Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

И. М. Шадур

ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Москва 2008

I. Производная

§ 1. Задачи, приводящие к понятию производной

1.1 Задача вычисления скорости прямолинейного движения точки.
Пусть материальная точка движется по прямой, причём закон движения точки задаётся уравнением **S=f(t)**, где **S** есть путь, пройденный точкой от момента начала движения до момента времени **t**. Предположим вначале, что точка движется равномерно, т.е. за равные отрезки времени проходит равные отрезки пути. Тогда скорость точки, **v**, постоянна и определяется соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

В этом соотношении $\Delta\mathbf{S}$ есть отрезок пути, пройденный за промежуток времени $\Delta\mathbf{t}$. Так как скорость постоянна, то она не зависит от величины выбранного отрезка времени и от расположения этого отрезка на оси времени.
Предположим теперь, что точка движется неравномерно. Пусть **S** есть путь, пройденный точкой к моменту $\mathbf{t_0}$. Придадим времени **t** приращение $\Delta\mathbf{t}$. За промежуток времени $\Delta\mathbf{t}$ точка пройдёт некоторый путь $\Delta\mathbf{S}$ Отношение

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

даёт среднюю скорость точки, $\mathbf{v_{cp}}$, за промежуток $\Delta\mathbf{t}$. Так как точка движется неравномерно, то полученная величина $\mathbf{v_{cp}}$ зависит как от момента $\mathbf{t_0}$, так и от величины $\Delta\mathbf{t}$. Для того, чтобы охарактеризовать движение точки в момент времени $\mathbf{t_0}$, необходимо обратиться к понятию мгновенной скорости. Из механики известно, что скорость тела не может измениться мгновенно, скачком – она меняется плавно. Это значит, что на малом промежутке времени $\Delta\mathbf{t}$ скорость изменяется мало, иными словами, если выбрать промежуток $\Delta\mathbf{t}$ достаточно малым, то на этом промежутке скорость можно считать приблизительно постоянной. Поэтому в любой момент времени на этом промежутке, в том числе в момент $\mathbf{t_0}$, скорость точки приближённо определяется отношением $\Delta\mathbf{S}/\Delta\mathbf{t}$ **.** В соответствии с этим мгновенная скорость точки в момент $\mathbf{t_0}$ определяется как предельное значение средней скорости при условии, что $\Delta\mathbf{t}\to 0$:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Рассмотрим пример. Вычислим мгновенную скорость материальной точки, свободно падающей под действием силы тяжести. Из механики известно, что закон движения этой точки задаётся уравнением $\mathbf{S=gt^2/2}$. Поэтому путь $\Delta\mathbf{S}$, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t+\Delta t$, равен

$$\Delta\mathbf{S}= \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \mathrm{gt}\,\Delta\mathrm{t} + \frac{g}{2}(\Delta \mathrm{t})^2$$

Средняя скорость за промежуток $\Delta\mathbf{t}$ равна

$$\mathbf{v_{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t,$$

а мгновенная скорость в момент **t** равна

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt.$$

1.2 Задача о проведении касательной к кривой.

Пусть дана некоторая кривая и точка на ней. Рассмотрим понятие касательной к кривой в данной точке. В школьном курсе элементарной геометрии вводится понятие касательной к окружности – касательная определяется как прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. Но в общем случае – когда рассматривается произвольная кривая – это определение непригодно. Возьмём в качестве примера параболу $y=x^2$. В точке O начала координат обе координатные оси подходят под это определение, хотя интуитивному представлению о касательной в этой точке соответствует только ось x (см. рис.1). Другим примером может служить прямая y=1, которая имеет с синусоидой $y = \sin x$ бесконечно много точек касания (см. рис.2).

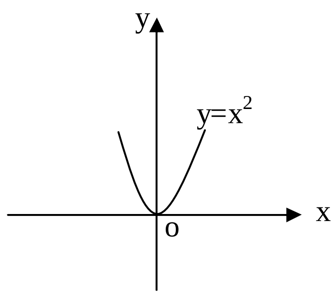

Рис.1

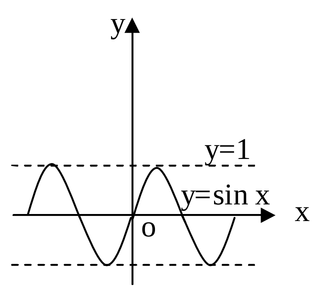

Рис.2

Дадим общее определение касательной. Возьмём на непрерывной кривой L две точки – точку M, в которой мы хотим провести касательную к этой кривой, и точку M_1. Проведём секущую MM_1. Когда точка M_1 будет перемещаться вдоль по кривой, приближаясь к точке M, секущая будет вращаться вокруг точки M.

Касательной к кривой L в точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1, двигаясь вдоль по кривой, стремится к совпадению с точкой M (см. рис.3).

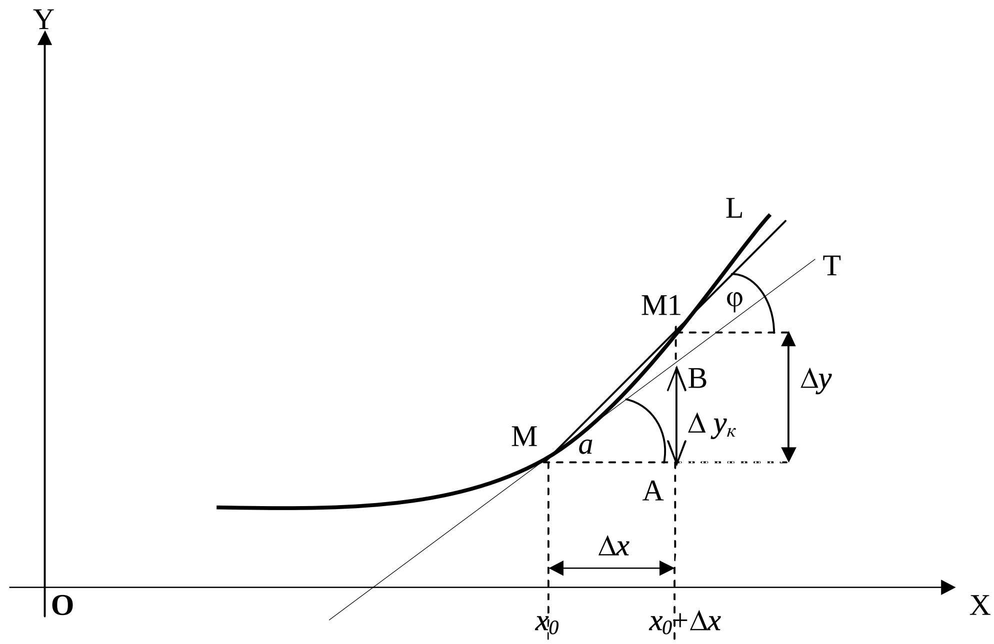

Рис.3

Предположим теперь, что кривая L является графиком непрерывной функции $y=f(x)$. Найдём угловой коэффициент касательной к кривой L в точке M , т.е. $tg\ \alpha$, где α – угол наклона касательной к оси x. Будем считать, что $a \neq p/2$, т.е. касательная не параллельна оси y. Пусть точка M имеет координаты (x_0, y_0), а точка M_1 – координаты ($x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$). Обозначим через φ угол наклона секущей MM_1 к оси x. Тогда угловой коэффициент секущей

$$K\text{сек} = tg\ \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Устремим теперь Δx к нулю. Так как функция $y=f(x)$ непрерывна, то и $\Delta y \to 0$, а, значит, и расстояние между точками M и M_1 $\rho(MM_1)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0$. Это значит, что точка M_1 стремится к совпадению с точкой M. Предположим, что существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=k$$

Так как $\varphi=arctg\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то в силу непрерывности функции y=arctg(x)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\left(arctg\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{arctg}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = arctg(k)$$

Это значит, что при стремлении точки M_1 к точке M секущая MM_1 стремится занять предельное положение с углом наклона $\varphi= arctg(k)$. Это предельное положение и является по определению касательной к кривой L в точке M. Итак, угол наклона касательной к оси x $\alpha = arctg(k)$.

Отсюда $tg\ \alpha=k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Теперь мы можем определить понятие производной.

