Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

Варианты курсовых заданий

Методические указания к курсовому заданию «Пределы функций. Производные»

Кулакова Р. Д.
Титаренко В. И.

Москва 1999

Аннотация

Предлагаемые методические указания ставят своей целью помочь студентам первого курса усвоить теоретический и практический материал по теме «Математический анализ».

В каждом разделе после теоретической части разбираются типовые задачи.

В методических указаниях охвачены следующие темы: пределы функций, дифференцирование функций, заданных в различных видах, производные и дифференциалы высших порядков, правило Лопиталя, приложение производной к задачам геометрии и механики.

Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовую работу по перечисленным выше темам.

Настоящие методические указания могут использоваться на всех факультетах и специальностях.

1. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

Для определения пределов последовательностей и функций используются некоторые известные приемы:

1. Если необходимо найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{4x+1}\right)=A,$$

можно предварительно привести к общему знаменателю

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3-2x^4+x^2}{(2x^2-1)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^4+x^3+x^2}{2x^3+2x^2-x-1}.$$

Поделив на член, имеющий максимальную степень, получим в числителе постоянную величину, а в знаменателе – все члены, стремящиеся к 0,то есть

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=-\infty.$$

2. Аналогично, для примера

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=A$ в этом пределе, если подставить x=a, то получится неопределенность, которую можно преодолеть, если разложить разность кубов в знаменателе $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, а числитель в виде: $x^2-ax-x+a=x(x-1)-a(x-1)=(x-1)(x-a)$.

Тогда $A=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-1}{x^2+ax+a^2}$ и подставив x=a, получим: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-1}{x^2+ax+a^2}=\dfrac{a-1}{a^2+a^2+a^2}=\dfrac{a-1}{3a^2}$;

4. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$, при подстановке x=0, получим $A=-2$.

5. Однако, если необходимо найти предел рациональной функции

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^4+3x^3+x^2}$, то при делении на член с минимальной степенью, получим

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+3x^2+x}$; и, устремив x к 0, получим:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1}{x^3+3x^2+x}=\frac{1}{0}=\infty$$

Если в пределах содержатся иррациональные выражения, то приходится вводить новые переменные для получения рационального выражения, или же переводить иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}=A$; Сделаем замену переменной. Заменим

$\sqrt[3]{x}=t; x=t^3$, при $x\to\infty; t\to\infty$, получим

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{3t^3+1}{5t^3+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3+\frac{1}{t^3}}{5+\frac{t}{t^2}}=\frac{3}{5}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=A$. Если числитель и знаменатель умножить на одно и то же число, то предел не изменится. Умножим числитель на $(\sqrt{x^2+4}+2)$ и разделим на это же выражение, чтобы предел не изменился, а знаменатель умножим на $(\sqrt{x^2-9}+3)$ и разделим, на это же выражение. Тогда получим:

$$A=\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}-3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)(\sqrt{x^2+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x^2+9-9}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=1\cdot\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Для определения пределов часто используются замечательные пределы:

$$\lim\frac{\sin x}{x}=1; \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ . \qquad (2)$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=A$.

Для вычисления такого предела сведем его к 1-му замечательному пределу (1). Для этого умножим и разделим числитель на $3x$, а знаменатель на $5x$, тогда

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\frac{1}{5x\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin 5x}{5x}}=1\cdot\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}=A$ Для вычисления этого предела сведем его ко второму замечательному пределу. С этой целью из рационального выражения в скобках выделим целую часть и представим ее в виде правильной дроби. Так поступают в тех случаях, когда $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)=1$, где $U(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}V(x)=\infty$, где $V(x)=2x+1$;

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x-2}{5}}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x-2}\cdot(2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x-2}{5}}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(2x+1)}{x-2}};$$

$$\lim_{y=\frac{x-2}{5}\to\infty}\left[1+\frac{1}{y}\right]^{y}=e$$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5(2x+1)}{x-2}=10$, то окончательно $A=e^{10}$.

Здесь использовалась непрерывность композиции непрерывных функций.

2. ПРОИЗВОДНАЯ

Производной от функции $y=f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \text{или}\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x, то есть $y'=tga$.

Производная есть скорость изменения функции в точке x.

