

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МАТИ» - Российский государственный технологический
университет им. К.Э.Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

**Практические указания
по векторной алгебре
(варианты курсовых работ)**

Составители: Заварзина И. Ф.
Ионова А. С.
Кулакова Р. Д.

Москва 2005

Настоящее методическое указание по курсу по векторной алгебре содержит 30 вариантов расчетного задания.

Каждый вариант содержит задания по темам, изучаемым в первом семестре.

Задание выполняется в сроки, установленные учебным планом и практической частью курса.

В целях обеспечения самостоятельной работы студентов над заданием, указание содержит решение отдельных задач.

Пример 1.

Разложить вектор $\vec{a} = (4, 2, 0)$ по векторам $\vec{p} = (1, -1, 2)$, $\vec{q} = (2, 2, -1)$ и $\vec{r} = (3, 7, -7)$

Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ это значит представить его в виде линейной комбинации

$\vec{a} = c_1 \vec{p} + c_2 \vec{q} + c_3 \vec{r}$, где c_1, c_2 и c_3 - искомые числа.

В координатной форме

$$4\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (c_1 + 2c_2 + 3c_3)\vec{i} + (-c_1 + 2c_2 + 7c_3)\vec{j} + (2c_1 - c_2 - 7c_3)\vec{k}$$

В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 2 \\ 2c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \end{cases}$$

решая которую, получим:

$$c_1 = 3; c_2 = -1; c_3 = 1$$

Отсюда $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$.

Пример 2.

Найти длину вектора $\vec{p} + 2\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$; $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 3$; $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{2}{3}\pi$.

В соответствии с определением модуля вектора $|\vec{p} + 2\vec{q}| = \sqrt{(\vec{p} + 2\vec{q})^2}$.

Скалярный квадрат $(\vec{p} + 2\vec{q})^2 = (\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{a} + 4\vec{b})^2 = 9(\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2) = 9(1 + 2 \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi + 9) = 63$

Отсюда $|\vec{p} + 2\vec{q}| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Пример 3.

Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{x} = (2, 1, -2)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x} \cdot \vec{a}) = 27$.

В силу коллинеарности вектор $\vec{x}$ можно представить в виде $\vec{x} = \lambda \vec{a}$, где λ - неизвестный множитель.

Для его определения используем условие $(\vec{x} \cdot \vec{a}) = \lambda \vec{a}^2 = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda = 27$.

Отсюда $\lambda = 3$ и $\vec{x} = 3\vec{a} = (6, 3, -6)$.

Пример 4.

Вычислить проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$ и $\vec{c} = (-1, 1, 4)$

Воспользуемся формулой

$$\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|}$$

Найдём $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = 1(3-1) - 3(-4+1) + 4(2+4) = 35$

$$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(3-1)^2 + (-4+1)^2 + (2+4)^2} = 7$$

Отсюда $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = 5$

Пример 5.

Найти площадь треугольника ABC (рис.1) если A (1,1,1), B (2,0,1) и C (1,2,-1).

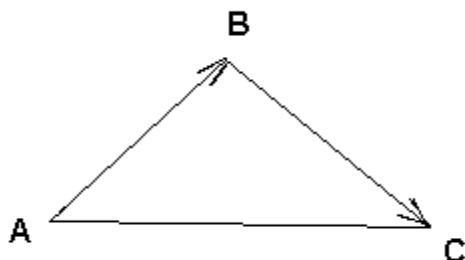


Рис.1

Модуль векторного произведения численно равен удвоенной площади треугольника, построенного на этих векторах как на сторонах:

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{a}\vec{b}]|$$

Введем векторы $\vec{a} = \vec{AB} = (1, -1, 0)$ и $\vec{b} = \vec{AC} = (0, 1, -2)$

Векторное произведение

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2i + 2j + k$$

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Отсюда $S = 1,5$ кв.ед.

Пример 6

Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = (1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (2, 0, 1)$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|\vec{x}| = \sqrt{6}$

Найти вектор $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j - 2k$$

Так как вектор $\vec{x}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то он коллинеарен вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{x} = \lambda \vec{c} = (\lambda, \lambda, -2\lambda)$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6}\lambda = \sqrt{6} \rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm 1$$

Вектор $\bar{x}$ образует с осью OX тупой угол – поэтому его проекция на эту ось должна быть отрицательной. Отсюда $\lambda = -1$ и $\bar{x} = -c = (-1, -1, 2)$

Пример 7

Найти направляющие косинусы вектора сила $\bar{F} = (1, -1, 1)$, приложенной в точке B (5, 1, 0) и момент этой силы относительно точки A(3, 2, -1)

Найдём направляющие косинусы вектора силы

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\bar{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \beta = \frac{F_y}{|\bar{F}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{|\bar{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Момент силы определим как векторное произведение вектора $\bar{AB} = (2, -1, 1)$ на вектор $\bar{F}$:

$$\bar{m} = [\bar{AB}\bar{F}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -j - k$$

т.е. $\bar{m} = (0, -1, -1)$

Пример 8

Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D (рис.2), если её вершины A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7) и D(-5, -4, 8)

