, т. е.

$$dz = A(x, y) \cdot \Delta x + B(x, y) \cdot \Delta y.$$

Легко доказать, что справедливы равенства

$$A(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = f'_x(x, y),$$

$$B(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = f'_y(x, y).$$

Отсюда следует, что для дифференциала функции $z = f(x, y)$ справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Замечание. Важно отметить, что из существования частных производных первого порядка, вообще говоря, не следует существование полного дифференциала (т. е. дифференцируемость функции многих переменных). Однако если предположить, что эти частные производные не только существуют, но и непрерывны в окрестности точки (x, y), то функция $z = f(x, y)$ в точке (x, y) дифференцируема. В то же время даже из дифференцируемости всюду функции нескольких переменных, вообще говоря, не следует непрерывность ее первых производных.

Заменяя приближенно приращение функции ее дифференциалом (в предположении достаточной малости значений Δx и Δy), получаем

$$\Delta z \approx dz = f_x^{/}(x, y)\Delta x + f_y^{/}(x, y)\Delta y.$$

Отсюда имеем

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + dz = f(x, y) + f_x^{/}(x, y)\Delta x + f_y^{/}(x, y)\Delta y.$$

Все изложенное распространяется на функции трех и более переменных.

Пример 5. Вычислить приближенно

$$\ln\left(\sqrt{4{,}004} + \sqrt[3]{1{,}006} - 2\right).$$

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2\right)$$

при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 4$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}004$, $\Delta y = 0{,}006$. Применяя формулу

$$f\left(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,\, y_0\right)+f'_x\left(x_0,\, y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,\, y_0\right)\Delta y,$$

получаем

$$f\left(x_0,\, y_0\right)=\ln\left(\sqrt{x_0}+\sqrt[3]{y_0}-2\right)=\ln\left(\sqrt{4}+\sqrt[3]{1}-2\right)=0,$$

$$f'_x\left(x_0,\, y_0\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt[3]{y_0}-2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt[3]{1}-2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4},$$

$$f'_y\left(x_0,\, y_0\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt[3]{y_0}-2}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt[3]{1}-2}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{1}{3},$$

$$f\left(x,\, y\right)\approx 0+\frac{1}{4}\cdot 0{,}004+\frac{1}{3}\cdot 0{,}006=0{,}003.$$

Следовательно,

$$\ln\left(\sqrt{4{,}004}+\sqrt[3]{1{,}006}-2\right)\approx 0{,}003.$$

1.4. Дифференцирование сложных функций

Случай одной независимой переменной

Пусть $z=f\left(x,\, y\right)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, причем аргументы этой функции являются дифференцируемыми функциями одной независимой переменной t, т. е. $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Тогда сложная функция

$$z=f\left(\varphi(t),\ \psi(t)\right)$$

тоже дифференцируема, и ее производная $\frac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Пусть теперь $z = f\left(x, y\right)$, а $y = \varphi(x)$. Тогда $z = f\left(x, \varphi(x)\right)$, т. е. функция z есть функция одной переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, где роль переменной t играет x. *Полная производная* функции z по переменной x равна

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Пример 6. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x+5y}$, где $x = \sin t$, $y = t^3$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+5y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5e^{2x+5y}$,

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2x+5y} \cdot \cos t + 5e^{2x+5y} \cdot 3t^2 = e^{2\sin t+5t^3} \cdot \left(2\cos t + 15t^2\right).$$

Пример 7. Найти частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{3xy}$, а $y = \sqrt{x^2+4}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 3ye^{3xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xe^{3xy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$,

$$\frac{dz}{dx} = 3ye^{3xy} + 3xe^{3xy} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 3e^{3x\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{2x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Случай нескольких независимых переменных

Предположим теперь, что $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$. Тогда z есть сложная функция двух независимых переменных u и v. Частные производные этой сложной функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Эти формулы обобщаются на случай сложной функции любого конечного числа аргументов.