§ 2. Определение производной.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a;b)$. Рассмотрим значение аргумента $x_0 \in (a;b)$. Дадим аргументу приращение $\Delta x \neq 0$, так чтобы выполнялось условие $(x_0+\Delta x) \in (a;b)$. Обозначим соответствующие значения функции через y_0 и y_1: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_0+\Delta x)$. При переходе от x_0 к $x_0+\Delta x$ функция получит приращение $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Если при стремлении Δx к нулю существует предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, т.е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется производной функции $y=f(x)$ в точке x_0. Итак, производная функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Производная функции $y=f(x)$ в точке x обозначается символами $y'(x)$ или $f'(x)$. Используются также обозначения y', y'_x, f'_x, $\frac{dy}{dx}$. В последних трёх обозначениях подчёркивается то обстоятельство, что производная берётся по переменной x.

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого интервала, то на этом интервале производная $f'(x)$ есть функция аргумента x.

§ 3. Механический и геометрический смысл производной. Уравнения нормали и касательной к графику функции.

Как было показано в § 1, мгновенная скорость точки есть

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Но это означает, что скорость $\boldsymbol{v}$ есть производная от пройденного пути $\boldsymbol{S}$ по времени $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{v} = S'_t$. Таким образом, если функция $y=f(x)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки, где y есть путь, пройденный материальной точкой от момента начала движения до момента времени x, то производная $f'(x)$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени x. В этом и заключается механический смысл производной.

В § 1 был найден также угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ $k = tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это соотношение означает, что угловой коэффициент касательной равен производной $f'(x)$. Говоря более строго, производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$, вычисленная при значении аргумента, равном x, равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке, абсцисса которой равна x. В этом состоит геометрический смысл производной.

Пусть при $x=x_0$ функция $y=f(x)$ принимает значение $y_0=f(x_0)$, и график этой функции имеет касательную в точке с координатами $(x_0;y_0)$. Тогда угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$. Используя известное из курса аналитической геометрии уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении ($y-y_0 = k(x-x_0)$), запишем уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой. Так как нормаль перпендикулярна касательной, то её угловой коэффициент $k_{\text{норм}}$ связан с угловым коэффициентом касательной k известным из аналитической геометрии соотношением: $k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k}$, т.е. для нормали, проходящей через точку с координатами $(x_0;y_0)$, $k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Следовательно, уравнение этой нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \text{(при условии, что } f'(x_0) \neq 0\text{)}.$$

§ 4. Примеры вычисления производной.

Для того чтобы вычислить производную функции $y=f(x)$ в точке x, необходимо:

- аргументу x дать приращение Δx;
- найти соответствующее приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)$;
- составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- найти предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Пример 4.1. Найти производную функции y=C=const.
Аргументу x даём приращение Δx.
Каково бы ни было x, $\Delta y=0$: $\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)=C-C=0$;
Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, т.е. $y'=0$.

Пример 4.2. Найти производную функции $y= x$.
$\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)= x+\Delta x - x=\Delta x$;
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, т.е. $y'=1$.

Пример 4.3. Найти производную функции $y= x^2$.
$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$;
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$, т.е. $y'=2x$.

Пример 4.4. Найти производную функции $y=\sin x$.
$\Delta y=\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x/2};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2) = \cos x, \quad \text{т.е. } y' = \cos x.$$

Пример 4.5. Найти производную функции $y=\sqrt{x}$.

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad \text{т.е.}\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

§ 5. Понятие дифференцируемости функции. Дифференциал.

Пусть, как и раньше, функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a;b)$. Рассмотрим значение аргумента $x_0\in(a;b)$. Дадим аргументу приращение $\Delta x\neq 0$, так чтобы выполнялось условие $(x_0+\Delta x)\in(a;b)$. При этом функция получит приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.
Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x),$$

где A - некоторая постоянная, а $o(\Delta x)$ – величина более высокого порядка малости, чем Δx, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$. Выражение $A\,\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, и обозначается символом dy или $df(x_0)$. При этом приращение независимой переменной Δx называется дифференциалом аргумента и обозначается символом dx. В соответствии с этими обозначениями можно записать: $dy=A\,dx$. Если $A\neq 0$, то при $\Delta x\to 0$ второе слагаемое, т.е. $o(\Delta x)$, является величиной более высокого порядка малости, чем первое слагаемое $(A\,\Delta x)$. При этом приращение функции Δy определяется, главным образом, первым слагаемым, т.е. дифференциалом. Поэтому дифференциал называют главной частью приращения функции.

§ 6. Связь между дифференцируемостью функции и существованием производной.

Докажем теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью функции и существованием у этой функции производной.
Теорема 6.1. Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела в произвольной точке x_0 конечную производную, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в этой точке.
Докажем необходимость. Предположим, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Это значит, что при $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)$, или $\left[\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right]\to 0$. Обозначим эту разность через a: $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$.

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+a$, $\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+a\,\Delta x$, где $a\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a=0$.
Обозначим $f'(x_0)$ через A. Тогда $\Delta y=A\,\Delta x+a\,\Delta x$. Докажем, что $a\,\Delta x$ есть $o(\Delta x)$.
Действительно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a\,\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a=0$.
Итак, $\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x)$, т.е. функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Докажем достаточность. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда в этой точке $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$.

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$, т.е. функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, равную A.

Таким образом, мы доказали, что если функция имеет в некоторой точке конечную производную, то она и дифференцируема в этой точке, и наоборот, если она дифференцируема, то она имеет конечную производную. Поэтому мы имеем право отождествить понятие дифференцируемости функции в данной точке с понятием существования у функции в данной точке производной.

В ходе доказательства теоремы 6.1 мы выяснили, что постоянная A в выражении для приращения Δy дифференцируемой функции $y=f(x)$ в некоторой точке x совпадает с производной функции в этой точке $f'(x)$: $A = f'(x)$. В параграфе 5 мы установили соотношение между дифференциалом функции и дифференциалом независимого аргумента: $dy = A\,dx$. Теперь это соотношение можно переписать в виде $dy = f'(x)\,dx$.

В ходе доказательства этой теоремы мы установили ещё и то, что приращение дифференцируемой функции можно представить в виде

$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + a\,\Delta x$, где $a \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

§ 7. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Докажем теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Теорема 7.1. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в произвольной точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в произвольной точке x_0, т.е. имеет в этой точке производную $f'(x_0)$. Запишем приращение функции Δy точке x_0:

$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + a\,\Delta x$, где $a \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (см. доказательство теоремы 6.1).

Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Тогда, очевидно, и $\Delta y \to 0$. Но это и означает, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Утверждение, обратное этой теореме, неверно: из непрерывности функции в данной точке не вытекает её дифференцируемость в этой точке. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не имеющие в этой точке производной. Примером такой функции служит функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(см. рис.4).

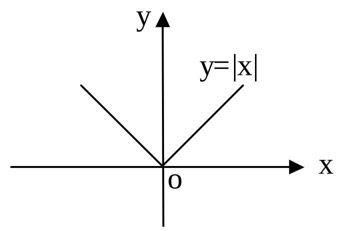

Рис.4

Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней. Действительно, приращение этой функции в точке $x = 0$ есть

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & если\ \Delta x > 0 \\ -1, & если\ \Delta x < 0 \end{cases},$$

т.е. в любой сколь угодно малой окрестности значения $\Delta x = 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ принимает два различных значения: 1 и -1. Это означает, что предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, а, следовательно, график функции не имеет касательной в точке $O(0;0)$ (поскольку угловой коэффициент касательной должен быть равен производной, но производной не существует).

§ 8. Геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и принимает в этой точке значение $y_0= f(x_0)$. Рассмотрим график этой функции (см. рис.3). Проведём в точке $M(x_0; y_0)$ графика касательную MT. Угловой коэффициент этой касательной, $tg\,\alpha$, равен производной $f'(x_0)$. Дадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда ордината графика функции получит приращение Δy, а ордината касательной – приращение $\Delta y_к$. Из треугольника MAB видно, что $\Delta y_к = \Delta x\, tg\,\alpha$. Но $tg\,\alpha = f'(x_0)$. Поэтому $\Delta y_к = f'(x_0)\,\Delta x = f'(x_0)\,dx$. Но последнее выражение, $f'(x_0)\,dx$, есть дифференциал dy функции $y=f(x)$: $dy = f'(x_0)dx$. Следовательно $\Delta y_к = dy$. Итак, дифференциал функции $y=f(x)$ в некоторой точке x есть приращение ординаты касательной к графику функции в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx.

