Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра “Высшая математика”

Н. Д. ВЫСК

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 3

Москва 2003 г.

Лекция 1.
Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Примеры. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости. Остаток ряда. Ряды с неотрицательными членами, критерий сходимости.

Определение 1.1. Бесконечная сумма чисел

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \text{ (или } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{)}, \qquad (1.1)$$

где каждое число u_n можно вычислить, зная его номер n, называется **числовым рядом**. При этом формула $u_n = f(n)$, позволяющая найти каждый член ряда, называется формулой **общего члена** ряда.

Определение 1.2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется **частичной суммой ряда**:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (1.2)$$

Определение 1.3. Если существует конечный предел частичных сумм ряда:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad (1.3)$$

то говорят, что **ряд сходится**, а число s называется **суммой ряда**. Если конечный $\lim_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд (1.1) называется **расходящимся**.

Замечание. Таким образом, свойства числовых рядов во многом определяются свойствами числовых последовательностей $\{s_n\}$.

Пример 1. Ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ сходится, так как представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}, |q|<1$, сумму которой можно найти по формуле $s=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$. Представим общий член ряда в виде: $u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$. Тогда частичная сумма s_n будет выглядеть так:
$s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}$.
Следовательно, ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 3. Ряд 1+1+1+…+1+… расходится, так как $\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$.

Пример 4. Ряд 1-1+1-1+…+$(-1)^{n+1}$+… тоже расходится, так как последовательность его частичных сумм имеет вид: $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$ и т.д., а такая последовательность предела не имеет.

Простейшие свойства сходящихся рядов.

Теорема 1.1. Исключение или добавление конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.

Доказательство.

Исключим из ряда (1.1) произвольные k членов и выберем значение n, при котором все отброшенные члены содержатся в частичной сумме s_n. Тогда $s_n = c_k + S_{n-k}$, где c_k – сумма отброшенных членов ряда, а S_{n-k} – сумма членов, входящих в s_n, но не входящих в c_k. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_k + \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k} = c_k + \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k}$, так как c_k – постоянная величина, не зависящая от n. Следовательно, конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k}$ существуют или не существуют одновременно, что и доказывает утверждение теоремы.

Теорема 1.2. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ и его сумма равна s, то сходится и ряд $cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots$, сумма которого равна cs.

Доказательство. Обозначим частичную сумму второго ряда c_n. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} cs_n = c\lim\limits_{n\to\infty} s_n = cs$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.3. Если ряды $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (1.4)

и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (1.5)

сходятся и их суммы соответственно равны s_a и s_b, то ряды $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$ (1.6)

и $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots$ (1.7)

тоже сходятся, и их суммы равны $s_a + s_b$ и $s_a - s_b$.

Доказательство. Пусть σ_n – частичная сумма ряда (1.6), а $(s_a)_n$ и $(s_b)_n$ – частичные суммы из того же числа слагаемых рядов (1.4) и (1.5). Тогда $\sigma_n = (s_a)_n + (s_b)_n$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}((s_a)_n + (s_b)_n) = s_a + s_b$. Следовательно, ряд (1.6) сходится, и его сумма равна $s_a + s_b$. Аналогичным образом доказывается сходимость ряда (1.7).

Необходимое условие сходимости ряда.

Главным вопросом при исследовании числового ряда является вопрос о его сходимости или расходимости. Сформулируем необходимое условие сходимости ряда, то есть условие, при невыполнении которого ряд расходится.

Теорема 1.4. Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Представим u_n как разность частичных сумм $s_n - s_{n-1}$. Так как ряд (1.1) сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$

Замечание. Это условие является необходимым, но не достаточным признаком сходимости, то есть из стремления общего члена ряда к нулю не обязательно следует сходимость ряда.

Остаток ряда.

Определение 1.4. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется ***n*-м остатком** данного ряда.

Обозначим сумму остатка ряда (при условии, что он сходится) через $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$. Тогда из теоремы 1.1 следует, что если ряд (1.1) сходится, то сходится и любой его остаток, и наоборот – из сходимости какого-либо остатка ряда следует сходимость ряда в целом. Докажем еще одно свойство остатка сходящегося ряда:

Теорема 1.5. Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s - s_n) = s - s = 0$, что и требовалось доказать.

Ряды с неотрицательными членами.

Пусть для всех членов ряда (1.1) выполнено условие $u_n \geq 0$.

Теорема 1.6 (критерий сходимости). Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.
Доказательство.

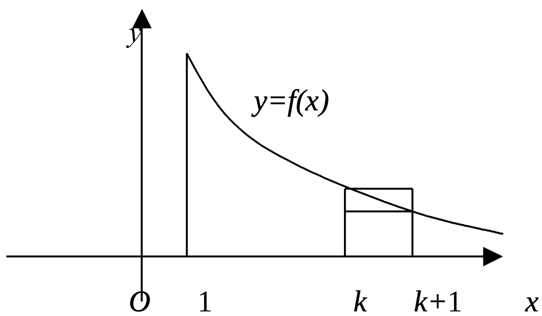
1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, но $s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n$, то есть последовательность частичных сумм является возрастающей. Следовательно, $s_n < s \;\; \forall n$, то есть $\{s_n\}$ ограничена сверху числом s.
2) Пусть $\{s_n\}$ ограничена сверху. Обозначим через s верхнюю грань $\{s_n\}$. Тогда, так как $\{s_n\}$ возрастает, $\forall e \;\; \exists N : |s_n - s| < e \quad \forall n > N$, то есть число s является пределом $\{s_n\}$, следовательно, ряд сходится.

Лекция 2.
Признаки сравнения. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши. Интегральный признак сходимости.

При исследовании числовых рядов на сходимость непосредственный поиск предела частичных сумм является в большинстве случаев весьма затруднительным. Вместо этого удобно использовать специальные признаки сходимости рядов. В частности, в этой лекции будут сформулированы и доказаны некоторые признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Интегральный признак Коши.

Теорема 2.1. Если функция f неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
Доказательство.



Выберем натуральное число k и рассмотрим значения x на отрезке $k \leq x \leq k+1$. Тогда в силу убывания функции f $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Проинтегрировав это неравенство по отрезку единичной длины $[k, k+1]$, получим:

$$f(k)\int_k^{k+1} dx \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)\int_k^{k+1} dx,$$

откуда $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(k)dx \geq f(k+1)$. Складывая подобные неравенства, полученные при значениях k от 1 до n, приходим к неравенству: $\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$

откуда
$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n, \qquad (2.1)$$

где $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится и сумма его равна s, то $s_n \leq s$, следовательно, $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s$, поэтому $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится (см. лемму из лекции №15 2-го семестра).