Пример 8. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = y^x$, $x = \frac{u}{v}$, $y = u \cdot v$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = y^x \ln y \cdot \frac{1}{v} + xy^{x-1} \cdot v = \frac{(1 + \ln(uv))}{v} \cdot (uv)^{\frac{u}{v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = y^x \ln y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + xy^{x-1} \cdot u = \frac{u(1 - \ln(uv))}{v^2} \cdot (uv)^{\frac{u}{v}}.$$

1.5. Неявные функции и их дифференцирование

Пусть $F(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, и пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как функцию x. Первая производная этой неявной функции $y=y(x)$ в точке x_0 может быть вычислена по формуле

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{F_x^{/}\left(x_0,y_0\right)}{F_y^{/}\left(x_0,y_0\right)}$$

при условии, что $F_y^{/}\left(x_0,y_0\right)\neq 0$, где $y_0=y(x_0)$ и $F\left(x_0,y_0\right)=0$. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием этой формулы.

Пусть теперь $F\left(x,y,z\right)$ — дифференцируемая функция трех переменных x, y и z, и пусть уравнение $F\left(x,y,z\right)=0$ определяет z как функцию независимых переменных x и y. Частные производные этой неявной функции $z=z\left(x,y\right)$ в точке $\left(x_0,y_0\right)$ могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=-\frac{F_x^{/}\left(x_0,y_0,z_0\right)}{F_z^{/}\left(x_0,y_0,z_0\right)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=-\frac{F_y^{/}\left(x_0,y_0,z_0\right)}{F_z^{/}\left(x_0,y_0,z_0\right)}$$

при условии, что $F_z^{/}\left(x_0,y_0,z_0\right)\neq 0$, где $z_0=z\left(x_0,y_0\right)$ и $F\left(x_0,y_0,z_0\right)=0$.

Пример 9. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если z определяется, как функция от x и y, из уравнения

$$z^3-4xy^2-2z^2+1=0.$$

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$. Тогда

$$F'_x(x, y, z) = -4y^2,$$

$$F'_y(x, y, z) = -8xy,$$

$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 4z.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4y^2}{3z^2 - 4z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{8xy}{3z^2 - 4z}.$$

1.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. Точка M_0 называется *точкой касания*. *Нормалью* к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности имеет вид

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

где x, y, z — координаты текущей точки касательной плоскости, x_0, y_0, z_0 — координаты точки касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Нормаль к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

В случае задания поверхности в явной форме $z=f(x, y)$ уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)\cdot(y-y_0),$$

а уравнения нормали —

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример 10. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=e^{x\cos y}$ в точке $M_0(1,\ \pi, 1/e)$.

Решение. Начнем с нахождения частных производных функции $f(x, y)=e^{x\cos y}$ и их значений в точке M_0:

$$f'_x=e^{x\cos y}\cdot\cos y, \qquad f'_x(1,\ \pi)=e^{\cos\pi}\cdot\cos\pi=-e^{-1},$$

$$f'_y=-e^{x\cos y}\cdot x\cdot\sin y, \qquad f'_y(1,\ \pi)=-e^{\cos\pi}\cdot 1\cdot\sin\pi=0.$$

Напишем уравнение касательной плоскости:

$$z-e^{-1}=-e^{-1}\cdot(x-1)+0\cdot(y-\pi)$$

или

$$x+ez-2=0.$$

Теперь напишем уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{-e^{-1}}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-e^{-1}}{-1}$$

или

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-1/e}{e}.$$

Пример 11. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+4=x+y+z$ в точке $M_0(2,\ 3,\ 6)$.