§ 9. Производные простейших элементарных функций.

Степенная функция $y=x^{\alpha}$. Область определения x зависит от значения показателя α. В случае целочисленного показателя, а также в том случае, когда $a=\frac{1}{m}$, где m – целое нечётное число, $x \in R$. Если же $a \in R$, то $x>0$ (если при этом $\alpha>0$, то допускается x=0).

Производная этой функции $(x^{\alpha})' = a \cdot x^{a-1}$. В частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Производная этой функции $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Производная этой функции $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$ ($x \neq k\pi + \frac{p}{2}$), $y = ctg\, x$ ($x \neq k\pi$).

Производные этих функций:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$ $(-1 \leq x \leq 1)$, $y = \arccos x$ $(-1 \leq x \leq 1)$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

Производные этих функций:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

В математике и приложениях встречаются **гиперболические функции**:

гиперболический синус – $sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

гиперболический косинус – $ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

гиперболический тангенс – $th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$,

гиперболический котангенс – $cth\, x = \frac{ch\, x}{sh\, x}$.

Производные этих функций:

$$(sh\, x)' = ch\, x, \quad (ch\, x)' = sh\, x, \quad (th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}, \quad (cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0).$$

Пример 9.1. Найти производную функции $y = x^5$.

По формуле для производной степенной функции при $a = 5$ находим $\left(x^5\right)' = 5x^4$.

Пример 9.2. Найти производную функции $y = \sqrt{x^5}$.

Перепишем выражение для y в виде $y = x^{\frac{5}{2}}$.

По формуле для производной степенной функции при $a = \frac{5}{2}$ находим

$$\left(\sqrt{x^5}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

§ 10. Основные правила вычисления производных.

Теорема 10.1. Пусть функция $u=\varphi(x)$ имеет в данной точке x_0 производную u'. Тогда функция $y = c{\cdot}u$ имеет в точке x_0 производную $y' = c \cdot u'$.

Здесь c – произвольная постоянная.

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда

$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0) = c\cdot \varphi(x_0+\Delta x) - c\cdot \varphi(x_0) = c\cdot[\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)] = c\cdot\Delta\varphi$.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta j}{\Delta x} = c\cdot u'$$

Теорема доказана.

Теорема 10.2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в данной точке x_0 производные. Тогда в этой же точке имеют производные и функции $u(x) + v(x)$, $u(x) - v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$, а также (если $v(x_0)\neq 0$) функция $\dfrac{u(x)}{v(x)}$,

причём $((u \pm v)' = u' \pm v'$, $(uv)' = u'\cdot v + u\cdot v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.

Доказательство. Пусть $f(x) = u(x) + v(x)$. Тогда $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) =$
$= u(x_0+\Delta x) - u(x_0) + v(x_0+\Delta x) - v(x_0)$.

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} = u' + v'$. Таким образом, $(u+v)' = u' + v'$.

Совершенно аналогично доказывается, что $(u - v)' = u' - v'$.

Пусть теперь $f(x) = u(x)\cdot v(x)$. Тогда

$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x) - u(x_0)\cdot v(x_0)$.

Введём для удобства обозначения: $\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0+\Delta x) - v(x_0)$, $u = u(x_0)$, $v = v(x_0)$. Тогда $u(x_0+\Delta x) = u + \Delta u$, $v(x_0+\Delta x) = v + \Delta v$,

$\Delta f = (u + \Delta u)\cdot(v + \Delta v) - u\cdot v = \Delta u\cdot(v + \Delta v) + u\cdot\Delta v$.

Так как функция $v(x)$ дифференцируема (имеет производную) в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, при $\Delta x\to 0$ и $\Delta v\to 0$. Поэтому

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot(v+\Delta v) + u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right] = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v =$
$= u'\cdot v + u\cdot v' + u'\cdot 0 = u'\cdot v + u\cdot v'$. Таким образом, $(uv)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

Пусть далее $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Тогда

$\Delta f = \dfrac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)} = \dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{\Delta u\cdot v - u\cdot\Delta v}{v\cdot(v+\Delta v)}$ (здесь обозначения u, v, Δu, Δv имеют тот же смысл, что и выше).

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot(v+\Delta v)}$.   Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\, v = 0$, то

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)} = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.   Таким образом, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров применения основных правил вычисления производной.

Пример 10.1. Найти производную функции $y = 5x^3 + 3x^2 - 4x + 10$.

Решение. $y' = \left(5x^3\right)' + \left(3x^2\right)' - (4x)' + (10)' = 5\cdot\left(x^3\right)' + 3\cdot\left(x^2\right)' - 4\cdot(x)' + 0 =$
$= 5\cdot 3\cdot x^2 + 3\cdot 2\cdot x - 4\cdot 1 = 15x^2 + 6x - 4$.

Пример 10.2. Найти производную функции $y = (2x^2 + 3x)\cdot e^x$.

Решение. $y' = (2x^2+3x)'\cdot e^x + (2x^2+3x)\cdot(e^x)' = (2\cdot 2x+3)\cdot e^x + (2x^2+3x)\cdot e^x =$
$= (2x^2 + 7x + 3)\cdot e^x$.

Пример 10.3. Найти производную функции $y = \dfrac{x\cdot\sin x + x^2}{x - \cos x}$.

Решение. $y' = \dfrac{(x\cdot\sin x + x^2)'\cdot(x-\cos x) - (x\cdot\sin x + x^2)\cdot(x-\cos x)'}{(x-\cos x)^2} =$

$$\frac{\left[(x\cdot\sin x)' + \left(x^2\right)'\right]\cdot(x-\cos x) - (x\cdot\sin x + x^2)\cdot\left[(x)' - (\cos x)'\right]}{(x-\cos x)^2} =$$

$$\frac{\left[(x)'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' + 2x\right]\cdot(x-\cos x) - (x\cdot\sin x + x^2)\cdot(1+\sin x)}{(x-\cos x)^2} =$$

$$\frac{(1\cdot\sin x + x\cdot\cos x + 2x)\cdot(x-\cos x) - (x\cdot\sin x + x^2)\cdot(1+\sin x)}{(x-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{x^2\cdot(\cos x - \sin x + 1) - \sin x\cdot\cos x - x\cdot(1 + 2\cos x)}{(x-\cos x)^2}$$

§ 11. Производная обратной функции.

Справедлива следующая **теорема.** Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонна (т.е. является либо возрастающей, либо убывающей) и непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 из этого интервала имеет отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда на множестве значений этой функции, соответствующем интервалу $(a;b)$, определена непрерывная обратная функция $x=\varphi(y)$, которая в точке $y_0=f(x_0)$ имеет производную $j'(y_0)$, причём

$j'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Пример. Функция $y = \sin x$ удовлетворяет условиям последней теоремы на интервале $\left(-\dfrac{p}{2};\dfrac{p}{2}\right)$ и всюду на этом интервале имеет отличную от нуля производную:

$(\sin x)' = \cos x \neq 0$. Поэтому на соответствующем интервале значений этой функции $(-1;+1)$ определена и дифференцируема обратная функция

$x = arcsin\, y$, причём $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Здесь перед корнем взят знак плюс, так как на интервале $\left(-\dfrac{p}{2};\dfrac{p}{2}\right)$ функция $\cos x$ положительна. Итак, $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, или, если аргумент y обозначить через x, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

§ 12. Производная сложной функции.

Теорема 12.1 Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u'_x = j'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0 = j(x_0)$ производную $y'_u = f'(u_0)$. Тогда сложная функция $y = f[(j(x)]$ в точке x_0 также имеет производную, равную произведению производных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$:

$$\{f[j(x_0)]\}' = f'_u(u_0) \cdot j'_x(x_0).$$

Коротко это соотношение можно записать в виде $y'_x(x_0) = f'_u(u_0) \cdot j'_x(x_0)$.