Отыскание производной называется дифференцированием функции. Формулы дифференцирования основных функций:

1. $(x^m)' = m \cdot x^{m-1} \cdot x' = m \cdot x^{m-1}.$

2. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{1-\frac{1}{2}} \cdot x' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} \cdot x' = -\frac{1}{x^2}.$

4. $\left(e^x\right)' = e^x \cdot x' = e^x.$

5. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot x' = a^x \ln a.$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x}.$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x' = \frac{1}{x \ln a}.$

8. $(\sin x)' = \cos x \cdot x' = \cos x.$

9. $(\cos x)' = -\sin x \cdot x' = -\sin x.$

10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$

11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot x' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x.$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x' = \frac{1}{1+x^2}.$

15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot x' = -\frac{1}{1+x^2}.$

16. $(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = chx \cdot x' = chx.$

17. $(chx)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = shx \cdot x' = shx.$

18. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x} \cdot x' = \dfrac{1}{ch^2 x} \cdot x' = \dfrac{1}{ch^2 x}.$

19. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x} \cdot x' = -\dfrac{1}{sh^2 x}.$

3. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $C - const, U = U(x), V = V(x)$, тогда:

1) $C' = 0;$
2) $x' = 1;$
3) $(U \pm V)' = U' \pm V';$
4) $(C \cdot U)' = C \cdot U';$
5) $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V';$
6) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$

7) Если $y = f(U), U = U(x)$, то есть $y = f[U(x)]$, где $f(U)$ и $U(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot U'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Примеры:

1) $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x;$

2) $(3\ln x)' = 3 \cdot (\ln x)' = 3 \cdot \dfrac{1}{x};$

3) $(x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x(e^x)' = e^x + x \cdot e^x;$

4) $\left(\dfrac{x^2}{tgx}\right) = \dfrac{(x^2)' \cdot tgx - x^2 (tgx)'}{(tgx)^2} = \dfrac{2xtgx - x^2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x};$

5) $\left(\sqrt{e^{2x}+\cos^2 x}\right)' = \left[\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)' =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{2x}(2x)' + 2\cos x(-\sin x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+\cos^2 x}}\cdot(e^{2x}\cdot 2x - 2\cos x \sin x).$$

4. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если требуется найти y' из уравнения $y = f(x)$, то можно:
а) логарифмировать обе части уравнения
$\ln y = \ln f(x) = j(x)$;
б) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от x,

$$\frac{y'}{y} = j'(x) \Rightarrow y' = y\cdot j'(x).$$

в) заменить y его выражением через x
$y' = f(x)\cdot j'(x)$.

Пример: $y = x^x$

$a)\ln y = x\ln x;$

$б)\frac{y'}{y} = x'\cdot\ln x + 1;\ y' = y(\ln x + 1);$

$в)y' = x^x\cdot(\ln x + 1).$

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x.
а) продифференцируем по x обе части уравнения $F(x, y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y';
б) из полученного уравнения выразим y'.
Пример: $x^2 + y^2 = 4$.

$$a)2x\cdot x'+2y\cdot y'=0;$$
$$2x+2y\cdot y'=0;$$
$$x+y\cdot y'=0;$$
$$б)y'=-\frac{x}{y}.$$

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $x = j\,(t), y = y\,(t)$,

тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Пример: $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)} = 5t^2.$$

7. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

Пусть $y = f(x)$ и $f'(x_0) = tga$, где a -угол, образованный с положительным направлением оси OX касательной к кривой в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, где y'_0-производная y' при $x = x_0$.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}\,(x - x_0).$$

Угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по формуле

$$tg j = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}.$$

8. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если y' есть производная от функции $y = f(x)$, то производная от y' называется второй производной, или производной второго порядка и обозначается y'', или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично определяются производные любого порядка:производная третьего порядка $(y'')' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$;

производная n-го порядка:

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Для произведения двух функций можно получить производную любого n-го порядка, пользуясь формулой Лейбница:

$$(UV)^{(n)} = U^{(n)}\cdot V + nU^{(n-1)}V' + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot U^{(n-2)}V'' + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot U^{(n-k)}\cdot V^{(k)} + \ldots + nU'V^{(n-1)} + UV^{(n)}.$$

Пример:

1)

$y = x^5 - 7x^3 + 2; y''' - ?$

$y' = 5x^4 - 21x^2,$

$y'' = 20x^3 - 42x,$

$y''' = 60x^2 - 42.$

9. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ОТ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

$F(x, y) = 0$ -уравнение определяет y, как неявную функцию от x.

а) определим $\frac{dy}{dx} = j(x, y)$;

б) продифференцируем по x левую и правую части равенства $\frac{dy}{dx} = j\left(x, y\right),$

причем, дифференцируя функцию $j\,(x, y)$ по переменной x, помним, что y есть функция от x:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dj\left(x, y\right)}{dx} = F\left(\ x, y, \frac{dy}{dx}\ \right);$$

в) заменяя $\frac{dy}{dx}$ через $j\left(x, y\right)$, получим:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(\ x, y, j\left(x, y\right)\ \right) = y\,(x, y) \text{ и т.д.}$$

Пример:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

10. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

$$\begin{cases} x = j\left(t\right), \\ y = y\left(t\right). \end{cases}$$

$$а) y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}};$$

$$б) y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$в) y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}};\ldots$$

Пример:

Найти $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, если $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -tgt,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(-tgt\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

11. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ*

Дифференциалом первого порядка функции $y = f(x)$ называется главная, линейная относительно аргумента часть . Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.
Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:
$dy = y'dx$.
Основные свойства дифференциала:
1. $dC = 0,$ где $C = const$.
2. $dCU = C \cdot dU$.
3. $d(U \pm V) = dU \pm dV$.
4. $d(UV) = UdV + VdU$.
5. $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}, (V \neq 0)$.
6. $df(U) = f'(U)dU$.