Решение. Наша поверхность может быть задана уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$, где

$$F(x,\ y,\ z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+4-x-y-z.$$

Найдем частные производные функции $F(x,\ y,\ z)$ и их значения в точке M_0:

$$F'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1, \qquad F'_x(2,\ 3,\ 6)=\frac{2}{7}-1=-\frac{5}{7},$$

$$F'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1, \qquad F'_y(2,\ 3,\ 6)=\frac{3}{7}-1=-\frac{4}{7},$$

$$F_z^{/}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1, \qquad F_z^{/}(2,\ 3,\ 6)=\frac{6}{7}-1=-\frac{1}{7}.$$

Напишем уравнение касательной плоскости:

$$-\frac{5}{7}\cdot(x-2)-\frac{4}{7}\cdot(y-3)-\frac{1}{7}\cdot(z-6)=0$$

или

$$5x+4y+z-28=0.$$

Теперь напишем уравнения нормали:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}.$$

1.7. Экстремум функции двух переменных

Говорят, что функция $z=f(x,\ y)$ имеет *локальный максимум* (соотв., *локальный минимум*) в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, если существует такая окрестность точки M_0, для всех точек $M(x,\ y)$ которой выполняется неравенство $f(M_0)\geq f(M)$ (соотв., $f(M_0)\leq f(M)$). (Локальный) максимум или минимум функции называется ее *(локальным) экстремумом*. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется *точкой экстремума*. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (необходимые условия экстремума)**.** *Если функция* $z=f(x,\ y)$ *в точке* $M_0(x_0,\ y_0)$ *имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю:* $f_x^{/}(x_0,\ y_0)=0,$ $f_y^{/}(x_0,\ y_0)=0$*, либо хотя бы одна из этих частных производных не существует.*

Пример 12. Функция $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке $(0,\ 0)$, поскольку $z(0,\ 0)=4$ и $z(x,\ y)<4$ при $x^2+y^2>0$. При этом первые частные производные этой функции в точке $(0,\ 0)$ не существуют.

Точки, в которых обе частные производные первого порядка одновременно равны нулю или хотя бы одна из этих производных не существует, называются *критическими точками.*

Не всякая критическая точка функции является ее точкой экстремума. Поэтому для нахождения экстремумов функции необходимо каждую критическую точку функции исследовать дополнительно.

Теорема 3 (достаточные условия экстремума)**.** *Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$, являющейся критической точкой функции $z=f(x,y)$, эта функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим $f''_{xx}(x_0,\ y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,\ y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0,\ y_0)=C$. Тогда:*

1) *если $AC-B^2>0$ и $A<0$, то функция $f(x,y)$ имеет в точке M_0 максимум;*

2) *если $AC-B^2>0$ и $A>0$, то функция $f(x,y)$ имеет в точке M_0 минимум;*

3) *если $AC-B^2<0$, то функция $f(x,y)$ в точке M_0 экстремума не имеет;*

4) *если $AC-B^2=0$, то вопрос об экстремуме в точке M_0 остается открытым (требуются дополнительные исследования).*

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию

$$z=x^3+y^3-3xy+4.$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Для определения критических точек функции составляем систему уравнений

$$\begin{cases}3x^2-3y=0,\\ 3y^2-3x=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем точки $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(1,\ 1)$.

Для точки M_1 имеем $AC-B^2=-9<0$. Как следствие, экстремума в точке M_1 нет.

Для точки M_2 имеем $AC-B^2=27>0$, а $A=6>0$. Следовательно, в точке M_2 функция имеет минимум

$$z_{\min}=z(1,\ 1)=3.$$

1.8. Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $z=f(x,\ y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, она достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения достигаются или в критической точке, или в граничной точке области. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции в ограниченной замкнутой области D, надо:

1) найти критические точки и значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе ∂D области D;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + 2a^2$ в круге $x^2 + y^2 \le a^2$.

Решение. Найдем первые частные производные исследуемой функции. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$$

находим одну критическую точку $M_0(0,\ 0)$, в которой

$$z(M_0) = 2a^2.$$

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значения функции на границе, то есть на окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Для точек этой окружности исследуемую функцию можно представить как функцию одной переменной x. Поскольку $y^2 = a^2 - x^2$, то

$$z = x^2 - \left(a^2 - x^2\right) + 2a^2 = 2x^2 + a^2,$$

причем $-a \le x \le a$. Таким образом, наша задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z = 2x^2 + a^2$ на отрезке $[-a,\ a]$.