Если же, наоборот, предположить, что сходится $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, то из (2.1) следует, что

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Значит, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ограничена сверху и возрастает, следовательно, по теореме 1.6 ряд сходится.

Пример. Применим интегральный признак Коши к исследованию сходимости рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, сравнивая их с интегралами $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx$. Рассмотрим следующие возможные значения α:

а) α > 1. Тогда $\int_1^{+\infty}x^{-a}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-a}}{1-a}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{(a-1)b^{a-1}}+\frac{1}{a-1}\right)=\frac{1}{a-1}$ (так как при α > 1 $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{a-1}}=0$). Следовательно, несобственный интеграл сходится, а значит, сходится и рассматриваемый ряд.

б) α = 1. При этом $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\ln x\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$ - интеграл расходится, поэтому расходится и ряд.

в) α < 1. Тогда $\int_1^{+\infty}x^{-a}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{1-a}}{1-a}\Bigg|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{(a-1)b^{a-1}}+\frac{1}{a-1}\right)=\infty$ (так как при α < 1 $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{a-1}}=\infty$). Из расходимости несобственного интеграла следует расходимость исследуемого ряда.

Замечание. Итак, ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ **сходится при α > 1 и расходится при α ≤ 1.** Это свойство ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ будет часто использоваться в дальнейшем.

Признаки сравнения.

Теорема 2.2 (1-й признак сравнения). Если для двух рядов с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (2.2)$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2.3)$$

выполнено условие $u_n \le v_n$, то:

а) если ряд (2.3) сходится, то сходится и ряд (2.2);

б) если ряд (2.2) расходится, то расходится и ряд (2.3).

Доказательство. Пусть частичная сумма ряда (2.2) $s_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$, частичная сумма ряда (2.3) $s_n=\sum_{i=1}^{n}v_i$. Из условия теоремы следует, что $s_n \le \sigma_n$. Пусть Ряд (2.3) сходится. Тогда существует конечный предел его частичных сумм: $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. Но $s_n \le \sigma_n < \sigma$, то есть последовательность частичных сумм ряда (2.2) ограничена сверху. Следовательно, по теореме (1.6) ряд (2.2) сходится.

Теперь предположим, что ряд (2.2) расходится . Тогда $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$, $\sigma_n \ge s_n$, значит,

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, то есть ряд (2.3) тоже расходится. Теорема доказана.

Следствие. Условие $u_n \le v_n$ может выполняться начиная не обязательно с $n = 1$. Утверждение теоремы справедливо, если это условие выполняется для всех n, больших некоторого N (см. теорему 1.1).

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$, сравнив его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Этот ряд сходится, так как последовательность его членов представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$, сумма которой равна $\frac{1}{2}$. При любом $n > 1$ $n\cdot 2^n > 2^n$, следовательно, $\frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, поэтому по теореме 2.2 исследуемый ряд сходится.

Теорема 2.3 (2-й признак сравнения). Если для рядов (2.2) и (2.3) выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A, 0 < A < \infty,$ то ряды (2.2) и (2.3) сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Выберем число N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{v_n} < A+1$. Тогда $u_n < (A + 1)v_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то по теореме 1.2 сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (A+1)v_n$, следовательно, по теореме 2.2 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Наоборот, из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует при этом расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Теперь выберем число $\underline{A}$ такое, что $0 < \underline{A} < A$, и зададим номер N, при котором $\frac{u_n}{v_n} > \underline{A}$ при любом $n > N$. Отсюда $u_n > \underline{A}v_n$, и, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно показать, что из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, а из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Теорема доказана полностью.

Следствие. При применении 2-го признака сравнения удобно брать в качестве ряда, с которым сравнивается данный ряд, ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ (см. пример в начале лекции). Напомним еще раз, что такой ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример. Общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x+3}{x^3 - 3x^2 + x - 7}$ можно представить в виде $\dfrac{2+\frac{3}{x}}{x^2 - 3x + 1 - \frac{7}{x}}$ (разделив числитель и знаменатель на x). Теперь очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{x^2}} = 2$. Поскольку ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (так как α = 2 >1), сходится (по теореме 2.3) и исходный ряд.

Признак Даламбера.

Теорема 2.4. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n > 0$, существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а при $l > 1$ расходится.

Доказательство.

а) Пусть $l < 1$. Выберем число q так, что $l < q < 1$. Тогда можно найти такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < q,$ следовательно, $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство для $n = N + 1$, $n = N + 2$ и т.д., получим:

$$u_{N+1} < qu_N$$

$$u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2u_N$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{N+k} < q^ku_N$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}q^ku_N = u_N\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ сходится (как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим 1), поэтому по теореме 2.2 сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_{N+k}$, а следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (по теореме 1.1).

б) Пусть теперь $l > 1$, тогда для всех n, больших некоторого N, $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1,$ следовательно, $u_n > u_{n-1}$. С учетом знакоположительности ряда из этого следует, что $\lim_{n\to\infty}u_n \neq 0,$ то есть ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости).

Замечание. При $l = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (ряд в этом случае может и сходиться, и расходиться).

Пример. Применим признак Даламбера к исследованию сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n!}{3^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится (учитываем, что $(n + 1)! = n!(n + 1)$).

Радикальный признак Коши.

Теорема 2.5. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n \geq 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l, \tag{2.4}$$

то при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $l > 1$ расходится.

Доказательство.

а) Пусть $l < 1$. Выберем число q такое, что $l < q < 1$. Тогда можно найти такой номер N, что

для всех $n > N$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то по 1-му признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+k}$, тогда по теореме 1.1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

б) Пусть теперь $l > 1$, тогда для всех n, больших некоторого N, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, то есть $u_n > 1$.

Следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечание 1. Так же, как в признаке Даламбера, $l = 1$ не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Замечание 2. Если для одного и того же ряда существуют пределы по Даламберу и по Коши, то они равны друг другу.

Пример. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ - ряд сходится.

Лекция 3.
Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Для числовых рядов, члены которых имеют разные знаки, задаются два вида сходимости.

Определение 3.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из его модулей, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$.

***Теорема 3.1.*.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он сходится и в обычном смысле, то есть существует конечный предел его частичных сумм.
Доказательство.
Пусть $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $s`_n$ – сумма всех положительных членов среди первых n членов данного ряда, $s``_n$ – сумма модулей всех отрицательных членов среди них. Если обозначить $\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$, то

$$s_n = s`_n - s``_n\,, \quad \sigma_n = s`_n + s``_n\,.$$

Так как по условию теоремы σ_n имеет предел σ, а $s`_n$ и $s``_n$ – положительные возрастающие величины, меньшие $\sigma$, то они тоже имеют пределы $s`$ и $s``$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s'_n - s''_n) = s' - s'',$$

то есть знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Замечание. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ является знакоположительным, то для исследования знакопеременного ряда на абсолютную сходимость мы можем использовать все известные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Пример. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Такой ряд сходится (см. пример из лекции 1), поэтому рассматриваемый ряд сходится абсолютно.