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение Δu, а функция $y = f(u)$ получит приращение Δy. Так как функции $\varphi(x)$ и $f(u)$ имеют производные, то есть дифференцируемы, то $\Delta y = f'_u(u_0) \cdot \Delta u + a \cdot \Delta u$, а $\Delta u = j'_x(x_0) \cdot \Delta x + b \cdot \Delta x$, где $a \to 0$ при $\Delta u \to 0$ и $b \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Подставим выражение для Δu в выражение для Δy:

$$\Delta y = f'_u(u_0) \cdot [j'_x(x_0) \cdot \Delta x + b \cdot \Delta x] + a \cdot [j'_x(x_0) \cdot \Delta x + b \cdot \Delta x].$$

Разделим это равенство на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_u(u_0) \cdot [j'_x(x_0) + b] + a \cdot [j'_x(x_0) + b].$$

Если $\Delta x \to 0$, то $b \to 0$ и (как следует из выражения для Δu) $\Delta u \to 0$. Но тогда и $a \to 0$. Поэтому

$$\{f[j(x_0)]\}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_u(u_0) \cdot j'_x(x_0).$$

Теорема доказана.

Остановимся на одном частном случае применения этой теоремы. Пусть $j(x) = C \cdot x$, где C – константа. Тогда $j'_x(x) = C$, $\{f[j(x)]\}' = C \cdot f'_u(u)$.

Пусть, например, $y = \sin 2x$. Здесь $j(x) = 2x$, $C = 2$, $j'_x(x) = 2$. Введём обозначение $u = j(x) = 2x$, тогда $y = f(u) = \sin u$,

$y'_x = (\sin u)'_u \cdot j'_x(x) = 2 \cdot (\sin u)'_u = 2\cos u = 2\cos 2x$.

Рассмотрим примеры вычисления производной сложной функции.

Пример 12.1. Найти производную функции $y = (x^2+3)^5$.

Решение. Введём промежуточную функцию $u = x^2 + 3$. Тогда $y = u^5$.

$y'_x = \left(u^5\right)'_u \cdot \left(x^2+3\right)'_x = 5u^4 \cdot (2x+0) = 5 \cdot (x^2+3)^4 \cdot 2x = 10x \cdot (x^2+3)^4$.

Пример 12.2. Найти производную функции $y = \ln \sin x$.

Решение. Здесь $u = \sin x$, $y = \ln u$.

$$y'_x = \left(\ln u\right)'_u \cdot \left(\sin x\right)'_x = \frac{1}{u}\cos x = \frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx.$$

Пример 12.3. Найти производную функции $y = \sin x^2$.

Решение. Здесь $u = x^2$, $y = \sin u$.

$$y'_x = \left(\sin u\right)'_u \cdot \left(x^2\right)'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2.$$

Пример 12.4. Найти производную функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Здесь $u = x^2$, $y = e^u$.

$$y' = \left(e^u\right)'_u \cdot \left(x^2\right)'_x = e^u \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2}.$$

Пример 12.5. Найти производную функции $y = \cos^2 x$.

Решение. $y' = 2\cos x \cdot \left(\cos x\right)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$

(здесь подразумевается промежуточная функция $u = \cos x$).

Пример 12.6. Найти производную функции $y = arctg(x^2)$.

Решение $\quad y' = \dfrac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' = \dfrac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1+x^4}$

Пример 12.7. Найти производную функции $y = \sin \dfrac{1}{x}$.

Решение. $y' = \cos\dfrac{1}{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \cos\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$.

Если сложная функция получена в результате нескольких суперпозиций, то есть если она содержит несколько промежуточных аргументов, то теорема о производной сложной функции применяется последовательно требуемое число раз. Пусть, например, $y = f(u)$, $u = j(v)$, а $v = y(x)$, то есть $y = f\{j[y(x)]\}$. Тогда $y'_x = f'_u \cdot j'_v \cdot y'_x$.

То же самое можно записать иначе: $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пример 12.8. Найти производную функции $y = \sqrt{e^{\sin x}}$.

Решение. Здесь $v = \sin x$, $u = e^v$, тогда $y = \sqrt{u}$.

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)'_u \cdot \left(e^v\right)'_v \cdot \left(\sin x\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot e^v \cdot \cos x = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sin x}}} \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{e^{\sin x}}}{2} \cdot \cos x.$$

§ 13. Логарифмическое дифференцирование

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и принимает в этой точке положительное значение. Тогда в окрестности этой точки существует функция $u(x) = \ln y = \ln f(x)$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию аргумента x с промежуточным аргументом y. Продифференцируем эту функцию:

$[\ln f(x)]' = \frac{1}{y}\cdot y'$. Из этого соотношения можно выразить производную y':

$y' = y\cdot[\ln f(x)]'$. Такая операция нахождения производной после предварительного логарифмирования называется логарифмическим дифференцированием. Существуют функции, производную которых можно найти только таким способом. К числу этих функций относится степенно-показательная функция $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента x. В качестве примера найдём производную этой функции с помощью логарифмического дифференцирования.

Прологарифмируем эту функцию: $\ln y = v(x)\cdot\ln u(x)$.

Продифференцируем обе части полученного равенства:

$\frac{y'}{y} = [v(x)\cdot\ln u(x)]' = v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}$, отсюда (т.к. $y = u(x)^{v(x)}$)

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Раскрыв скобки, получим окончательную формулу

$$\left(u^v\right)' = u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u' \qquad (13.1)$$

Рассмотрим пример конкретной функции.

Пример. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Решение. Можно сразу воспользоваться формулой (13.1), но можно выполнить логарифмическое дифференцирование и непосредственно:

$$\ln y = \ln(\sin x^{\cos x}) = \cos x\cdot\ln\sin x,$$

$$\frac{y'}{y} = (-\sin x)\cdot\ln\sin x + \cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = (-\sin x)\cdot\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\cdot\left[(-\sin x)\cdot\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right] = (\sin x)^{\cos x-1}\cdot\cos^2 x - (\sin x)^{\cos x+1}\cdot\ln\sin x.$$

Бывают случаи, когда применение логарифмического дифференцирования не необходимо, но целесообразно. Пусть, например, $y = \frac{(x+1)^3\cdot\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x+5}}$. Конечно, в этом случае можно непосредственно воспользоваться правилами вычисления производной, но логарифмическое дифференцирование упрощает выкладки:

$$\ln y = 3\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{3}\ln(x+5),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{3(x+5)},$$

$$y' = \frac{(x+1)^3\cdot\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x+5}}\cdot\left[\frac{3}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{3(x+5)}\right].$$

§ 14. Односторонние производные

Производная есть предел разностного отношения $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, причём этот предел не зависит от характера стремления Δx к нулю (Δx может быть как больше, так и меньше нуля, то есть может стремиться к нулю как справа, так и слева). Но в ряде случаев функция может не иметь в заданной точке производной, хотя в этой точке существует предел отношения

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при условии, что Δx стремится к нулю только справа (правый предел) или только слева (левый предел), или же существует как правый, так и левый предел, но они не равны друг другу. Например, если функция определена на отрезке, а за пределами этого отрезка не определена, то на границах отрезка могут существовать только односторонние пределы. Такие односторонние пределы называются односторонними производными. А именно, если для рассматриваемой функции в заданной точке существует правый (левый) предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то этот предел называется правой (левой) производной. Правая производная функции $y = f(x)$ обозначается символом $f'(x+0)$, левая – символом $f'(x-0)$. То есть $f'(x+0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'(x-0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Выше (см. § 7) уже говорилось о том, что функция $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ не дифференцируема в точке $x = 0$. Однако в этой точке она имеет как правую, так и левую производную. Действительно, $y'(x+0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $y'(x-0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную, то очевидно, что она имеет в этой точке как правую, так и левую производную, причём $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$.

Верно и обратное утверждение: если функция $y = f(x)$ имеет в точке x равные между собой правую и левую производную, то она имеет в этой точке и производную, причём $f'(x) = f'(x+0) = f'(x-0)$.

§ 15. Производные высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого интервала. Тогда на этом интервале производная $f'(x)$ есть функция аргумента x. Может случиться, что в некоторой точке x этого интервала функция $f'(x)$ в свою очередь имеет производную. Тогда эту производную называют второй производной, или производной 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x, и обозначают одним из символов

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ y'',\ y^{(2)}(x),\ \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Предположив, что вторая производная определена на некотором интервале, т.е. является на этом интервале функцией аргумента x, можно аналогичным образом ввести понятие производной 3-го порядка. Рассуждая аналогичным образом, можно затем ввести понятие производной 4-го порядка и т.д. Предположим, что понятие производной $(n-1)$-го порядка уже определено, и что эта производная сама имеет производную. Тогда можно ввести понятие производной n-го порядка от исходной функции $y=f(x)$, определив её как производную от производной $(n-1)$-го порядка. Производную n-го порядка обозначают одним из символов

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Пример. Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin x$.