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.
Таким образом, дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений.
Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.
Аналогично: $d^3y = d(d^2y)$.
$d^n y = d(d^{n-1}y)$.
Если $y = f(x)$ и x - независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2y = y''(dx)^2, d^3y = y'''(dx)^3, \mathbf{K}\, d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Пример.

Найти дифференциалы первого и второго порядков функции

$y = arctgx.$

$$dy = (arctgx)' dx = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$d^2 y = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' (dx)^2 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}(dx)^2.$$

12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

Все вышеперечисленные пределы не использовали аппарат дифференциального исчисления. Однако, если необходимо найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и при $x \to a$ обе эти функции бесконечно малые или обе бесконечно большие, то их отношение не определено в точке $x = a$ и, следовательно, представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ соответственно. Поскольку это отношение в точке $x = a$ может иметь предел, конечный или бесконечный, то нахождение этого предела называется раскрытием неопределенности (правило Лопиталя Бернули),

и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ если } g(x)\neq 0 \text{ и } g'(x)\neq 0.$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x} =$(здесь имеет место неопределенность типа $\frac{0}{0}$)=

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}e^{2x}\sqrt{1-9x^2} = \frac{2}{3}.$$

Аналогичное правило имеет место, если $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg\frac{px}{2}}{\ln(1-x)} =$(неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{px}{2}}}{\frac{-1}{1-x}}=-\frac{p}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos^2\frac{px}{2}}$$

$$=-\frac{p}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2\sin\frac{px}{2}\frac{p}{2}\cos\frac{px}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin px}=\infty.$$

Правило Лопиталя позволяет также раскрывать неопределенности типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, где $f(x)$- бесконечно малая, а $g(x)$- бесконечно большая при $x\to a$(раскрытие неопределенности типа $0\cdot\infty$) следует преобразовать произведение к виду

$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ (неопределенность типа $\frac{0}{0}$) или к виду

$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$(неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$) и далее использовать правило

Лапиталя.

3.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)ctgp\,(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{tgp\,(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{p}{\cos^2 p\,(x-1)}}=$$

$$=\frac{1}{p}\lim_{x\to 1}\cos^2 p\,(x-1)=\frac{1}{p}.$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, где $f(x)$ и $g(x)$- бесконечно большие при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $\infty-\infty$) следует преобразовать разность к виду $f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$, затем раскрыть неопределенность $\frac{g(x)}{f(x)}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\infty$.

Если же $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$, то получается неопределенность типа ($\infty\cdot 0$), которая раскрывается аналогично примеру 12).

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}\left(1-\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{3(1-\sqrt{x})}\right).$

Так как $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{3(1-\sqrt[3]{x})}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}}=\lim\limits_{x\to1}x^{1/6}=1$, то

получим в итоге неопределенность типа $\infty\cdot0$ и далее имеем

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(1-\dfrac{2}{3}\dfrac{(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt[3]{x})}\right)}{2(1-\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}}\right)}{-\dfrac{2\cdot1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to1}x^{2/3}=1.$$

Правилом Лопиталя можно пользоваться также для раскрытия неопределенностей типа $0^0,\infty^0,1^\infty$. В этих случаях имеется в виду вычисление предела выражения $\left(f(x)\right)^{j(x)}$, где $f(x)$ в случае "0^0"есть бесконечно малая, в случае "∞^0"- бесконечно большая, а в случае "1^∞"- функция, предел которой равен единице.

Функция $j(x)$в первых двух случаях является бесконечно малой, а в последнем случае – бесконечно большой функцией.

Прежде чем искать предел таких выражений, их логарифмируют, т.е. если $y=f(x)^{j(x)}$, то $\ln y=j(x)\ln f(x)$, затем находят предел $\ln y$, и после чего находят предел y. Во всех перечисленных случаях $\ln y$ является неопределенностью типа "$0\cdot\infty$", которую раскрывают аналогично примеру 12).

5. $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x(0^0)}\Rightarrow\ln y=\sin x\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=$(воспользуемся правилом

Лопиталя)=

$$=\lim_{ч\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2x}\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\sin x.$$

В этом произведении пределов первый равен 1, второй сомножитель представляет собой первый замечательный предел и он тоже равен 1, а последний сомножитель стремится к 0, следовательно:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y = 0$ и тогда $y = e^0 = 1$.