Определение 3.2. Если ряд, составленный из модулей членов данного ряда, расходится, а сам данный ряд сходится, то говорят, что он **сходится условно**.

Признак Лейбница.

Если знакопеременный ряд не обладает абсолютной сходимостью, то требуется ответить на вопрос, будет ли он сходиться хотя бы условно. Ответ на него можно дать, применяя признак Лейбница:

Теорема 3.2. Если исследуемый ряд:

1) знакочередующийся, то есть имеет вид $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, где $u_i > 0$; (3.1)
2) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$ (последующий член ряда по модулю меньше предыдущего);
3) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится (хотя бы условно), его сумма положительна и $s \le u_1$.

Доказательство. Рассмотрим первых $2m$ членов ряда:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) > 0,$$

так как $u_{2i-1} - u_{2i} > 0$. Итак, последовательность $\{s_{2m}\}$ положительна и возрастает с возрастанием m. С другой стороны, s_{2m} можно записать в ином виде:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1 .$$

Следовательно, последовательность $\{s_{2m}\}$ ограничена сверху и поэтому имеет предел:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Докажем, что тот же предел имеет и последовательность частичных сумм, составленных их нечетного числа слагаемых:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = s + 0 = s.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ при любом n, то есть ряд (3.1) сходится.

Пример. Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

$|u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ (так как $\ln n < n$), поэтому по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$ расходится, то есть абсолютной сходимостью рассматриваемый ряд не обладает. Проверим для него выполнение условий теоремы 3.2. Знакочередование обеспечивается множителем $(-1)^n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$, а из монотонного возрастания функции $y = \ln x$ следует, что $\ln(n + 1) > \ln n$, а $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится условно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 3.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то любой ряд, составленный из членов данного ряда, взятых, возможно, в другом порядке, тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\hat{u}_m$, составленный из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, можно найти номер N такой, что $|s_N - s| < \frac{e}{2}$. Выберем теперь номер M такой, что частичная сумма $\hat{s}_M = \sum_{m=1}^{M}\hat{u}_m$ содержала все слагаемые, входящие в сумму s_N. Тогда для любого $m > M$ частичную сумму $\hat{s}_m$ можно представить в виде:

$$\hat{s}_m = s_N + \hat{\hat{s}}_m .$$

Тогда в $\hat{\hat{s}}_m$ будут входить только слагаемые с номерами, большими N, поэтому

$$|\hat{\hat{s}}_m| \le \sum_{n=N+1}^{\infty}|u_n| < \frac{e}{2}.$$

Тогда при $m > M$ получаем:

$|s-\hat{s}_m| = |s-(s_N+\hat{\hat{s}}_m)| \le |s-s_N| + |\hat{\hat{s}}_m| < \frac{e}{2}+\frac{e}{2} = e$. Следовательно, $\lim_{m\to\infty}\hat{s}_m = s$, то есть ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\hat{u}_m$ сходится, и сумма его равна s.

Проводя подобные рассуждения для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, можно доказать и абсолютную сходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty}\hat{u}_m$.

Теорема 3.4 (без доказательства). Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, тоже абсолютно сходится, и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.

Замечание. Указанные свойства справедливы только для абсолютно сходящихся рядов. Если ряд сходится условно, то перестановкой его членов можно изменять сумму ряда (теорема Римана) или получить расходящийся ряд. В частности, расходящимися в этом случае будут ряды, составленные из всех положительных и из всех отрицательных членов данного условно сходящегося ряда.

Лекция 4.
Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и дифференцирование.

Определение 4.1. Бесконечная сумма функций

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots , \qquad (4.1)$$

где $u_n(x) = f(x,n)$, называется **функциональным рядом**.

Если задать конкретное числовое значение x, ряд (4.1) превратится в числовой ряд, причем в зависимости от выбора значения x такой ряд может сходиться или расходиться. Практическую ценность представляют только сходящиеся ряды, поэтому важно определить те значения x, при которых функциональный ряд становится сходящимся числовым рядом.

Определение 4.2. Множество значений x, при подстановке которых в функциональный ряд (4.1) получается сходящийся числовой ряд, называется **областью сходимости** функционального ряда.

Определение 4.3. Функция $s(x)$, определенная в области сходимости ряда, которая для каждого значения x из области сходимости равна сумме соответствующего числового ряда, полученного из (4.1) при данном значении x, называется **суммой функционального ряда**.

Пример. Найдем область сходимости и сумму функционального ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

При $|x| \geq 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n \neq 0,$ поэтому соответствующие числовые ряды расходятся. Если же $|x| < 1$, рассматриваемый ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, вычисляемую по формуле:

$$s(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Следовательно, областью сходимости ряда является интервал (-1, 1), а его сумма имеет указанный вид.

Замечание. Так же, как для числовых рядов, можно ввести понятия частичной суммы функционального ряда:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

и остатка ряда: $r_n = s - s_n$.

Равномерная сходимость функционального ряда.

Определим вначале понятие равномерной сходимости числовой последовательности.

Определение 4.4. Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется **равномерно сходящейся к функции f на множестве X**, если $\forall e > 0 \quad \exists N : \forall x \in X$ и $\forall n > N$ $| f_n(x) - f(x) | < e$.

Замечание 1. Будем обозначать обычную сходимость функциональной последовательности $f_n(x) \to f(x),$ а равномерную сходимость - $f_n(x) \xrightarrow{\to} f(x)$.

Замечание 2. Отметим еще раз принципиальное отличие равномерной сходимости от обычной: в случае обычной сходимости при выбранном значении ε для каждого $x \in X$ существует **свой** номер N, для которого при $n > N$ выполняется неравенство: $| f_n(x) - f(x) | < e$. При этом может оказаться, что подобрать для данного ε общий номер N, обеспечивающий выполнение этого неравенства для любого x, невозможно. В случае же равномерной сходимости такой номер N, **общий для всех** $\boldsymbol{x}$, существует.

Определим теперь понятие равномерной сходимости функционального ряда. Поскольку каждому ряду соответствует последовательность его частичных сумм, равномерная сходимость ряда определяется через равномерную сходимость этой последовательности:

Определение 4.5. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in X$, называется **равномерно сходящимся** на множестве X, если на X равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Признак Вейерштрасса.

Теорема 4.1. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0,$ сходится и для всех $x \in X$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $| u_n(x) | \leq a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X.