Найдем критические точки функции $z = 2x^2 + a^2$, принадлежащие интервалу $(-a,\ a)$, и вычислим ее значения в этих точках и на концах интервала. Поскольку $z' = 4x$, решая уравнение $4x = 0$, получаем $x = 0$ и $z = a^2$.

Далее, находим $z(-a) = 3a^2$ и $z(a) = 3a^2$.

Итак, функция $z = x^2 - y^2 + 2a^2$ достигает наибольшего значения, равного $3a^2$, в точках $M_1(-a,\ 0)$ и $M_2(a,\ 0)$ окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и наименьшего значения, равного a^2, в точках $M_3(0, -a)$ и $M_4(0,\ a)$ той же окружности.

2. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\ln\frac{x-3}{y-5}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\arccos\frac{3y+2}{x}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\ln\left(\sqrt{x}+2^{\cos y}\right).$$

Задача 4. Вычислить $\ln\left(0{,}01+\sqrt{(0{,}01)^2+(1{,}02)^2}\right)$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$y\cdot\sin x-\operatorname{tg}\left(y-x\right)=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$y\cdot e^{x-zy}=\cos\left(zx\right).$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = e^{x^2+y^2}, \text{ где } x = a\cdot\cos t,\ y = a\cdot\sin t;\ \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x+2y-\ln z+4=0$ в точке $M_0(2,-3,\ 1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^2+xy+y^2+x+y-1$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=(x-1)^2+(y-2)^2$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ y=0,\ 2x+y=6$.

Вариант 2

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\ln\dfrac{\cos x}{y}$.

Задача 2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\ln\left(x^5+\ln y\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=2^{x^2}\cdot\arccos y.$$

Задача 4. Вычислить $1{,}002\cdot(2{,}003)^3$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\frac{\operatorname{tg}(z+1)}{\operatorname{tg}(y-2)}=\frac{y-x}{z+1}.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=x^2-y^2+2xy, \text{ где } x=\sin t,\ y=\arccos e^t;\ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=2x^2y^2+2xy+1$ в точке $M_0(-1,\ 1,\ 1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^2+xy-4x+8y$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$ в треугольнике, ограниченном прямыми: $x=0,\ y=0,\ y=1-x$.

Вариант 3

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\sqrt{\ln(x+y)}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\operatorname{arctg}\frac{xy}{1+x^2}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = x \cdot \operatorname{tg} y + \ln y \cdot \operatorname{ctg} x.$$

Задача 4. Вычислить $(1{,}001)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{0{,}98}}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\sqrt{x} + \ln y = \operatorname{arctg}(xy).$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$3^{xy} - \ln\left(z^2 + y^4\right) = x.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z = x \sin y + y \cos x, \text{ где } x = \frac{u}{v}, \quad y = u^3 v^2; \quad \frac{\partial z}{\partial u}, \ \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 y^2 - 1$ в точке $M_0(-1,\ 1,\ 0)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + 1$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами: $A(1,-3)$; $B(1,\ 2)$; $C(4,\ 2)$; $D(4,-3)$.

Вариант 4

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \ln \frac{x^2}{x+y}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sin x + y \cdot e^{x/y}.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{1{,}004} \cdot \sqrt[3]{0{,}097}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x \cdot \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$2x^3 - 5x + z^3 + y^3 - 3xyz + 8 = 0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = e^{4xy}, \text{ где } x = \cos(1-t), \; y = \sin\, t^2; \; \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y^3z^2+1=0$ в точке $M_0(-1,-1,-1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=2xy-3x^2-2y^2+8$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=6xy-9x^2-9y^2+4(x+y)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2.$

Вариант 5

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\arcsin\frac{y-2}{x}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(2{,}96)^2+(4{,}07)^2}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$y+\cos(x+y)=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x = z \cdot \ln \frac{z}{y}.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \ln\left(x - y^4\right), \text{ где } x = \cos t,\ y = \sqrt{\sin t};\ \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$ в точке $M_0(1,\ 2, -1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$ в области: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 4y \leq 12$.