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{1}{x}\ln(x+2^x) = \dfrac{\ln(x+2^x)}{x}$;

$$\lim_{x\to +\infty}\ln y = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2} = \ln 2;$$

$\ln y = \ln 2 \Rightarrow y = 2$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x = \dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$;

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{e^{x-1}}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x} = 1;$$

$\ln y = 1 \Rightarrow y = e$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+\dfrac{1}{x}} = 0;$$

$\ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$.

КУРСОВУЮ РАБОТУ ВКЛЮЧЕНА 21 ЗАДАЧА.

№1-4 – Вычисление пределов функций;

№5-10 – Найти производные функций;

№11 – Найти первую производную;

№12 – Вычислить $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрическом виде;

№13 – Найти d^2y;

№14 – Найти $y^{(n)}$;

№15 – Составить уравнение нормали и касательной к кривой в точке x_0;

№16 – Вычислить значение функции приближенно с помощью дифференциала;

№17 – Найти y''_{xx};

№18 – Найти y''';

№19 – Найти y';

№20-21 – Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

Вариант 1

№1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-arctg3x}$.

№2. $\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{11+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

№4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.

Вычислить производную

№5. $y=\dfrac{tg^2x}{x^3}$.

№6. $y=\log_3(\ln^4 x)$.

№7. $y=(\cos x)^{e^4}$.

№8. $y=arctg(\sqrt[4]{x+2})$.

№9. $y=x\cdot 3^{3\cos^2 x}$.

№10. $y=\dfrac{2+\arcsin x\cdot x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

№11. $3^x+3^y=3\cdot(x-y)$.

№12. $\begin{cases} x=\ln\sin t \\ y=tgt \end{cases}$.

№13. $y=x^3-3\arg tgx$.

№14. $y=(x+1)\cdot e^x$.

№15. $y=\dfrac{(4x-x^2)}{4}, x_0=2$.

№16. $y=\sqrt[3]{x}, x=7{,}51$.

№17. $\begin{cases} x=arctgt \\ y=\dfrac{t^2}{2} \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=(2x^2-7)\ln(x-1)$, $y^v=?$

№19. $y=x^{e^{arctgx}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to p}(1+3tgx)^{ctgx}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.

Вариант 2

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

Вычислить производную

№5. $y=ctg^3x\cdot arctg^3x$.

№6. $y=\dfrac{\cos 2x+x}{3x}$.

№7. $y=(\ln 3x)^{\arcsin x}$.

№8. $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x^5+1}}$.

№9. $y=4^{-5\sin^3 x}$.

№10. $y=tg5x\cdot(1+\arcsin x)$.

№11. $e^{\frac{x}{y}}+x=y$.

№12. $\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

№14. $y=\ln g$.

№15. $y=2x^2+3x-1, x_0=-2$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}, x=1{,}015$.

№17. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=x\cdot\cos x^2, y'''=?$

№19. $y=x^{e^{\cos x}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos xp)^{tg(x-2)}$.

Вариант 3

№1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

№2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{sixp}-e^{-\sin 3xp}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

№4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

Вычислить производную

№5. $y=\log_4(\sin^3 x)$.

№6. $y=(\arg\cos x)^{\frac{1}{x^3}}$.

№7. $y=\sqrt{2-a\cdot tg3x}$.

№8. $y=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^2-1}}}$.

№9. $y=\dfrac{tg6x-4x^3}{x^4}$.

№10. $y=3^{\sin^3 x}$.

№11. $(x+2y)^4=tg(xy)$.

№12. $\begin{cases} x=e^{2t}\cos 3t, \\ y=e^{2t}\sin 3t. \end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

№14. $y=\dfrac{1}{kx+1}$.

№15. $y=x-x^3, x_0=-1$.

№16. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}, x=0{,}98$.

№17. $\begin{cases} x=cht \\ y=\sqrt[3]{sh^2 t} \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=(3-x^2)\ln^2 x, y'''=?$

№19. $y=x^{2^x}\cdot 5^x, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(\arcsin x+\arccos x)^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 4

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(p-4x)^2}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

Вычислить производную

№5. $y=\dfrac{6x-2tgx}{5x^2}$.

№6. $y=\log_6(arcctgx)$.

№7. $y=\dfrac{5}{\sqrt{\arcsin x}}$.

№8. $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

№9. $y=x\cdot 4^{2\cos^2 x-\sin x}$.

№10. $y=\arccos x+\sqrt{1-x^3}$.

№11. $\sin(xy)=x+y$.

№12. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

№13. $y=e^{-x^2}$.

№14. $y=\cos x$.

№15. $y=x^2+8\sqrt{x}-3{,}2, x_0=4$.

№16. $y=\sqrt[3]{x}, x=27{,}54$.

№17. $\begin{cases} x=e^t \\ y=\arcsin t \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, y'''=?$

№19. $y=x^{e^{ctgx}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{tg\left(\frac{xp}{6}\right)}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{2x}-e^2}{x-1}\right)^{x+1}$.