Решение.

$y' = (\sin x)' = \cos x$, $y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x$, $y''' = (y'')' = -\cos x$, $y^{(4)} = (y''')' = \sin x$.

II. Свойства дифференцируемых функций

§ 16. Возрастание и убывание функции в точке и на интервале

Дадим определение возрастания и убывания функции в точке. Мы будем говорить, что функция *y=f(x)* возрастает (убывает) в точке c, если найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой при $x > c$ $f(x) > f(c)$, а при $x < c$ $f(x) < f(c)$,
(при $x > c$ $f(x) < f(c)$, а при $x < c$ $f(x) > f(c)$).
Напомним определения монотонных и строго монотонных функций на интервале.
Функция называется неубывающей (невозрастающей) на интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$). Неубывающие и невозрастающие функции называются монотонными.
Функция называется возрастающей (убывающей) на интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными.
Докажем теорему, устанавливающую достаточные условия возрастания (убывания) функции.
Теорема 16.1. Если функция *f(x)* дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в точке c.
Доказательство. Рассмотрим случай $f'(c) > 0$. Из определения производной следует, что $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Поскольку $f'(c) > 0$, то (по теореме о сохранении знака функции, имеющей предел) найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой отношение $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ остаётся положительным. Но это значит, что в пределах данной окрестности при $x > c$ $f(x) > f(c)$, а при $x < c$ $f(x) < f(c)$, т.е. функция *f(x)* возрастает в точке c. Аналогично доказывается, что при $f'(c) < 0$ функция *f(x)* убывает в точке c.
Теорема доказана.

§ 17. Локальный максимум и локальный минимум функции.

Дадим определение локального максимума и локального минимума функции.
Говорят, что функция *f(x)* имеет в точке c локальный максимум (минимум), если найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой значение $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений функции в этой окрестности, то есть всюду в этой окрестности выполняется условие $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$).
Для обозначения локального максимума и локального минимума функции употребляется единое название локальный экстремум.
Следующая теорема устанавливает необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.

Теорема 17.1 (называется иногда теоремой Ферма). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ имеет в точке c локальный экстремум, то она не может в этой точке ни возрастать, ни убывать. Следовательно, в силу теоремы 16.1 производная $f'(c)$ не может быть ни положительна, ни отрицательна, то есть $f'(c) = 0$.

Теорема доказана.

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что если в точке локального экстремума график функции имеет касательную, то эта касательная параллельна оси абсцисс (рис. 5).

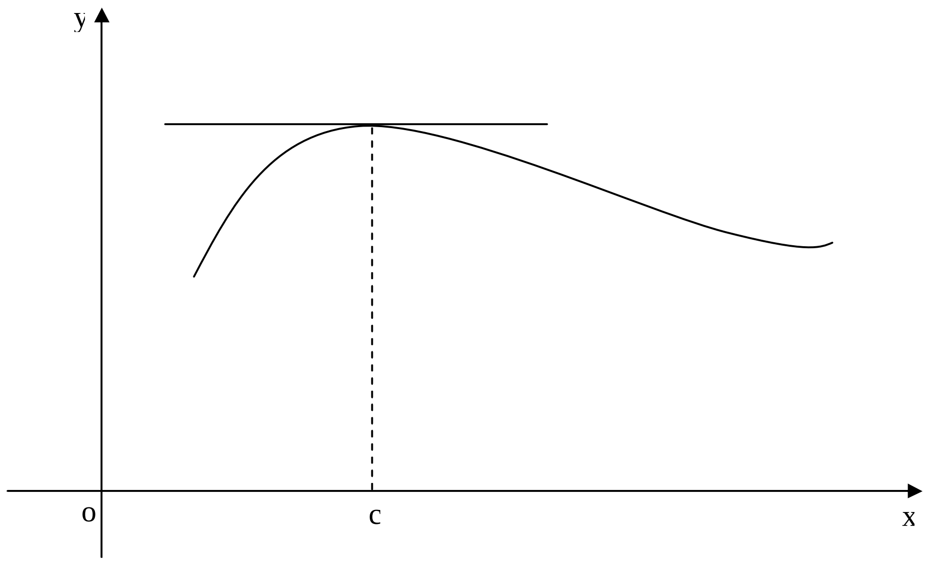

Рис.5

Отметим, что равенство нулю производной является необходимым, но не достаточным условием локального экстремума. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = x^3$ (рис.6).

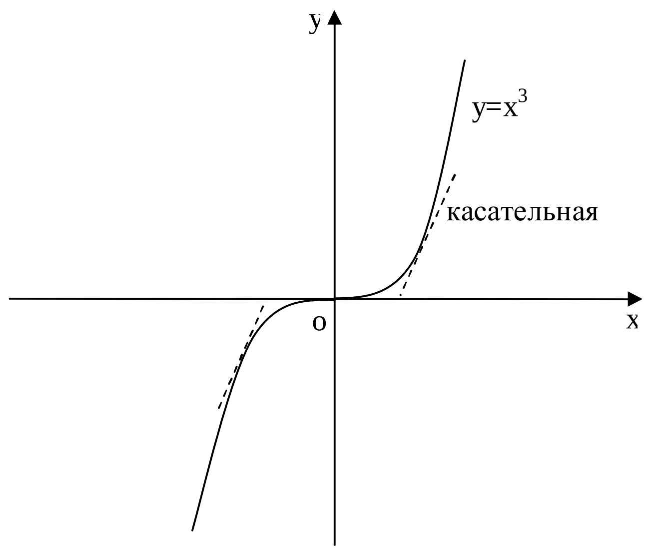

Рис.6

Производная этой функции $y' = 3x^2$. В точке $x = 0$ $y' = 0$. Однако функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси и не имеет в точке $x = 0$ локального экстремума.

§ 18. Теорема Ролля

Теорема 18.1 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на концах отрезка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда внутри отрезка $[a;b]$ найдётся такая точка c, в которой производная $f'(c)$ равна нулю.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то, как следует из теоремы Вейерштрасса, она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M и своего наименьшего значения m. Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a;b]$, а, следовательно, в любой точке x этого отрезка $f'(x) = 0$. Если же $M > m$, то хотя бы одно из двух значений M или m достигается в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$ (так как $f(a) = f(b)$, то не равные между собой значения M и m не могут оба достигаться на концах отрезка $[a;b]$). Но тогда в этой точке c функция $f(x)$ имеет локальный экстремум. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, то по теореме 17.1 $f'(c) = 0$.

Теорема доказана.

§ 19. Теорема Лагранжа

Теорема 19.1 (теорема Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a;b]$ найдётся такая точка c, что для неё выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Последнее равенство носит название *формулы Лагранжа* или *формулы конечных приращений*.

Доказательство. Проведём вначале предварительные рассуждения. Секущая AB (рис. 7) проходит через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, её угловой коэффициент есть $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, поэтому уравнение секущей AB имеет вид

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) \quad \text{или}$$

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Обозначим выражение, стоящее в правой части этого равенства, через $j(x)$:

$$j(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Тогда секущая AB есть график функции $j(x)$. Очевидно, что $j(a) = f(a), \quad j(b) = f(b)$.

Введём теперь на отрезке $[a;b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - j(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

Функции $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна на отрезке $[a;b]$ (как разность непрерывной функции *f(x)* и линейной функции) и во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$ имеет производную, равную $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Кроме того, так как $j(a) = f(a), \quad j(b) = f(b)$, то $F(a) = F(b) = 0$, т.е. функция $F(x)$ принимает равные значения на концах отрезка $[a;b]$. Следовательно, согласно теореме Ролля, на отрезке $[a;b]$ найдётся такая точка c, что $F'(c) = 0$. Это значит, что

$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, т.е. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, откуда $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$.

Теорема доказана.

Обратимся к геометрическому смыслу теоремы Лагранжа. Как мы уже отметили, величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей AB. В то же время $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$.

Таким образом, геометрически утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на дуге AB всегда найдётся точка, в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 7).