Вариант 6

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \sqrt{\ln x \cdot \ln y}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + y^2\right).$$

Задача 4. Вычислить $e^{0,01}\cdot\left(2,02\right)^2$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\sqrt{\frac{1+x}{1+y}},\ \text{где}\ x=-\cos t,\ y=\cos t;\ \ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=ye^{-2x}+x\left(1-2y\right)$ в точке $M_0\left(0,\ 2,\ 2\right)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=2x^3-xy^2+3x^2+2y^2+1$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=y^2-6xy$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ y=-1,\ y=x^3$.

Вариант 7

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\frac{1}{x-y}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=xy^2\cdot\ln\left(x^2+y\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\cos y+y\cdot e^x.$$

Задача 4. Вычислить $\left(2{,}007\right)^2\cdot\left(1{,}012\right)^3$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\left(xy\right).$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x\cdot\sin y+y\cdot\sin x+z\cdot\sin x-8=0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\arcsin\frac{x^2}{y},\ \text{где}\ x=\sin t,\ \ y=\cos^2\frac{t}{2};\ \ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^3y^2-2x+1$ в точке $M_0(1, 1, 0)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2+3y^2-x-y+1$ в треугольнике, ограниченном прямыми: $x=5,\ y=0,\ x-y=1$.

Вариант 8

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\sqrt{1-x^3}+\ \ln\left(y^2-1\right)$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt[3]{0{,}97\cdot\sqrt[4]{(1{,}05)^3}}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\sin x \cdot \ln y + \cos y \cdot \ln x = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$3xz - 4yz + z^2 - 9 = 0.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z = e^{3x-4y}, \text{ где } x = \cos 2u,\ y = u^3 + v^3;\ \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 z + zy^2 = 4$ в точке $M_0(-2,\ 0,\ 1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в заданной области: $x^2 + y^2 \le 25$.

Вариант 9

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \frac{\sqrt{\cos x - y}}{\sqrt{y}}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \ln\left(x\sqrt{y} + \frac{y}{2x}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+y}.$$

Задача 4. Вычислить $(3{,}001)^2 \cdot \sqrt[3]{1{,}002}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x \cdot \cos y - \sin(y - x) = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\operatorname{tg}(x+z) = e^z y.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \arcsin(x-y), \text{ где } x = \ln\left(\sqrt{t}+1\right),\ y = 4t^3;\ \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = y(x+1)^2 + 1$ в точке $M_0(0,\ 1,\ 2)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 4$.

Вариант 10

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции

$$z=\sqrt{\left(4-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)}.$$

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\ln\left(\sqrt{x}+y^2\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=2^{\frac{x}{y}}+x\cdot\operatorname{tg} y.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$2x\cdot e^{xy}-y\cdot e^{x}+x^2=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=xy^2z^3.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy},\ \text{где}\ x=t^2+1,\ y=\sin t;\ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z^2+x^2+2xyz-2=0$ в точке $M_0(1,\ 0,\ 1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=2x^3+2y^3-36\,xy+4$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+y^2$ в заданной области: $|x|+|y|\ \leq 1$.

Вариант 11

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\dfrac{\ln x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

Задача 2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=x^3y\cdot\ln\left(\sqrt[4]{x}+y^2\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{y}.$$

Задача 4. Вычислить $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}003}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$(y+1)^{e^y} = e^{x-1}.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z + \sin(xy) - 9 = 0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \ln\left(\sqrt{x} \cdot \ln y\right), \text{ где } x = \sin t, \; y = \arccos\left(t^5\right); \; \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 y^3 + x^2 - 2y$ в точке $M_0(1, 1, 0)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - xy + y^2 - 4x$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x = -1, \; y = -1, \; x + y - 1 = 0$.