Вариант 5

№1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x+3x}$.

№2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

№3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos(xp)}{tg^2(xp)}$.

№4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\arccos x+x^3}$.

Вычислить производную

№5. $y=3arcctg\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

№6. $y=\dfrac{\cos^5 x+x^4}{ctg^2}$.

№7. $y=4\cos^6 x\cdot\left(\sqrt{x}-4^{x^2}\right)$.

№8. $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$.

№9. $y=\ln(tg4x)$.

№10. $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+5}}}$.

№11. $y^4+x^4=\ln\dfrac{x}{y}$.

№12. $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t.\end{cases}$

№13. $y=\sqrt{x+1}$.

№14. $y=(1-x)\cdot e^x$.

№15. $y=x+\sqrt{x^2}, x_0=1$.

№16. $y=\arcsin x, x=0{,}08$.

№17. $\begin{cases}\dfrac{x=\cos t+t\sin t}{y=\sin t-t\cos t}\end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\log_2 x}{x^3}, y'''=?$

№19. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}(\cos x+1)^{\sin x}$.

Вариант 6

№1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(7xp)}{\sin(8xp)}$.

№4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$.

Вычислить производную

№5. $y=arctg\sqrt[3]{x+1}$.

№6. $y=\sin^2(\ln 2x)$.

№7. $y=\dfrac{tg^3x+1}{x-1}$.

№8. $y=(\arccos x)^x$.

№9. $y=x\cdot 4^{3\sin^3 x}$.

№10. $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

№11. $x\cos y=y\cos x$.

№12. $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$.

№13. $y=e^{-3t}$.

№14. $y=\dfrac{1}{x+1}$.

№15. $y=\sqrt[3]{x^2}-20, x_0=-8$.

№16. $y=\sqrt{x^2+x+3}, x=1{,}97$.

№17. $\begin{cases}x=\cos^2 t\\ y=tg^2 t\end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\ln x}{x^3}, y^{iv}=?$

№19. $y=(x-5)^{chx}$.

№20. $\lim\limits_{x\to2p}(\cos x)^{\frac{ctg2x}{\sin 3x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x}+x-1\right)^{\sin\left(\frac{xp}{4}\right)}$.

Вариант 7

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2p}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4p^2}}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

Вычислить производную

№5. $y=\dfrac{ctgx}{x^3-x}$.

№6. $y=5\ln(6\sin x)$.

№7. $y=\dfrac{1}{5^{x^2}}$.

№8. $y=(\arccos x)^{2\sin x}$.

№9. $y=\sqrt{x+arctg^2x}$.

№10. $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$.

№11. $\sin(x+y)=y^2$.

№12. $\begin{cases} x=tgx, \\ y=\cos^2 x. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt[3]{x^2}$.

№14. $y=x\cdot e^x$.

№15. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0=4$.

№16. $y=\sqrt[3]{x}, x=26{,}46$.

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t-3} \\ y=\ln(t-3) \end{cases}$

№18. $y=\left(1+x^2\right)\cdot arctgx, y'''=?$

№19. $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\sin x}}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

Вариант 8

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+4x^2+5x+2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg(xp)}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{arctgx+x^3}$.

Вычислить производную

№5. $y=\sin^3(4x^2+1)$.

№6. $y=\dfrac{5tg^2x-8^{x^3}}{x^4}$.

№7. $y=\sqrt[4]{arctg(2x+3)}$.

№8. $y=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\ln x}$.

№9. $y=x^4\arccos\left(\sqrt{x}\right)$.

№10. $y=\sqrt[5]{1+3\sqrt[3]{x}}$.

№11. $y=x^{3y^2}$.

№12. $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$

№13. $y=\lg(a+bx)$.

№14. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

№15. $y=8\sqrt[4]{x}-70, x_0=16$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}, x=0{,}97$.

№17. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2+\cos t \end{cases}, y''_{xx}=?$

№18. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}, y^{iv}=?$

№19. $y=(x^2+1)^{\cos x}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Вариант 9.

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

№3. $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-5^{-2x}}{2\arcsin x-x}$.

Вычислить производную

№5. $y=\arcsin(\log_3 x)$.

№6. $y=x^6 2^{-\sin^4 x}$.

№7. $y=\dfrac{e^{3x}-3tg4x}{\sqrt{x}}$.

№8. $y=\sqrt[3]{\ln x-\ln 5}$.

№9. $y=(arcctgx)^{\sin x}$.

№10. $y=tg^2(2x+1)$.

№11. $\dfrac{y}{x}=\arccos(x-y)$.

№12. $\begin{cases} x=2t\cos t, \\ y=2t\sin t. \end{cases}$

№13. $y=ctgx$.

№14. $y=\ln(ax+b)$.

№15. $y=2x^2-3x+1, x_0=1$.