Отметим, что теорему Ролля можно рассматривать как частный случай теоремы Лагранжа.

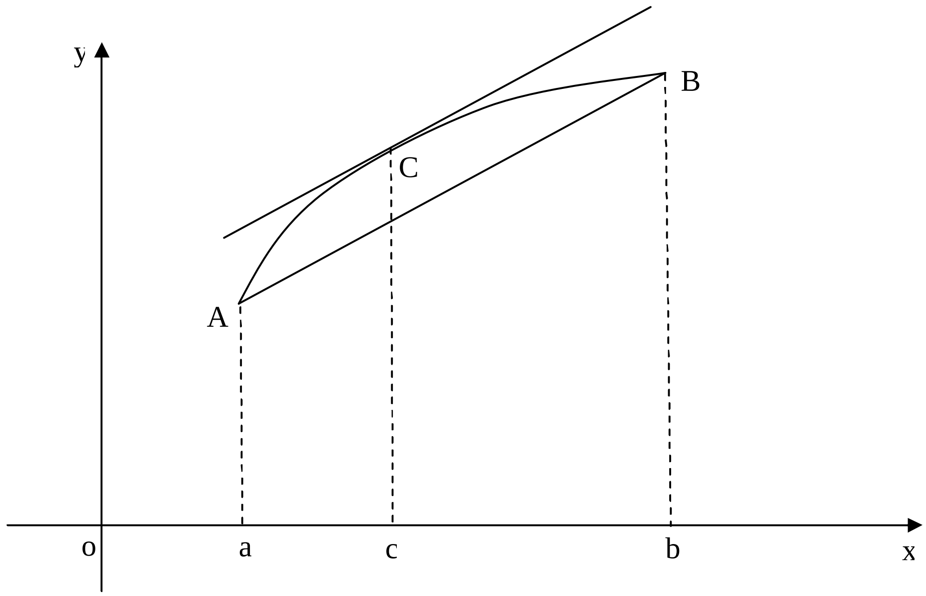

Рис.7

§ 20. Теорема Коши

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Лагранжа.
Теорема 20.1 (теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы во всех внутренних точках этого отрезка, причём производная $g'(x)$ отлична от нуля во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$. Тогда внутри отрезка $[a;b]$ найдётся такая точка c, что справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Последнюю формулу называют формулой Коши или обобщённой формулой конечных приращений.
Доказательство. Убедимся сначала в том, что знаменатель левой части формулы Коши не равен нулю (так как в противном случае это выражение не имело бы смысла). В самом деле, если бы было $g(b)=g(a)$, то для функции $g(x)$ были бы выполнены все условия теоремы Ролля, и, следовательно, внутри отрезка $[a;b]$ нашлась бы такая точка c, что $g'(c)=0$, а это равенство противоречит условию теоремы. Рассмотрим теперь вспомогательную функцию $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$.

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, она непрерывна на отрезке $[a;b]$ (поскольку непрерывны $f(x)$ и $g(x)$) и во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$ имеет производную, равную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x).$$

Кроме того, очевидно, что $F(a)=F(b)=0$. Таким образом, как следует из теоремы Ролля, внутри отрезка $[a;b]$ найдётся такая точка c, что $F'(c)=0$, то есть

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0, \qquad \text{или}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Разделив это равенство на $g'(c)$ (в данном случае это возможно, та как $g'(c) \neq 0$), получим требуемое равенство.
Теорема доказана.

III. Исследование функций с помощью производных

§ 21. Условие постоянства функции на интервале

Рассмотрим достаточное условие постоянства дифференцируемой функции на интервале.
Теорема 21.1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, и если всюду на этом интервале $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ является постоянной на этом интервале.
Доказательство. Зафиксируем некоторую точку x_0 из интервала $(a;b)$ и возьмём любую другую точку x из этого интервала. Отрезок $[x_0, x]$ целиком принадлежит интервалу $(a;b)$, поэтому функция $f(x)$ дифференцируема, а, следовательно, и непрерывна всюду на отрезке $[x_0, x]$. Это значит, что для функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ выполнены условия теоремы Лагранжа. Следовательно, внутри отрезка $[x_0, x]$ найдётся такая точка c, что $f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$. Но так как по условию всюду на интервале $(a;b)$ $f'(x) = 0$, то и $f'(c) = 0$, а, следовательно, $f(x) = f(x_0)$. Это равенство означает, что значение функции $f(x)$ в произвольной точке интервала $(a;b)$ равно её значению в фиксированной точке x_0, то есть функция $f(x)$ постоянна всюду на интервале $(a;b)$.
Теорема доказана.

§ 22. Условия монотонности функции на интервале

Рассмотрим сначала достаточные условия строгой монотонности функции на интервале.
Теорема 22.1. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастала (убывала) на этом интервале достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительной (отрицательной) всюду на этом интервале.
Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f'(x) > 0$. Пусть x_1 и x_2 - любые две точки интервала $(a;b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ дифференцируема, а, следовательно, непрерывна. Поэтому к ней можно применить формулу Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c),$$

где $x_1 < c < x_2$.
По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Случай, когда $f'(x) < 0$, рассматривается аналогично.
Теорема доказана.
Из последней теоремы следует, что отличие от нуля производной является достаточным условием строгой монотонности функции. Однако это условие не является необходимым.

Так, например, функция $f(x)=x^3$ возрастает на любом интервале действительной оси, но при x=0 производная этой функции обращается в нуль (рис. 6). Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие монотонности функции.

Теорема 22.2. Для того чтобы дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной (неположительной) всюду на этом интервале.

Доказательство. 1) Докажем достаточность. Пусть $f'(x)\ge 0$ (≤ 0). Рассмотрим любые две точки x_1 и x_2 интервала $(a;b)$, удовлетворяющие условию $x_1<x_2$. Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, получим:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot f'(c),$$

где $x_1<c<x_2$.

Так как по условию $f'(c)\ge 0$ (≤ 0), $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$ (≤ 0), или $f(x_2)\ge f(x_1)$ $\left(f(x_2)\le f(x_1)\right)$, т.е. функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале $(a;b)$.

2) Докажем необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и не убывает (не возрастает) на интервале $(a;b)$. Так как эта функция не убывает (не возрастает) на интервале $(a;b)$, то она не может убывать (возрастать) ни в одной точке интервала $(a;b)$. Поэтому, как следует из теоремы 16.1, производная $f'(x)$ ни в одной точке интервала $(a;b)$ не может быть отрицательной (положительной).

Теорема доказана.

§ 23. Отыскание точек локального экстремума функции

Как следует из теоремы 17.1, производная дифференцируемой функции в точке локального экстремума этой функции равна нулю. Поэтому функция, дифференцируемая на некотором интервале, может иметь на этом интервале локальный экстремум только в тех точках, где её производная равна нулю. Такие точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю, называются точками возможного экстремума или стационарными точками. Однако в стационарной точке не обязательно достигается локальный экстремум функции. Например, функция $f(x)=x^3$ не имеет локального экстремума в стационарной точке x=0. Предположим теперь, что функция дифференцируема всюду на заданном интервале, за исключением конечного числа точек, в которых эта функция не имеет производной. В тех точках, в которых функция имеет отличную от нуля производную, эта функция, как следует из теоремы 16.1, либо возрастает, либо убывает. Поэтому в таких точках локального экстремума быть не может. В остальных точках заданного интервала, т.е. в стационарных точках и в тех точках, где функция не имеет производной, наличие локального экстремума возможно. Так, например, функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$, но в этой точке функция имеет локальный минимум (рис. 4). Такие точки, а именно стационарные точки и те точки, в которых функция не имеет производной, называются критическими точками. Для того чтобы выяснить, имеется ли экстремум в критической точке, требуется дополнительное исследование. Рассмотрим достаточное условие достижения функцией локального экстремума в критической точке.

Теорема 23.1 (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности критической точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда, если в пределах этой окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки x_0 и отрицательна (положительна) справа от точки x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, то экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда в пределах некоторой окрестности производная $f'(x)$ положительна слева от точки x_0 и отрицательна справа от точки x_0. Выберем в пределах рассматриваемой окрестности произвольную точку x_1, отличную от точки x_0. Функция $f(x)$ дифференцируема, а, следовательно, и непрерывна всюду на отрезке $[x_0;x_1]$, за исключением, быть может, точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Поэтому для функции $f(x)$ на отрезке $[x_0;x_1]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. Следовательно, внутри отрезка $[x_0;x_1]$ найдётся такая точка c, что

$f(x_1)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x_1-x_0)$.