Доказательство.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\forall n > N \ \ \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < e$, поэтому $\forall x \in X$ и $\forall n > N$ для остатков r_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ справедлива оценка

$| r_n(x) | = | \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} | u_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < e$. Следовательно, $r_n \xrightarrow{1} 0$, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится.

Замечание. Процедура подбора числового ряда, отвечающего условиям теоремы 4.1, обычно называется **мажорированием**, а сам этот ряд – **мажорантой** для данного функционального ряда.

Пример. Для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ мажорантой при любом значении x является сходящийся знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Поэтому исходный ряд равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 4.2. Если функции $u_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in X$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на X, то его сумма $s(x)$ тоже непрерывна в точке x_0.
Доказательство.
Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда $s_n(x) \xrightarrow{1} s(x)$, поэтому существует такой номер n_0, что $|s(x) - s_{n_0}(x)| < \frac{e}{3}$. $s_{n_0}(x)$ - сумма конечного числа непрерывных функций, поэтому $s_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что

$|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)| < \frac{e}{3} \quad \forall x \in X : |x - x_0| < d$. Тогда $\forall x \in X : |x - x_0| < d$ получаем:

$$|s(x) - s(x_0)| = |(s(x) - s_{n_0}(x)) + (s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)) + (s_{n_0}(x_0) - s(x_0))| \le |s(x) - s_{n_0}(x)| +$$

$+|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)| + |s_{n_0}(x_0) - s(x_0)| < \frac{e}{3} + \frac{e}{3} + \frac{e}{3} = e$, то есть функция $s(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Теорема 4.3. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на этом отрезке. Тогда $\forall x_0 \in [a, b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ тоже равномерно сходится на $[a, b]$ и

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt \qquad (4.2)$$

(то есть в условиях теоремы ряд можно почленно интегрировать).
Доказательство.
По теореме 4.2 функция $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на нем, то есть интеграл, стоящий в левой части равенства (4.2), существует. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ равномерно сходится к функции

$\sigma(x) = \int_{x_0}^{x} s(t)dt.$ Обозначим $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x),$

$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t) \right) dt = \int_{x_0}^{x} s_n(t)dt.$ Тогда для любого ε найдется такой номер N, что при $n > N$

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} s(t)dt - \int_{x_0}^{x} s_n(t)dt \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |s(t) - s_n(t)|\, dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} |r_n(t)|\, dt \right| \le (b-a) \sup_{[a,b]} |r_n(t)| < e$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ равномерно сходится, и его сумма равна $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$.
Теорема доказана.

Теорема 4.4. Пусть функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд, составленный из их производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \qquad (4.3)$$

равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то он сходится равномерно на всем $[a, b]$, его сумма $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

(ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать).

Доказательство.

Определим функцию σ(x) как $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$. По теореме 4.3 ряд (4.3) можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^{x} s\,(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(x_0)\right).$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, равномерно сходится на $[a, b]$ по теореме 4.3. Но числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ по условию теоремы сходится, следовательно, равномерно сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Тогда $\int_{x_0}^{x} s\,(t)dt = s(x) - s(x_0)$. Функция σ($t$) является суммой равномерно сходящегося ряда непрерывных функций на $[a, b]$ и поэтому сама непрерывна. Тогда функция $\int_{x_0}^{x} s\,(t)dt$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, и $s'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0} s\,(t)dt = s\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, что и требовалось доказать.

Лекция 5.
Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Основные свойства степенных рядов: равномерная сходимость, непрерывность и бесконечная дифференцируемость суммы. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Определение 5.1. **Степенным рядом** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n = const. \tag{5.1}$$

Замечание. С помощью замены $x - x_0 = t$ ряд (5.1) можно привести к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, поэтому все свойства степенных рядов достаточно доказать для рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1 (1-я теорема Абеля). Если степенной ряд (5.2) сходится при $x = x_0$, то при любом x: $|x| < |x_0|$ ряд (5.2) сходится абсолютно. Если же ряд (5.2) расходится при $x = x_0$, то он расходится при любом x: $|x| > |x_0|$.
Доказательство.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, поэтому существует константа $c > 0$:

$| a_n x_0^n | \le c \quad \forall n$. Следовательно, $| a_n x^n | = | a_n x_0^n | \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le c \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ при $|x|<|x_0|$ сходится, так как является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $|x|<|x_0|$ абсолютно сходится.

Если известно, что ряд (5.2) расходится при $x = x_0$, то он не может сходиться при $|x| > |x_0|$, так как из ранее доказанного при этом следовало бы, что он сходится и в точке x_0.
Таким образом, если найти наибольшее из чисел $x_0 > 0$ таких, что (5.2) сходится при $x = x_0$, то областью сходимости данного ряда, как следует из теоремы Абеля, будет интервал $(- x_0 , x_0)$, возможно, включающий одну или обе границы.

Определение 5.2. Число $R \ge 0$ называется **радиусом сходимости** степенного ряда (5.2), если $\forall x : | x | < R$ этот ряд сходится, а $\forall x : | x | > R$ расходится. Интервал $(-R , R)$ называется **интервалом сходимости** ряда (5.2).

Примеры.

1) Для исследования абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ применим признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty} \frac{| (n+1)! x^{n+1} |}{| n! x^n |} = | x | \lim_{n\to\infty} (n+1) = \begin{cases} \infty, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Следовательно, ряд сходится только при $x = 0$, и радиус его сходимости равен 0: $R = 0$.
2) Используя тот же признак Даламбера, можно показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится при любом x, то есть $R = \infty$.
3) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ по признаку Даламбера получим:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|\cdot n}{(n+1)|x^n|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|$. Следовательно, при $-1 < x < 1$ ряд сходится, при $x < -1$ и $x > 1$ расходится. При $x = 1$ получаем гармонический ряд, который, как известно, расходится, а при $x = -1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно по признаку Лейбница. Таким образом, радиус сходимости рассматриваемого ряда $R = 1$, а интервал сходимости – [-1, 1).

Формулы для определения радиуса сходимости степенного ряда.

1. Формула Даламбера.

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ и применим к нему признак Даламбера: для сходимости ряда необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, то область сходимости определяется неравенством $|x|<\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то есть

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ -} \tag{5.3}$$

- **формула Даламбера** для вычисления радиуса сходимости.

2. Формула Коши-Адамара.

Используя радикальный признак Коши и рассуждая аналогичным образом, получим, что можно задать область сходимости степенного ряда как множество решений неравенства $|x|<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ при условии существования этого предела, и, соответственно, найти еще одну формулу для радиуса сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \tag{5.4}$$

- **формула Коши-Адамара**.

Свойства степенных рядов.

Теорема 5.2 (2-я теорема Абеля). Если R – радиус сходимости ряда (5.2) и этот ряд сходится при $x = R$, то он равномерно сходится на интервале $(-R, R)$.
Доказательство.