№16. $y=x^{11}, x=1{,}021$.

№17. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=(2x+3)\cdot\ln^2 x, y'''=?$

№19. $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{p}{arctgx1}}$.

Вариант 10.

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{\arcsin x+x^3}$.

Вычислить производную

№5. $y=x\cdot 3^{4\sin+\cos^2 x}$.

№6. $y=5tg(x^2+1)$.

№7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{arctg^2 x-1}}$.

№8. $y=(\arcsin x)^{\ln x}$.

№9. $y=\dfrac{tgx+4}{x^4}$.

№10. $y=\lg_3\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)$.

№11. $e^y\sin x=\sin(x+y)$.

№12. $\begin{cases} x=a^t-1, \\ y=1-6t^2. \end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

№14. $y=xe^{-kx}$.

№15. $y=\dfrac{(x^2-3x+6)}{x^2}, x_0=1$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^2}, x=1{,}03$.

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}, y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=(4x+3)2^x, y^{(5)}=?$

№19. $y=(x^2-1)^{shx}, y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to p}(1+3tgx)^{ctgx}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln^2 ex\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$.

Вариант 11.

№1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin 4x}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{tg3x-x}$.

Вычислить производную

№5. $y=\sqrt[4]{arcctg3x}$.

№6. $y=tg^2x\cdot\log_3 x$.

№7. $y=\dfrac{\arccos 3x}{1-x^3}$.

№8. $y=(tgx)^{e^x}$.

№9. $y=\dfrac{x}{5^{\sin^2 x}}$.

№10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

№11. $arcctg(xy)=x^3y^2$.

№12. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

№13. $y=x\cdot a^x$.

№14. $y=\sin ax$.

№15. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\ x_0=64$.

№16. $y=x^{21},\ x=0{,}998$.

№17. $\begin{cases} x=sht, \\ y=th^2t,\ y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=e^{1-2x}\cdot\sin(2+3x),\ y^{(4)}=?$

№19. $y=x^{\sin x^3},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$.

№21. $\lim\limits_{t\to\infty}(x+\sin x)^{\sin x+x}$.

Вариант 12.

№1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

№3. $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{x^2-p^2}{\sin x}$.

№4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{tg^2x-\sin x}$.

Вычислить производную

№5. $y=\sin^x\left(x^3+5x\right)$.

№6. $y=x\cdot 3^{2tg^4x}$.

№7. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x+1}}$.

№8. $y=(ctg)^{e^x}$.

№9. $y=(\ln x)^{x^4}$.

№10. $y=\dfrac{\log_3 x}{\arcsin^2 x}$.

№11. $\dfrac{y}{x}=\arccos(x-y)$.

№12. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a\cos t. \end{cases}$

№13. $y=arctgx$.

№14. $y=xe^{\frac{x}{a}}$.

№15. $y=\dfrac{(x^3+2)}{(x^3-2)},\ x_0=2$.

№16. $y=\sqrt[3]{x^2},\ x=1{,}03$.

№17. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}, \\ y=\ln t,\ y''_{xx}=? \end{cases}$

№18. $y=\dfrac{\ln(3+x)}{3+x},\ y'''=?$

№19. $y=\left(x^3+4\right)^{tgx},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{2x}$.

№21. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{tgpx}$.

Вариант 13.

№1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tgpx}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2px-arctgx}$.

Вычислить производную

№5. $y=x^2\ln^2\cos x.$

№6. $y=(\cos x)^{tgx}$.

№7. $y=\sqrt[3]{\arcsin^2 x-3}.$

№8. $y=\dfrac{x^4}{ctg^2x}$.

№9. $y=\dfrac{1}{5^{x^3}}$.

№10. $y=\sqrt{1-2x-x^2+\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}}.$

№11. $y\ln y=x^2+3.$

№12. $\begin{cases}x=2t-1,\\ y=1-4t^2.\end{cases}$

№13. $y=\sin(a+bx).$

№14. $y=\ln(x+1).$

№15. $y=2x^2-3,\ x_0=-1.$

№16. $y=x^4,\ x=2{,}01.$

№17. $y''_{xx}-?,\begin{cases}x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t}\\ y=\dfrac{\sin t}{1+2\cos t}.\end{cases}$

№18. $y=(2x^3+1),\ y^{(5)}=?$

№19. $y=(x-5)^{chx},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos ecx}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{8}}(tg2x)^{\sin\left(\frac{p}{8}+x\right)}.$

Вариант 14.

№1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4x}-\sqrt{2x}}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln p}{\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)\cos x}$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}$.

Вычислить производную

№5. $y=(\arcsin x)^{\lg_2 x}$.

№6. $y=3^{arctgx}$.

№7. $y=\dfrac{x^5-3\sin x}{tg^2x}$.

№8. $y=\ln^3\sqrt{1-x^2}$.