Поскольку производная $f'(c)$ положительна при $x_1<x_0$ и отрицательна при $x_1>x_0$, то в пределах рассматриваемой окрестности выражение $f(x_1)-f(x_0)$ отрицательно. Но это означает, что в пределах данной окрестности значение $f(x_0)$ является наибольшим, то есть точка x_0 доставляет функции $f(x)$ локальный максимум. Рассуждая точно также, можно доказать, что в случае, когда производная $f'(x)$ отрицательна слева от точки x_0 и положительна справа от неё, точка x_0 доставляет функции $f(x)$ локальный минимум, а в случае, когда производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, выражение $f(x_1)-f(x_0)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, что означает отсутствие экстремума в точке x_0.

Теорема доказана.

Рассмотрим примеры нахождения локальных экстремумов с помощью производной.

Пример 23.1. Найти локальные экстремумы функции $y=x^3-3x$.

Решение. Найдём критические точки заданной функции: $y'=3x^2-3$: $y'=0$ при $x_1=1$ и при $x_2=-1$. Заданная функция дифференцируема на всей действительной оси, поэтому других критических точек нет. Выясним, какой знак имеет производная y' в окрестности каждой из точек x_1 и x_2: при $x>1$ и при $x<-1$ $y'>0$, при $-1<x<1$ $y'<0$. Это значит, что слева от точки x_1 производная y' отрицательна, справа положительна, слева от точки x_2 производная положительна, справа отрицательна. В каждой из этих точек функция непрерывна (так как дифференцируемость функции означает её непрерывность). Поэтому на основании теоремы 23.1 можно сделать вывод, что в точке x_1 функция имеет минимум, $y(x_1)=-2$, в точке x_2 функция имеет максимум, $y(x_2)=2$.

Пример 23.2. Найти локальные экстремумы функции $y=|x|$.

Решение. Найдём критические точки: при $x>0$ $y=x$, $y'=1$, при $x<0$ $y=-x$, $y'=-1$, при $x=0$ функция производной не имеет. Таким образом, единственной критической точкой является точка $x=0$. Так как слева от этой точки производная отрицательна, справа положительна, в самой же этой точке функция непрерывна, то в этой точке функция имеет минимум, при этом $y(0)=0$.

Пример 23.3. Найти локальные экстремумы функции $y=x^5$.

Решение. Найдём критические точки: $y'=5x^4$, $y'=0$ при $x=0$. Так как функция дифференцируема на всей действительной оси, то других критических точек нет. Производная y' положительна и слева, и справа от точки $x=0$, в самой этой точке функция непрерывна (в силу дифференцируемости), поэтому в этой точке функция не имеет экстремума.

В ряде случае исследование знака производной $f'(x)$ слева и справа от критической точки оказывается затруднительным. Однако если в этой критической точке функция $f(x)$ имеет равную нулю первую производную (то есть эта точка является стационарной) и, кроме того, имеет отличную от нуля вторую производную, то можно указать следующее достаточное условие наличия в данной точке локального экстремума.

Теорема 23.2 (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ имеет в стационарной точке c отличную от нуля вторую производную. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке c максимум, если $f''(c)<0$, и минимум, если $f''(c)>0$.

Доказательство. Функция $f''(x)$ является производной функции $f'(x)$, поэтому, в соответствии с теоремой 16.1, функция $f'(x)$ в точке c убывает при $f''(c)<0$ и возрастает при $f''(c)>0$. Поскольку по условию точка c является стационарной, т.е. $f'(c)=0$, то убывание (возрастание) функции $f'(x)$ в точке c означает, что найдётся такая окрестность точки c, в пределах которой $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c. Но тогда по теореме 23.1 функция $f(x)$ имеет в точке c максимум (минимум).

Теорема доказана.

Пример 23.4. Найти локальные экстремумы функции $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$.

Решение. Функция определена для значений аргумента $x>1$. Найдём критические точки:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{x}{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}, \qquad y'=0 \quad \text{при} \quad x=2.$$

Производная непрерывна на всей области определения функции. Таким образом, единственной критической точкой является стационарная точка $x=2$. Найдём вторую производную заданной функции: $y''=-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x}{\left(\sqrt{x-1}\right)^5}$.

В точке $x=2$ $y''=\dfrac{1}{2}$. Так как в точке $x=2$ $y''>0$, то на основании теоремы 23.2 можно сделать вывод, что в этой точке функция имеет минимум, при этом $y(2)=2$.

§ 24. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема всюду на этом отрезке за исключением, быть может, конечного числа точек. Пусть, кроме того, производная $f'(x)$ отлична от нуля всюду на отрезке $[a;b]$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Эти предположения означают, что на отрезке $[a;b]$ может содержаться лишь конечное число критических точек функции $f(x)$. Поставим задачу об отыскании максимального и минимального значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего максимального и своего минимального значения. Каждое из этих значений может достигаться либо во внутренней точке отрезка $[a;b]$ (очевидно, что в таком случае оно совпадает с одним из локальных экстремумов), либо на одном из концов этого отрезка. Отсюда следует, что для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ достаточно сравнить между собой

значения этой функции во всех точках локального экстремума и в граничных точках отрезка (в точках a и b) и выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее. Для этого нужно исследовать все критические точки на наличие экстремума и для тех критических точек, которые являются точками экстремума, вычислить значение функции $f(x)$. Если же исследование критических точек на наличие экстремума окажется затруднительным, можно просто вычислить значения функции $f(x)$ во всех критических точках и в граничных точках и выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее.
Отметим, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ лишь одну критическую точку и эта точка является точкой локального максимума (минимума), то можно сразу, не сравнивая значение функции в этой точке с её значениями на концах отрезка, сделать вывод, что это значение является наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример 24.1.Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^4 - 8x^2 + 1$ на отрезке $[-3,+3]$.

Решение. Находим критические точки функции: $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$, $y' = 0$ при $x_1 = 0$, при $x_2 = 2$ и при $x_3 = -2$. Заданная функция дифференцируема на всей действительной оси, поэтому других критических точек нет. Находим значения функции в критических точках и на границах отрезка: $y(x_1) = 1$, $y(x_2) = -15$, $y(x_3) = -15$, $y(-3) = 10$, $y(+3) = 10$. Отсюда видно, что наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 10, наименьшее значение равно -15.

§ 25. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

Дадим определение направления выпуклости графика функции. Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Это значит (см. §3), что на данном интервале график функции $f(x)$ имеет в каждой своей точке касательную, не параллельную оси ординат.

Определение. Говорят, что график функции $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах данного интервала лежит выше (ниже) любой своей касательной.

Следующая теорема устанавливает связь между направлением выпуклости графика функции $f(x)$ и знаком её второй производной. Эта теорема приводится здесь без доказательства.

Теорема 25.1. Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ вторую производную. Тогда, если эта производная положительна (отрицательна) всюду на этом интервале, то график функции $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз (вверх).

Дадим определение точки перегиба. Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, т.е. в любой точке, абсцисса которой принадлежит интервалу $(a;b)$, график этой функции имеет касательную.

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки x_0 оси абсцисс, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

График функции $y = x^3$, изображённый на рисунке 6, на интервале $(-\infty, 0)$ имеет выпуклость, направленную вверх, на интервале $(0, +\infty)$ – выпуклость, направленную вниз; точка (0,0) является точкой перегиба этого графика.
Сформулируем без доказательства необходимое условие перегиба графика функции, имеющей вторую производную.
Теорема 25.2. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную и график этой функции имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$, то $f''(x_0) = 0$.
Отсюда ясно, что перегиб следует искать лишь в тех точках оси абсцисс, в которых сама функция $f(x)$ дифференцируема, а вторая производная этой функции либо равна нулю, либо не существует. Такие точки называются критическими точками второго рода.
Заметим, что равенство нулю второй производной является необходимым, но не достаточным условием перегиба. Так, например, функция $y = x^4$ в точке $x = 0$ не имеет перегиба, хотя вторая производная этой функции, равная $12x^2$, в точке $x = 0$ равна нулю.
Сформулируем теперь без доказательства достаточное условие перегиба.
Теорема 25.3. Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, при этом сама точка x_0 является критической точкой второго рода. Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная $f''(x_0)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то график этой функции имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.
Пример 25.1 Найти интервалы, на которых сохраняется определённое направление выпуклости, и точки перегиба графика функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
Решение. Найдём критические точки второго рода: $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$, $y'' = 0$ при $x = 1$, $y(1) = 0$. Вторая производная существует на всей действительной оси, поэтому других критических точек второго рода нет. При $x < 1$ $y'' < 0$, при $x > 1$ $y'' > 0$, поэтому в интервале $(-\infty, 1)$ график заданной функции имеет выпуклость, направленную вверх, в интервале $(1, \infty)$ – выпуклость, направленную вниз, а точка графика (1,0) является точкой перегиба.