$\forall r: 0 < r < R$ знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\, r^n$ сходится по теореме 5.1. Следовательно, ряд (5.2) равномерно сходится в интервале [-ρ, ρ] по теореме 4.1. Из выбора ρ следует, что интервал равномерной сходимости – $(-R, R)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма ряда (5.2) есть непрерывная функция.
Доказательство.
Члены ряда (5.2) являются непрерывными функциями, и ряд равномерно сходится на рассматриваемом отрезке. Тогда непрерывность его суммы следует из теоремы 4.2.

Следствие 2. Если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда:

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx. \tag{5.5}$$

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 4.3.

Теорема 5.3. Если ряд (5.2) имеет интервал сходимости (-*R, R*), то ряд

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \tag{5.6}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (5.2), имеет тот же интервал сходимости (-*R, R*). При этом

$$\varphi'(x) = s'(x) \text{ при } |x| < R, \tag{5.7}$$

то есть внутри интервала сходимости производная от суммы степенного ряда равна сумме ряда, полученного его почленным дифференцированием.
Доказательство.

Выберем ρ: 0 < ρ < *R* и ζ: ρ < ζ < *R*. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, следовательно,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n = 0,$ то есть $\exists M : |a_n x^n| < M \quad \forall n \geq 0.$ Если $|x| \leq \rho$, то

$|na_n x^{n-1}| \leq |na_n r^{n-1}| = n\,|a_n x^{n-1}|\,\left|\frac{r}{x}\right|^{n-1} < n\frac{M}{x}q^{n-1},$ где $q = \frac{r}{x} < 1.$ Таким образом, члены

ряда (5.6) по модулю меньше членов знакоположительного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{x} q^n$, который

сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1,$$

то есть является мажорантой для ряда (5.6) при $x \in [-r, r]$. Поэтому ряд (5.6) равномерно сходится на [-ρ, ρ]. Следовательно, по теореме 4.4 верно равенство (5.7). Из выбора ρ следует, что ряд (5.6) сходится в любой внутренней точке интервала (-*R, R*). Докажем, что вне этого интервала ряд (5.6) расходится. Действительно, если бы он сходился при $x_1 > R$, то, интегрируя его почленно на интервале $(0, x_2)$, $R < x_2 < x_1$, мы получили бы, что ряд (5.2) сходится в точке x_2 , что противоречит условию теоремы. Итак, теорема полностью доказана.

Замечание. Ряд (5.6) можно, в свою очередь, почленно дифференцировать и проделывать эту операцию сколько угодно раз.
Вывод: если степенной ряд сходится на интервале (-*R, R*), то его сумма представляет собой функцию, имеющую внутри интервала сходимости производные любого порядка, каждая из которых есть сумма ряда, полученного из исходного с помощью почленного дифференцирования соответствующее количество раз; при этом интервал сходимости для ряда из производных любого порядка есть (-*R, R*).

Лекция 6.
Разложение функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Применение степенных рядов.

В предыдущих лекциях рассматривались степенные ряды, для которых в пределах области равномерной сходимости сумма ряда *s(x)* представляет собой непрерывную и бесконечно дифференцируемую функцию от *x*. Теперь поставим обратную задачу: найти степенной ряд, суммой которого является данная функция.

Определение 6.1. Представление функции в виде

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad a_n=const \qquad (6.1)$$

называется ее **разложением в степенной ряд**.

Теорема 6.1. Если функция *f(x)* раскладывается в окрестности точки x_0 в степенной ряд (6.1) с радиусом сходимости ***R***, то:

1) функция *f* имеет на интервале ($x_0 - R$, $x_0 + R$) производные всех порядков, которые можно найти почленным дифференцированием ряда (6.1):

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)...(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m},\quad m=1,2,... \qquad (6.2)$$

2) $$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)\quad \int_{x_0}^{x}f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad (6.3)$$

3) ряды (6.1), (6.2) и (6.3) имеют одинаковые радиусы сходимости.

Доказательство всех трех утверждений следует из общих свойств степенных рядов (теоремы 5.2 и 5.3).

Теорема 6.2. Если функция *f* раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд (6.1), то $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n=0,1,2...$, и, следовательно, справедлива формула

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (6.4)$$

Доказательство.
Дифференцируя *m* раз равенство (6.1), получим:

$$f^{(m)}(x)=m(m-1)...2\cdot1\cdot a_m+(m+1)m...2a_{m+1}(x-x_0)+(m+2)(m+1)...3a_{m+2}(x-x_0)^2+...$$

Примем $x = x_0$, тогда $f^{(m)}(x_0) = m!a_m$, что доказывает формулу (6.4).

Следствие. Если в некоторой окрестности заданной точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.
Действительно, из теоремы 6.2 следует, что коэффициенты степенного ряда могут иметь только вид, задаваемый формулой (6.4).

Определение 6.2. Пусть функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется **рядом Тейлора**.

Пример. Найдем разложение в ряд Тейлора при $x_0 = 0$ функции $f(x) = 2^x$.

$a_0 = 2^0 = 1,\ \ a_1 = \dfrac{2^0}{\ln 2 \cdot 2!} = \dfrac{1}{2! \ln 2}, ..., a_n = \dfrac{2^0}{\ln^n 2 \cdot n!} = \dfrac{1}{n! \ln^n 2}$. Следовательно,

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \ln^n 2} x^n .$$

Определение 6.3. Если при разложении в ряд Тейлора принимается $x_0 = 0$, то

полученный ряд $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (6.5)$$

называется **рядом Маклорена** (см. предыдущий пример).

Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций.

В лекции 21 (1-й семестр) рассматривалось представление функции в виде многочлена Тейлора с остаточным членом. Поскольку коэффициенты ряда Тейлора и многочлена Тейлора вычисляются по одной и той же формуле, мы можем воспользоваться проведенными в лекции 21 вычислениями для получения разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций. При этом обратим особое внимание на определение области сходимости полученных рядов.

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Сходимость полученного ряда исследовалась в примере 2 лекции 5, где показано, что он абсолютно сходится при любом x.

2. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

3. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

Используя формулу Даламбера для определения радиуса сходимости, найдем, что он равен бесконечности, то есть функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ раскладываются в ряд Тейлора на всем множестве действительных чисел.

4. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$. Запишем остаточный член этой формулы в форме Лагранжа:

$r_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+qx)^{n+1}},\ \ 0 < q < 1$, и исследуем его поведение при $n \to \infty$ для $|x| < 1$, $|x| > 1$ и $|x| = 1$. При $|x| < 1$ $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, при $|x| > 1$ $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \infty$. Поэтому по теореме 1.5 при $|x| < 1$ ряд сходится, а при $|x| > 1$ расходится. При $x = -1$ ряд расходится, так как представляет собой гармонический ряд, все члены которого имеют знак «-», а при $x = 1$ получаем знакопеременный ряд, сходящийся условно по признаку Лейбница. Следовательно, областью сходимости полученного ряда является интервал (-1, 1].

5. $(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!} x^n$. Найдем радиус его сходимости по формуле Даламбера: $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{|a-n|} = 1$. Следовательно, интервал сходимости – (-1, 1).

Формула Эйлера.

Используя разложения в ряд Тейлора функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$, получим:

$$e^{iy}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\ldots+\frac{(iy)^n}{n!}+\ldots=1+\frac{iy}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{5!}-\ldots=$$

$=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\ldots\right)=\cos y+i\sin y$. Таким образом, доказана используемая в теории комплексных чисел **формула Эйлера**:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \qquad (6.6)$$

(см. лекцию 7, 2-й семестр).

Применение степенных рядов.

Возможность разложения функции в степенной ряд позволяет существенно упростить многие математические операции: вычисление приближенных значений данной функции, дифференцирование, интегрирование, поскольку степенной ряд можно заменить многочленом (с учетом того, что оценка остатка ряда не превысит заданного значения погрешности). В частности, можно приближенно вычислять «неберущиеся» интегралы, находить приближенные решения дифференциальных уравнений и т.д.
Рассмотрим вычисление интегралов с помощью рядов.
Примеры.

1. Для вычисления интеграла $\int_0^a e^{-x^2}dx$ разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора, используя разложение функции e^x: $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}+\ldots$

Тогда $\int_0^a e^{-x^2}dx=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot3}+\frac{x^5}{2!\cdot5}+\frac{x^7}{3!\cdot7}+\ldots\right)\Big|_0^a=a-\frac{a^3}{1!\cdot3}+\frac{a^5}{2!\cdot5}-\frac{a^7}{3!\cdot7}+\ldots$

С помощью этого равенства можно вычислить рассматриваемый интеграл при любом a с любой заданной точностью.

2. Вычислим интеграл $\int_0^a\frac{\sin x}{x}dx$, для чего разложим функцию $\frac{\sin x}{x}$ в ряд:

$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$ - ряд, сходящийся при любом x. Интегрируя почленно, получим: $\int_0^a\frac{\sin x}{x}dx=a-\frac{a^3}{3!\cdot3}+\frac{a^5}{5!\cdot5}-\frac{a^7}{7!\cdot7}+\ldots$

Приближенное решение дифференциального уравнения второго порядка $y''=F(x,y,y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$.
Если предположить, что решение имеет вид:

$y=f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots$, то требуется найти значения производных $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0),\ldots$ от частного решения при $x=x_0$. Из начальных условий следует, что $f(x_0)=y_0, f'(x_0)=y'_0$. Тогда из исходного уравнения получаем, что $f''(x_0)=F(x_0,y_0,y'_0)$. Дифференцируя обе части исходного уравнения по x, найдем: $y'''=F'_x+F'_y\cdot y'+F'_{y'}\cdot y''$, откуда можно определить $f'''(x_0)=y'''\Big|_{x=x_0}$ и т.д.

Пример. Найти решение уравнения $y''=-yx^2$ при $y(0)=1, y'(0)=0$.

Решение:

$f''(0)=0;\ y'''=-y'x^2-2xy \Rightarrow f'''(0)=0;\ y^{(4)}=-y''x^2-4xy'-2y \Rightarrow f^{(4)}(0)=-2$ и т.д.

Можно получить общую формулу для производных любого порядка:

$y^{(k+2)}=-y^{(k)}x^2-2kxy^{(k-1)}-k(k-1)y^{(k-2)}$. При $x=0$ эта формула дает

$$y_0^{(k+2)}=-k(k-1)y_0^{(k-2)}.$$

Так как $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,$ то в нуль обращаются все производные, порядок которых не кратен четырем. В конечном счете решение имеет вид:

$$y=1-\frac{x^4}{4!}\cdot 1\cdot 2+\frac{x^8}{8!}\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 6-\ldots+(-1)^k\frac{x^{4k}}{(4k)!}\cdot(1\cdot 2)(5\cdot 6)\ldots(4k-3)(4k-2)+\ldots$$

Лекция 7.
Двойной и тройной интегралы, их свойства. Геометрический смысл двойного интеграла.

Рассмотрим в плоскости Oxy замкнутую область D, ограниченную линией L. Разобьем эту область какими-нибудь линиями на n частей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ (причем теми же символами $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ будем обозначать и площади соответствующих частей) и выберем в каждой части точку P_i (рис.1).

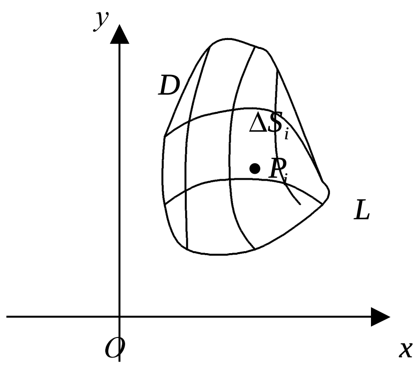


Рис.1.

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$,…, $f(P_n)$ значения этой функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ . \qquad (7.1)$$

Определение 7.1. Сумма вида $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ называется **интегральной суммой** для функции $f(x, y)$ в области D.

Замечание. С геометрической точки зрения (при $f(x, y) \geq 0$) интегральная сумма (7.1) представляет собой сумму объемов цилиндров с основаниями ΔS_i и высотами $f(P_i)$.

Определение 7.2. Если существует один и тот же предел интегральных сумм (7.1) при $n \to \infty$ и $\max \Delta S_i \to 0$, не зависящий от способа разбиения области D и выбора точек P_i, то он называется **двойным интегралом от функции *f(x, y)* по области *D*** и обозначается

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ . \qquad (7.2)$$

Область D при этом называется **областью интегрирования**.

Замечание 1. Для выяснения вопроса об условиях интегрируемости функции двух переменных можно по аналогии со случаем определенного интеграла ввести понятие верхней и нижней интегральных сумм, выбирая в каждой части области D точки, значение функции в которых является наибольшим и наименьшим для данной части. Тогда можно доказать, что необходимым и достаточным условием интегрируемости функции $f(x, y)$ является, во-первых, ее ограниченность на D, а во-вторых, условие

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} (S_t - s_t) = 0, \qquad (7.3)$$

где τ – некоторое разбиение, а S_τ и s_τ – соответственно верхняя и нижняя интегральные суммы. Доказательство этого утверждения проводится так же, как для случая определенного интеграла.