№9. $y=x^5\cdot tg5x.$

№10. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}}$.

№11. $xy^3+\cos(x-y)=0.$

№12. $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$

№13. $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$. №14. $y=(ax+b)e^x$.

№15. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},\ x_0=1.$

№16. $y=\sqrt[3]{x},\ x=8{,}24.$

№17. $y''_{xx}-?,\begin{cases}x=\sqrt{t-1}\\ y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}.\end{cases}$

№18. $y=(1-x-x^2)e^{\frac{x-1}{2}},\ y^{(4)}=?$

№19. $y=(\cos 5x)^{e^x},\ y'=?$

№20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

№21. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{tgx}}$.

Вариант 15.

№1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

№2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

№3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2^x-16}{\sin px}$.

№4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x - \sin 5x}$.

Вычислить производную

№5. $y=\sqrt[4]{2+arcctg^2 x}$.

№6. $y=(5e)^{-\sin^2 x}$.

№7. $y=\dfrac{5ctgx-5}{x}$.

№8. $y=\arcsin x \cdot \ln^3 3x$. №9. $y=(\ln x)^{\cos x}$.

№10. $y=\sqrt{x^2+1}-\log\sqrt{x^2+1}$.

№11. $y=\arcsin xy$.

№12. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t+t^3. \end{cases}$

№13. $y=\sin^2 x$.

№14. $y=\dfrac{1}{ax+b}$.

№15. $y=2x+\dfrac{1}{x}, x_0=1$.

№16. $y=x^7, x=1{,}996$.

№17. $y''_{xx}-?, \begin{cases} x=\sqrt{6}, \\ y=\sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

№18. $y=(x^2+3)\ln(x-3), y^{(4)}-?$

№19. $y'-?, y=(x\sin x)^{\sin(x\sin x)}$.

№20. $\lim\limits_{t \to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

№21. $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 16.

№1. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

№2. $\lim\limits_{x \to 0} \sin 3x ctg 5x$.

№3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x - arctgx}{x^3}$.

№4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$.

Вычислить производную

№5. $y=\arccos 5x + \ln 3x$.

№6. $y=x^2 arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

№7. $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{ctgx}$.

№8. $y=3^{\sin x+\cos^2 x}$.

№9. $y=\dfrac{4tg2x-1}{x}$.

№10. $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{1-x^2}}}$.

№11. $y=(1+x)^y$.

№12. $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

№13. $y=\sqrt{x}$.

№14. $y=x\cdot e^{kx}$.

№15. $y=3\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right), x_0=1$.

№16. $y''_{xx}-?, \begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$

№17. $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}; y^{(4)}-?$

№18. $y'-?, y=x^{e^{arctgx}}$

№19. $y=\left(\dfrac{\sin x+2\cos x}{tg3x}\right)^{e^{\sin x}}$.

№20. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

№21. $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}\right)^{\frac{x^2}{a^2}}$.

Вариант 17.

№1. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}$.

№2. $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos ec2x - ctgx.$

№3. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\arccos t}{t-1}$.

№4 $\lim\limits_{a\to\frac{p}{2}-0} \left(\sqrt{tg^2 a + \sec a} - tga\right)$.

Вычислить производную

№5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{arctg^2 x - 1}}$.

№6. $y = (2e)^{2^{\cos^7 x}}$.

№7. $y = \dfrac{x - \lg x}{x}$.

№8. $y = x^5 \ln 5x.$

№9. $y = (\sin x)^{\arcsin x}$.

№10. $y = \ln\sqrt{1+\sqrt{x+1}}.$

№11. $y^3 = \arccos(x-y)$.

№12. $\begin{cases} x = 2\cos t^2, \\ y = \sin t. \end{cases}$

№13. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

№14. $y = \sin ax.$

№15. $y = \dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}, x_0 = 1.$

№16. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}, x = 1{,}016.$

№17. $y''_{xx} - ?, \begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

№18. $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x), y^{(4)} - ?$

№19. $y = x^{e^x}, y' - ?$

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

№21. $\lim\limits_{x\to p}\left(ctg\dfrac{x}{4}\right)^{\sin(x-p)}$.

Вариант 18.

№1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$.

№2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$.

№3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{p}{2} + arctgx\right)$.

№4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

Вычислить производную

№5. $y = \log^2 x(\sin x)$.

№6. $y = 10^{\log x}$.

№7. $y = \dfrac{x^2+5tgx}{x^3}$.

№8. $y = \arccos\left(\sqrt{2x} - \sqrt{2}\right)$.

№9. $y = (ctgx)^{arcctgx}$.

№10. $y = \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2-1}}.$

№11. $x - y = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

№12. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

№13. $y = \sqrt{x}$. №14. $y = \ln(1+x)$.