Вариант 12

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \ln x + \ln\sin y$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^3 - 1}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \arcsin\frac{y}{x+y}.$$

Задача 4. Вычислить $(2{,}009)^3 \cdot (2{,}007)^2$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2 y + \frac{1}{y} + \arcsin\frac{x}{y} = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\ln(xy + z) = z^2 - y.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z = \ln\left(e^{2x} + e^{6y}\right), \text{ где } y = x\sqrt{x};\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{dz}{dx} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M_0(3,\ 4,\ 12)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = xy(x + y - 1)$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1.$

Вариант 13

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \frac{1}{|x|}\sqrt{y^2 - x}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = -\ln\left(\cos\frac{y}{x}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln\left(x + \operatorname{ctg}(xy)\right).$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(1{,}04)^2 + \ln 1{,}02}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2 - y^2 + \operatorname{arctg}(xy) = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$z^3 + 5xy^3 + 4yz^2 - x^3 - 6 = 0.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}, \text{ где } u=x\cdot\sin y,\ v=y\cdot\cos x;\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+y^2+2xy$ в точке $M_0(1,1,4)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=8x^3+y^3-6xy-5$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y+5=0$.

Вариант 14

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции

$$z=\sqrt{x^2+y^2-2x}-\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\arccos\left(\ln\frac{x}{y}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(2{,}03)^2+5\cdot e^{0{,}02}}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\ln\left(x^2-\operatorname{tg} y\right)=e^{y+1}.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$yz^2+xz+xy=1.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z=x^{\ln y},\text{ где } x=\sin(uv),\ y=\cos\left(v^2-u\right);\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2y-xyz-1=0$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^2y(2-x-y)$ $(x>0,\ y>0)$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+3xy+y^3-1$ в заданной области: $0\le x\le 2,\ -1\le y\le 2$.

Вариант 15

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=(x+\sqrt{y})\cdot\ln\left(x^2-y^2\right)$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=(\sin x)^{\cos y}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\ln \operatorname{tg}(xy).$$

Задача 4. Вычислить $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x\cdot\ln(x-y)=\frac{y}{x}.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$e^{xz}\cos(yz) = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z=\ln\left(x^2+y^2\right)-x\sqrt{x},\ \text{где } x=\sin t,\ \ y=\frac{t}{t+1};\ \ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=y+\ln\frac{x}{y}$ в точке $M_0(1,1,1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^3+xy^2+6xy$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми: $y = x + 1,\ y = 0,\ x = 3.$

Вариант 16

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \dfrac{\ln\left(x^2 y\right)}{\sqrt{y-x}}.$

Задача 2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \cos\frac{x+y}{x-y}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln\left(\sqrt[3]{y} - \sin x\right).$$

Задача 4. Вычислить $\dfrac{(1{,}04)^2}{\sqrt[3]{0{,}98}}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$y^2+x^2z-4yz^3-1 = 0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\sqrt{xy+\sin x}\text{, где } x=\operatorname{tg}\left(3t^2+t\right),\ y=\operatorname{ctg}(2t+1);\ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3,\,4,\,5)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^3+3y^2-12x+6y-2$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=6x-x^2+12y-2y^2$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x=0,\ y=0,\ 5x+2y=10.$

Вариант 17

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}\cdot\ln x.$

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\sqrt[3]{\ln\left(x^2y\right)}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\cos x\cdot \operatorname{tg} y+y\cdot \operatorname{ctg} x.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}-\frac{y}{2a}=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\frac{z}{x} = \ln\frac{z}{y}+1.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z=\arcsin\frac{x}{y}, \text{ где } y=\sqrt{x^3+1};\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{dz}{dx}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xyz=a^3$ в точке $M_0\left(2a,\ a,\ \frac{a}{2}\right)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^2-xy+y^2+9x-6y-10$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y(4-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми: $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Вариант 18

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \arcsin\frac{y}{x^2} + \arccos(1-x)$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y}}{x^2}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = e^{\operatorname{ctg} x}\sin 3y.$$