§ 26. Асимптоты графика функции

Рассмотрим кривую, являющуюся графиком функции $y = f(x)$.
Определение. Прямая L называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на кривой, до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.
Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными
Знание асимптот облегчает построение графика функции.
Дадим определение вертикальной асимптоты.
Определение. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.
Заметим, что если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, при котором хотя бы одно из односторонних предельных значений бесконечно, то прямая $x = a$ является для графика этой функции вертикальной асимптотой.
Дадим определение наклонной асимптоты.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде
$f(x) = kx + b + a(x)$,
где $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} a(x) = 0\right)$.

График функции, имеющей две асимптоты (вертикальную и наклонную), изображён на рисунке 8.

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия, при которых график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту.

Теорема 26.1. Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b \right)$$

Доказательство. Рассмотрим случай существования асимптоты при $x \to +\infty$.

1. Необходимость. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда $f(x) = kx + b + a(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + a(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{a(x)}{x} \right] = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [b + a(x)] = b.$$

2. Достаточность. Пусть указанные в теореме пределы при $x \to +\infty$ существуют. Но существование второго из этих пределов означает, что разность $f(x) - kx - b$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$, т.е. $f(x) - kx - b = a(x)$ или $f(x) = kx + b + a(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} a(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Случай существования асимптоты при $x \to -\infty$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Если, в частности, угловой коэффициент k наклонной асимптоты равен нулю, то такая асимптота называется горизонтальной.

Пример 26.1. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$, то прямая $x = 1$ является для графика функции вертикальной асимптотой. При этом $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty$.

Найдём $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot (x - 1)} \right) = 1.$$

Найдём теперь $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0,$$

следовательно, прямая $y = x$ $(y = kx + b = x)$ является для графика заданной функции наклонной асимптотой при $x \to +\infty$. Точно также можно убедиться в том, что прямая $y = x$ является наклонной асимптотой этого графика и при $x \to -\infty$.

Пример 26.2. Убедимся в том, что график параболы $y = x^2$ не имеет асимптот.

Действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$, следовательно, график данной функции не имеет наклонной асимптоты. Так как функция непрерывна на всей действительной оси, то её график не имеет и вертикальных асимптот.

§ 27. Схема исследования графика функции

Для того чтобы исследовать график заданной функции, целесообразно решить следующие задачи.
1. Уточнить область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции (интервалы, на каждом из которых функция либо всюду положительна, либо всюду отрицательна).
4. Найти точки разрыва (если они существуют) и выяснить характер разрыва.
5. Выяснить вопрос о существовании асимптот.
6. Найти интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы, на которых сохраняется определённое направление выпуклости графика функции, и точки перегиба графика.

Пример 27.1. Исследовать график функции $y = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

Решение.
1. Областью определения заданной функции служит вся действительная ось за исключением точки $x = 2$.
2. Функция не является ни чётной, ни нечётной.
3. При $x_1 = 1$ и при $x_2 = -3$ $y = 0$, при $x = 0$ $y = \frac{3}{2}$, следовательно, график функции пересекает ось абсцисс в точках $(1, 0)$ и $(-3, 0)$, а ось ординат пересекает в точке $(0, \frac{3}{2})$. Для исследования интервалов знакопостоянства достаточно представить выражение, определяющее функцию, в виде $y = \frac{(x-1)(x+3)}{x-2}$. Отсюда видно, что в интервалах $(-3, 1)$ и $(2, +\infty)$ функция знакоположительна ($y > 0$), а в интервалах $(-\infty, -3)$ и $(1, 2)$ – знакоотрицательна ($y < 0$).
4. Так как $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = -\infty$, то в точке $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода.
5. Из рассуждений предыдущего пункта следует, что прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Выясним, имеет ли функция наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-3}{x(x-2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-3}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x-3}{x-2} = 4.$$

Следовательно, функция имеет наклонную асимптоту $y = x + 4$.

6. Вычислим первую производную функции: $y' = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2} = \frac{\left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right)}{(x-2)^2}$.

Первая производная в интервалах $\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right)$ и $\left(2+\sqrt{5}, +\infty\right)$ положительна, в интервалах $\left(2-\sqrt{5}, 2\right)$ и $\left(2, 2+\sqrt{5}\right)$ отрицательна, в точке $x = 2$ производная не существует. Следовательно, заданная функция в интервалах $\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right)$ и $\left(2+\sqrt{5}, +\infty\right)$ является возрастающей, в интервалах $\left(2-\sqrt{5}, 2\right)$ и $\left(2, 2+\sqrt{5}\right)$ – убывающей.

7. В точках $x_1 = 2+\sqrt{5}$ и $x_2 = 2-\sqrt{5}$ $y' = 0$, поэтому в этих точках функция имеет локальные экстремумы. Так как слева от точки $x_1 = 2+\sqrt{5}$ производная отрицательна, а справа – положительна, то в этой точке функция имеет локальный минимум, при этом значение функции в этой точке равно $y\left(2+\sqrt{5}\right) = 6+2\sqrt{5}$. В точке $x_2 = 2-\sqrt{5}$ функция имеет локальный максимум, так как слева от этой точки производная положительна, а справа отрицательна. При этом значение функции в этой точке равно $y\left(2-\sqrt{5}\right) = 6-2\sqrt{5}$.

8. Вычислим вторую производную: $y'' = \frac{10}{(x-2)^3}$. В интервале $(-\infty, 2)$ график функции имеет выпуклость, направленную вверх, в интервале $(2, +\infty)$ – выпуклость, направленную вниз, поскольку на первом из этих интервалов $y'' < 0$, а на втором $y'' > 0$. Точек перегиба график не имеет, так как вторая производная нигде не равна нулю, а в точке $x = 2$, где не существует второй производной, сама функция не определена. График этой функции изображён на рисунке 8.

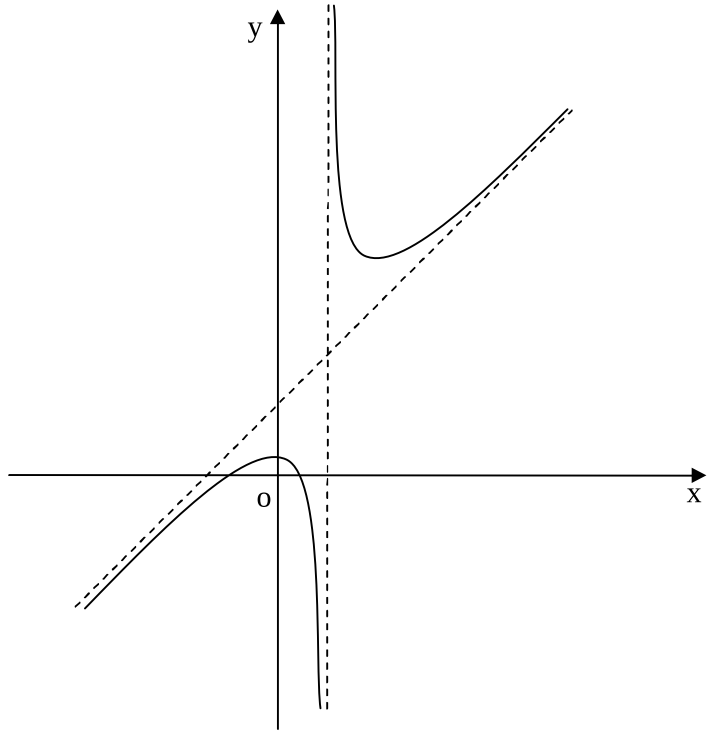

Рис.8