Замечание 2. Аналогично одномерному случаю можно доказать еще одно утверждение: если функция $f(x, y)$ непрерывна на D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойных интегралов.

Часть свойств двойных интегралов непосредственно вытекает из определения этого понятия и свойств интегральных сумм, а именно:

1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в D, то $kf(x, y)$ тоже интегрируема в этой области, причем
$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (7.4)$$

2. Если в области D интегрируемы функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, то в этой области интегрируемы и функции $f(x, y) \pm g(x, y)$, и при этом
$$\iint_D \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (7.5)$$

3. Если для интегрируемых в области D функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \le g(x, y)$, то
$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (7.6)$$

Докажем еще несколько свойств двойного интеграла:

4. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек и функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (7.7)$$

Доказательство.

Интегральную сумму по области D можно представить в виде:
$$\sum_D f(P_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(P_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(P_i)\Delta S_i,$$
где разбиение области D проведено так, что граница между D_1 и D_2 состоит из границ частей разбиения. Переходя затем к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим равенство (7.7).

5. В случае интегрируемости на D функции $f(x, y)$ в этой области интегрируема и функция $|f(x, y)|$, и имеет место неравенство
$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy. \qquad (7.8)$$

Доказательство.
$$\left|\sum_D f(P_i)\Delta S_i\right| \le \sum_D |f(P_i)|\,\Delta S_i,$$ откуда с помощью предельного перехода при $\max \Delta S_i \to 0$ получаем неравенство (7.8)

6. $\iint_D dxdy = S_D$, где S_D – площадь области D. Доказательство этого утверждения получим, подставляя в интегральную сумму $f(x, y) \equiv 0$.

7. Если интегрируемая в области D функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству
$$m \le f(x, y) \le M,$$
то
$$mS_D \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS_D. \qquad (7.9)$$

Доказательство проводится предельным переходом из очевидного неравенства

$$mS_D \le \sum_D f(P_i)\Delta S_i \le MS_D.$$

Следствие.

Если разделить все части неравенства (7.9) на D, можно получить так называемую теорему о среднем:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = mS_D, \quad m \le m \le M.$$

В частности, при условии непрерывности функции f в D найдется такая точка этой области (x_0 , y_0), в которой $f(x_0 , y_0) = \mu$, то есть

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S_D \ -$$

- еще одна формулировка теоремы о среднем.

Тройной интеграл.

Понятие тройного (а в дальнейшем – m-мерного) интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию $f(x, y, z)$. Затем разобьем область V на произвольные части Δv_i , считая объем каждой части равным Δv_i , и составим интегральную сумму вида $\sum_V f(P_i)\Delta v_i$, (7.10)

где точка P_i принадлежит Δv_i . Пусть ρ – наибольшее расстояние между двумя точками любой части области V.

Определение 7.3. Предел при $r \to 0$ интегральных сумм (7.10), не зависящий от способа разбиения области V, называется **тройным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *V*:**

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{r\to 0}\sum_V f(P_i)\Delta v_i \qquad (7.11)$$

Замечание 1. Условие непрерывности подынтегральной функции не является обязательным для существования кратного (двойного, тройного и т.д.) интеграла, но исследование вопросов, связанных с интегрированием разрывных функций, выходит за рамки нашего курса.

Замечание 2. Все сформулированные ранее свойства двойного интеграла можно распространить на тройной интеграл.

Замечание 3. Подобным образом можно дать определение интеграла любой кратности, рассматривая функцию n переменных, заданную в замкнутой области n-мерного пространства.

Геометрический смысл двойного интеграла.

Рассмотрим тело V, ограниченное частью поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$, проекцией D этой поверхности на плоскость Оxy и боковой цилиндрической поверхностью, полученной из вертикальных образующих, соединяющих точки границы поверхности с их проекциями.

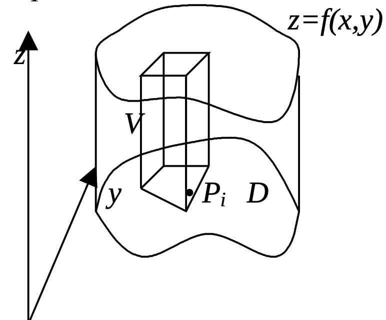


Рис.2.

Будем искать объем этого тела как предел суммы объемов цилиндров, основаниями которых являются части ΔS_i области D, а высотами – отрезки длиной $f(P_i)$, где точки P_i принадлежат ΔS_i. Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим, что

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy, \qquad (7.12)$$

то есть двойной интеграл представляет собой объем так называемого цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу – областью D.

Лекция 8.
Вычисление двойного интеграла путем сведения его к повторному. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

Рассмотрим область D, ограниченную линиями $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x))$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Тогда любая прямая, параллельная координатной оси Оy и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границу области в двух точках: N_1 и N_2 (рис.1). Назовем такую область **правильной** в направлении оси Оy. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси Оx. Область, правильную в направлении обеих координатных осей, будем называть просто правильной. Например, правильная область изображена на рис.1.

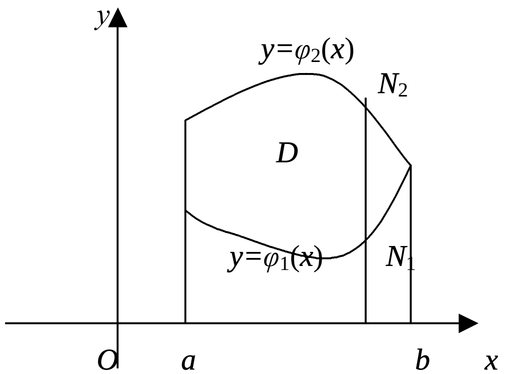


Рис.1

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D. Рассмотрим выражение

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx, \qquad (8.1)$$

называемое **двукратным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области D. Вычислим вначале внутренний интеграл (стоящий в скобках) по переменной y, считая x постоянным. В результате получится непрерывная функция от x:

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy.$$

Полученную функцию проинтегрируем по x в пределах от a до b. В результате получим число $I_D=\int_a^b\Phi(x)dx.$

Докажем важное свойство двукратного интеграла.

Теорема 8.1. Если область D, правильная в направлении Оy, разбита на две области D_1 и D_2 прямой, параллельной оси Оy или оси Оx, то двукратный интеграл по области D будет равен сумме таких же интегралов по областям D_1 и D_2:

$$I_D=I_{D_1}+I_{D_2}. \qquad (8.2)$$

Доказательство.