Задача 4. Вычислить $(1{,}96)^2 \cdot e^{0{,}08}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - a^2\left(x^2-y^2\right) = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^3+2y^3+z^3-3xyz-3y+3=0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \operatorname{tg}\left(x+2x^2-y\right), \text{ где } x=\frac{1}{t},\ y=\sqrt{t};\ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = xy + \ln(2x + y - 2)$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \left(3x^2 + 2y^2\right) \cdot e^{-x^2 - y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Вариант 19

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = 2^{\frac{y}{x^2 - y^2}}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sin x + y \cdot e^{x/y}.$$

Задача 4. Вычислить $\ln\left(\sqrt{1{,}07} + \sqrt[3]{0{,}96} - 1\right)$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2y^2-x^4y^4=a^4.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$z=x+\operatorname{arctg}\frac{z-x}{y}.$$

Задача 7. Вычислить производные сложной функции:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{3x}{y}, \text{ где } x=u\cdot\sin v,\ y=u\cdot\cos v;\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+4y^2+z^2=36$ в точке $M_0(4,\ 1,-4)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=6y-3y^2-2x^2-8x-7$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy+3y-4x-1$ в прямоугольнике: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$.

Вариант 20

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\frac{1}{\sqrt{\left(y^2-1\right)(x+1)}}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\cos^2\left(4x^3-3\sqrt{y}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\arcsin\frac{x}{x+y}.$$

Задача 4. Вычислить $(2{,}003)^2\cdot(3{,}004)^3$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2+y^2+\ln\left(x^2+y^2\right)-b^2=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\ln z=yz+x^2-1.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y},\ \text{где}\ x=\mathrm{tg}^2 t,\ y=\mathrm{ctg}^3\frac{t}{2};\ \ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x\cdot\sin(x-y)$ в точке $M_0(1,1,0)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = e^{x-y} \cdot \left(x^2 - 2y^2\right)$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми: $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$.

Вариант 21

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} - \frac{1}{x}.$$

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \arccos\left(y\sqrt{x}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = 4e^{2x^2} \cdot \left(y^3 - \cos x\right).$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}96)^2}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$xy - \ln y = a.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\operatorname{tg}^2 z+\sin x+\cos y-e^x=0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=xy^2+\frac{x}{y}, \text{ где } x=\ln\left(t^2+t\right),\ y=10^t;\ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+y^2=z^2$ в точке $M_0(-3,\ 4,-5)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^3+y^2-6xy-39x+6y+4$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2+4xy-10x-8y-3$ в области: $0\le x\le 2,\ -3\le y\le 3$.

Вариант 22

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\sqrt{\ln xy}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\ln\left(\cos 2x+\operatorname{tg} y\right).$$

Задача 4. Вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$y = 1 + y^x.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$e^{\frac{z}{x}} - \arcsin\frac{z}{y} = 0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 y}, \text{ где } x = \ln t, \; y = t \cdot e^t; \; \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 2y^2$ в точке $M_0(-2,\ 1,\ 6)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = xy - x^2 - y^2 + 6y$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(5 - x - y)$ в треугольнике: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 5$.

Вариант 23

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y-2}{4-x}}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\arccos\sqrt{y^2-x^2}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\sin^2 3x+\cos^2 4y.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(6{,}03)^2+(8{,}04)^2}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=a\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$z^3+3x^2z-2xy=0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\frac{x+2y}{xy}, \text{ где } x=\operatorname{tg}\left(t^2+1\right),\ y=\operatorname{ctg}\left(t^4-1\right);\ \frac{dz}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z^3-3x^2yz=1$ в точке $M_0\left(1,\ \frac{7}{6},\ 2\right)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=e^{x/2}\cdot\left(x+y^2\right)$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+y^2+x+y-1$ в области: $x\le 0,\ y\le 0,\ x+y\ge -3.$

Вариант 24

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\ln\sin\left(2x-3y\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=e^{3x^2-y}.$$

Задача 4. Вычислить $\dfrac{(1{,}03)^2}{\sqrt[4]{0{,}96}}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x-y+\operatorname{arctg} y=0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$z^2 - z - 8xz + 2x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = x^3 \sin y + y^3 \cos x, \text{ где } x = 3t^2 - \sqrt{t},\ y = \frac{t^2}{t-1};\ \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 + y^3$ в точке $M_0(1, -1, 0)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 - 4$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ в заданной области: $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Вариант 25