№15. $y = \dfrac{-2(x^2+2)}{3(x^4+1)}, x_0 = 1.$

№16. $y = \sqrt[3]{x}, x = 7{,}64.$

№17.

№18. $y = (5x-1)\ln^2 x$; $y^{(3)}$ - ?

№19.

№20. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

№21.

Вариант 19.

№1. ________ .

№2. .

№3. ________ .

№4. ________ .

Найти производную

№5. .

№6. .

№7. ________ .

№8. .

№9. $y = x^2 e^{-\sin^3 x}$.

№10. $a \arcsin \frac{x}{a}$.

№11. .

№12. .

№13. .

№14. $y = (x+1)e^{-x}$.

№15. .

№16. $y = \sqrt{4x-1},\ x = 2,56$.

№17. .

№18.

№19. .

№20. .

№21. .

Вариант 20.

№1. ________ .

№2. .

№3. ________ .

№4. ________ .

Найти производные

№5. . №6. .

№7. $y = x\ln(\mathrm{arctg}^2 x)$. №8. .

№9. $y = (tgx)^{\sin x}$.

№10. .

№11. .

№12. .

№13. $y = \cos^2 x$.

№14. .

№15. .

№16. $y = \frac{1}{\sqrt{x}};\ x = 4,16$.

№17. .

№18.

№19. .

№20. .

№21. .

Вариант 21.

№1. .

№2. .

№3. .

№4. .

Вычислить производную

№5. .

№6. . №7. $y = 4^{3\sin 3x}$.

№8. .

№9. .

№10. .

№11. .

№12.

№13. .

№14. .

№15.

№16. $y = x^7,\ x = 2.002$.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 22.

№1. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$.

№2

№3.

№4.

Вычислить производную

№5. $y = \dfrac{x^2 + \cos 2x}{x}$.

№6.

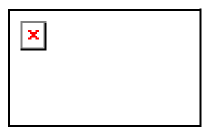
№7.

№8.

№9. $y = 2\sin^5 x\,ctg\,2x$.

№10. 

№11. $(x + y)^2 = \sin y$.

№12. 

№13.

№14.

№15.

№16.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 23.

№1 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.

№2

№3.

№4.

Вычислить производную

№5.

№6.

№7. №8.

№9. $y = (\arccos x)^{\cos x}$.

№10.

№11. $yx \sin + y \sin x = y^3$

№12.

№13.

№14.

№15.

№16.

№17.

№18.

№19. $y = x^{\arcsin x}$, $y' = ?$

№20.

№21. .

Вариант 24.

№1.

№2.

№3.

№4.

Вычислить производную

№5

№6.

№7.

№8. $y = \ln \cos^5 x$.

№9. $y = (tgx)^{arcctgx}$.

№10.

№11. $y^2 \sin(x + y) = 2$.

№12.

№13. $y = ctg^2 x$.

№14.

№15. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x})$, $x_0 = 1$.

№16. $y = x^5$, $x = 2{,}997$.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 25.

№1.

№2.

№3.

№4.

Вычислить производную

№5.

№6. $y=(ctgx)^{\ln x}$.

№7.

№8. $y=3^{\sqrt{x}+\cos^3 x}$.

№9. $y=\log_3 x\cdot tg^3 3x$.

№10.

№11. $y^5-x^4=\sin(xy)$.

№12.

№13.

№14. $y=(ax+b)\cdot e^{-x}$.

№15. $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, $x_0=1$.

№16.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 26.

№1.

№2. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}}$.

№3.

№4.

Вычислить производную

№5.

№6. $y=(3e)^{-\cos^3 x}$.

№7.

№8.

№9.

№10.

№11.

№12.

№13.

№14.

№15.

№16. $y=x^4$, $x=3{,}998$.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 27.

№1.

№2.

№3.

№4

Вычислить производную

№5.

№6.

№7.

№8.

№9.

№10.

№11.

№12.

№13.

№14.

№15. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x},\ x_0=1.$

№16.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 28.

№1.

№2.

№3.

№4

Вычислить производную

№5.

№6.

№7.

№8.

№9.

№10.

№11. $x^4+y^4=x^2y^2.$

№12.

№13.

№14.

№15.

№16. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\ x=0,01.$

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 29.

№1. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}.$

№2.

№3.

№4.

Вычислить производную

№5.

№6.

№7.

№8.

№9. $y = x^{2^x}.$

№10.

№11.

№12.

№13.

№14.

№15.

№16.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.

Вариант 30.

№1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x + x^5}.$

№2.

№3.

№4.

Вычислить производную

№5. $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} \dfrac{x}{2}}.$

№6. $y = x^2 5^{2 \operatorname{ctg}^2 x}.$

№7.

№8. $y = 3x^3 \cdot \log_3 x.$

№9.

№10.

№11.

№12.

№13.

№14.

№15.

№16.

№17.

№18.

№19.

№20.

№21.