а) Пусть прямая $x = c$ разбивает D на D_1 и D_2 , правильные в направлении Оy. Тогда

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int_a^b\Phi(x)dx=\int_a^c\Phi(x)dx+\int_c^b\Phi(x)dx=\int_a^c\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx+$$

$$+\int_c^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx=I_{D_1}+I_{D_2}.$$

б) Пусть прямая $y = h$ разбивает D на правильные в направлении Оy области D_1 и D_2 (рис.2). Обозначим через M_1 (a_1, h) и M_2 (b_1, h) точки пересечения прямой $y = h$ с границей L области D.

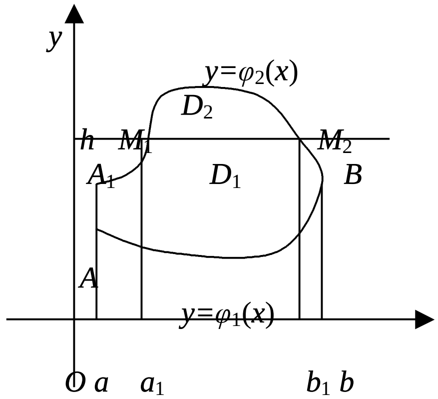


Рис.2.

Область D_1 ограничена непрерывными линиями
1) $y = \varphi_1(x)$;
2) кривой $A_1M_1M_2B$, уравнение которой запишем $y = \varphi_1^*(x)$, где $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ при $a \le x \le a_1$ и $b_1 \le x \le b$, $\varphi_1^*(x) = h$ при $a_1 \le x \le b_1$;
3) прямыми $x = a$, $x = b$.

Область D_2 ограничена линиями $y = \varphi_1^*(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a_1 \le x \le b_1$.

Применим к внутреннему интегралу теорему о разбиении промежутка интегрирования:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy \right) dx +$$

$$+ \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Представим второй из полученных интегралов в виде суммы:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_{b_1}^{b} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Поскольку $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ при $a \le x \le a_1$ и $b_1 \le x \le b$, первый и третий из полученных интегралов тождественно равны нулю. Следовательно,

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx, \text{ то есть } \quad I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Следствие. Таким же образом можно разбить область D на любое число правильных областей. При этом двукратный интеграл по области D будет равен сумме интегралов по частичным областям.

Замечание 1. Используя теорему 8.1 и теоремы о среднем для определенного интеграла, можно доказать, что для двукратного интеграла справедливы соотношения:

$$mS \le \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \le MS, \qquad (8.3)$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x, y)$ в области D, а S – площадь этой области, и

$$I_D = f(P)S, \qquad (8.4)$$

где P – точка, принадлежащая области D .

Замечание 2. Более употребительной формой записи двукратного интеграла является

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (8.5)$$

Теорема 8.2. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по данной области, то есть

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \qquad (8.6)$$

Доказательство.

Разобьем область D прямыми, параллельными координатным осям, на n правильных (в основном прямоугольных) областей ΔS_1, ΔS_2,…, ΔS_n. Тогда по теореме 8.1

$$I_D = I_{\Delta S_1} + I_{\Delta S_2} + \ldots + I_{\Delta S_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta S_i}\ .$$

Из (8.4) получим: $I_{\Delta S_i} = f(P_i)\Delta S_i$, $I_D = \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$, где справа стоит интегральная сумма, предел которой равен двойному интегралу от f по области D, а слева – постоянное число I_D. Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим равенство (8.6).

Пример.

Вычислим двойной интеграл от функции $z = x + y$ по области, представляющей собой треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1) и (1,0) (рис.3).

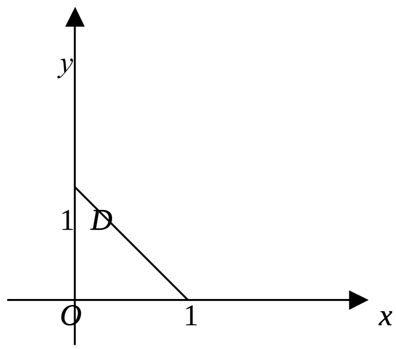


Рис.3.

Здесь $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1 - x$.

Тогда $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy =$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(\left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Bigg|_0^{1-x} \right) = \int\limits_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Правильной областью в полярных координатах (определение полярных координат см. в лекции 14 за 2-й семестр) назовем такую область, границу которой каждый луч, выходящий из полюса, пересекает не более чем в двух точках (рис.4).

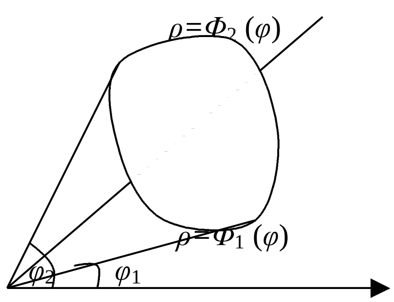


Рис.4.

Зададим в области D, ограниченной кривыми $\rho=\Phi_1(\varphi)$ и $\rho=\Phi_2(\varphi)$, где $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, непрерывную функцию $z = f(\varphi, \rho)$. Разобьем область D на части ΔS_{ik}, ограниченные лучами $\rho = \rho_{i-1}$ и $\rho = \rho_i$, выходящими из полюса, и дугами окруж-ностей $\varphi = \varphi_{k-1}$ и $\varphi = \varphi_k$ с центром в полюсе, и составим интегральную сумму $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sum\limits_i f(P_{ik})\Delta S_{ik})$, где

P_{ik} – точка, принадлежащая ΔS_{ik} . Найдем площадь части ΔS_{ik} , не пересекаемой границей области, как разность площадей двух секторов:

$$\Delta S_{ik} = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta j_k - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta j_k = \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2} \right) \Delta r_i \Delta j_k = r_i^* \Delta r_i \Delta j_k \text{, где}$$

$r_i < r_i^* < r_i + \Delta r_i$. Учитывая, что площади частей, пересекаемых границей области, стремятся к нулю при $\Delta j_k \to 0$ и $\Delta r_i \to 0$, получим:

$$\iint_D f(r,j)drdj = \lim_{\substack{\Delta r_i \to 0 \\ \Delta j_k \to 0}} V_n = \lim_{\substack{\Delta r_i \to 0 \\ \Delta j_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_i f(r_i^*, j_k^*) r_i^* \Delta r_i \right) \Delta j_k = \int_{j_1}^{j_2} \left(\int_{\Phi_1(j)}^{\Phi_2(j)} f(r,j) r dr \right) dj \quad (8.7)$$

Пример.

Выведем с использованием двойного интеграла формулу для площади круга радиуса R с центром в начале координат:

$$\iint_D drdj = \int_0^{2p} dj \int_0^R r dr = \int_0^{2p} dj \left(\left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R \right) = \frac{R^2}{2} \int_0^{2p} dj = \frac{R^2}{2} 2p = pR^2.$$