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \log_y\left(x^2 + y^2 - 9\right)$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = e^{x-y}\left(x \cos y + y \sin x\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = x \cdot \ln \frac{y}{x}.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(0{,}997)^2 \cdot (1{,}008)^3 + 3}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$xe^y + ye^x - e^{xy} = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}, \text{ где } x = \operatorname{tg}\left(e^t + 1\right),\ y = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};\ \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $M_0\left(1,\ 1,\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y - 4$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x = -1,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 2.$

Вариант 26

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin y}$.

Задача 2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^3}}.$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\operatorname{tg}\frac{y^2}{x}.$$

Задача 4. Вычислить $(1{,}03)^2\cdot\sqrt{0{,}98}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

Задача 6. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$\cos^2 x+y\cos(zx)=1.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$u=\frac{xy}{z},\ \text{где}\ x=t^2-1,\ y=\ln t,\ z=e^t;\ \ \frac{du}{dt}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = yx - 2xy^2 + x^2y$ в точке $M_0(-1, 2, 8)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 1$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0,\ y + x - 2 = 0,\ y - x + 2 = 0$.

Вариант 27

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \sqrt{\sin x \cdot \cos y}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = x \cdot \operatorname{ctg}\left(\sqrt[3]{x} + y^{-1}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = 5^x \cdot \ln \operatorname{tg} y.$$

Задача 4. Вычислить $\ln\left(\sqrt{0{,}99} + \sqrt[3]{1{,}04} - 1\right)$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^2y - \sin(xy) + e^{xy} = 0.$$

Задача 6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$z \cdot \ln\left(x+z\right) = \frac{xy}{z}.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z = \sqrt{2x^2+3y^2},\ \text{где}\ x = \sin t,\ y = \cos 2t;\ \frac{dz}{dt} = ?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y^3z - xy^2z + z - 2 = 0$ в точке $M_0\left(1,\ 1,\ 2\right)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y - 2$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 - x^2 - 4x$ в ограниченной замкнутой области, ограниченной линиями: $x = 0$, $x = -\sqrt{4-y^2}$.

Вариант 28

Задача 1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции $z = \frac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$.

Задача 2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции

$$z = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Задача 3. Найти полный дифференциал функции

$$z=\sqrt{3x^2+4\cos y}\,.$$

Задача 4. Вычислить $\sqrt{(3{,}97)^2+(2{,}99)^2}$ приближенно с помощью полного дифференциала.

Задача 5. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x^y=y^x.$$

Задача 6. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$ от неявной функции, заданной уравнением

$$x\cos y+y\cos z+z\cos x=1.$$

Задача 7. Вычислить производную сложной функции:

$$z=\arcsin\frac{y}{x},\ \text{где}\ y=\sqrt[3]{1-x};\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{dz}{dx}=?$$

Задача 8. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в точке $M_0(3,\,4,-7)$.

Задача 9. Исследовать функцию $z=x^2-xy+y^2-2x+y$ на экстремум.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+xy-2$ в заданной области: $y\ \geq\ 4x^2-4,\ y\ \leq\ 0$.

Литература

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., Транспортная компания, 2015.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. В 3-х томах. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. Учебник для академического бакалавриата. М., Юрайт, 2015.

3. Выск Н. Д. Математический анализ. Учебное пособие. В 3-х частях. Ч. 1. Дифференциальное исчисление – [Электронный ресурс, http://rstu.ru/metods/]. М: МАТИ, 2011.

4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., Изд. ЛКИ, 2007.

5. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах. М., Мир и Образование, 2014.

6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х томах. Т. 1. М., Интеграл-Пресс, 2008.

7. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. М., Физматлит, 2009.

8. Селиванов Ю. В., Дементьева В. В. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Учебное пособие. М., МАТИ, 2011.

9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Т. 1. СПб., Лань, 2016.

Оглавление