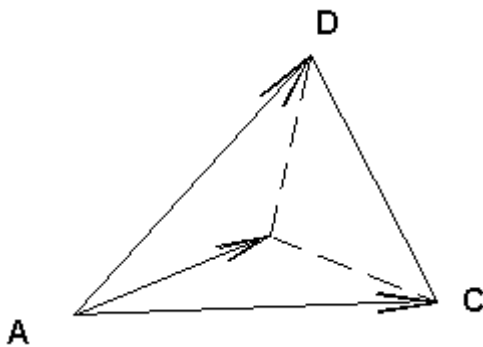


Рис.2

Найдём векторы:

$$\bar{AB} = (2, -2, -3); \quad \bar{AC} = (4, 0, 6); \quad \bar{AD} = (-7, -7, 7).$$

Объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{AB}$, $\bar{AC}$, и $\bar{AD}$

равен одной шестой модулю смешанного произведения этих векторов:

$$V = \frac{1}{6} |\bar{AB} \bar{AC} \bar{AD}| \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$$

$$\text{где } S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\bar{AB} \cdot \bar{AC}]|$$

$$\text{Отсюда } h = \frac{|\bar{AB} \cdot \bar{AC} \cdot \bar{AD}|}{|[\bar{AB} \cdot \bar{AC}]|}$$

Найдём

$$\bar{AB} \cdot \bar{AC} \cdot \bar{AD} = \begin{vmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 308,$$

$$[\bar{AB} \cdot \bar{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12i + 24j + 8k,$$

$$|[\bar{AB} \cdot \bar{AC}]| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 28$$

Отсюда $h = \frac{308}{28} = 11$

Теоретические вопросы к защите курсовой работы.

1. Определение вектора. Линейные операции над векторами, свойства этих операций.
2. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам на плоскости. Доказать возможность и единственность такого разложения.
3. Разложение вектора по трем неколлинеарным векторам в пространстве.
4. Проекция вектора на ось. Свойства проекции.
5. Разложение вектора по координатным ортам. Координаты вектора. Направляющие векторы, вывод формулы $\cos^2 \gamma + \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha = 1$.
6. Условия коллинеарности и компланарности векторов в векторной и координатной форме.
7. Радиус-вектор точки. Модуль вектора. Расстояние между двумя точками.
8. Вывод формулы деления отрезка в данном отношении.
9. Скалярное произведение векторов, его физическое толкование. Свойства скалярного произведения.
10. Проекция вектора на вектор. Угол между векторами. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов.
11. Скалярное произведение векторов в координатной форме.
12. Векторное произведение двух векторов, его физическое толкование.
13. Векторное произведение векторов в координатной форме.
14. Геометрические приложения векторного произведения.
15. Свойства векторного произведения.
16. Смешанное произведение трех векторов в координатной форме.
17. Необходимое и достаточное условие компланарности векторов.
18. Смешанное произведение векторов в координатной форме.
19. Свойства смешанного произведения.

Задача №1.

Написать разложение вектора $\bar{x}$ по векторам $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$.

№ n/n	$\bar{x}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{r}$
1.1.	(-2, 4, 7)	(0, 1, 2)	(1, 0, 1)	(-1, 2, 4)
1.2.	(6, 12, -1)	(1, 3, 0)	(2, -1, 1)	(0, -1, 2)
1.3.	(1, -4, 4)	(2, 1, -1)	(0, 3, 2)	(1, -1, 1)
1.4.	(-9, 5, 5)	(4, 1, 1)	(2, 0, -3)	(-1, 2, 1)
1.5.	(-5, -5, 5)	(-2, 0, 1)	(1, 3, -1)	(0, 4, 1)
1.6.	(13, 2, 7)	(5, 1, 0)	(2, -1, 3)	(1, 0, -1)
1.7.	(-19, -1, 7)	(0, 1, 1)	(-2, 0, 1)	(3, 1, 0)
1.8.	(3, -3, 4)	(1, 0, 2)	(0, 1, 1)	(2, -1, 4)
1.9.	(2, 2, -1)	(3, 1, 0)	(-1, 2, 1)	(-1, 0, 2)
1.10.	(-1, 7, -4)	(-1, 2, 1)	(2, 0, 3)	(1, 1, -1)
1.11.	(6, 5, -14)	(1, 1, 4)	(0, -3, 2)	(2, 1, -1)
1.12.	(6, -1, 7)	(1, -2, 0)	(-1, 1, 3)	$\bar{r}$ (1, 0, 4)
1.13.	(5, -15, 0)	(1, 0, 5)	(-1, 3, 2)	(0, -1, 1)
1.14.	(2, -1, 11)	(1, 1, 0)	(0, 1, -2)	(1, 0, 8)
1.15.	(11, 5, -3)	(1, 0, 2)	(-1, 0, 1)	(2, 5, -3)
1.16.	(8, 0, 5)	(2, 0, 1)	(1, 1, 0)	(4, 1, 2)
1.17.	(3, 1, 8)	(0, 1, 3)	(1, 2, -1)	(2, 0, -1)
1.18.	(8, 1, 12)	(1, 2, -1)	(3, 0, 2)	(-1, 1, 1)

1.19.	(-9, -8, -3)	(1, 4, 1)	(-3, 2, 1)	(1, -1, 2)
1.20.	(-5, 9, -13)	(0, 1, -2)	(3, -1, 1)	(4, 1, 0)
1.21.	(-15, 5, 6)	(0, 5, 1)	(3, 2, -1)	(-1, 1, 0)
1.22.	(8, 9, 4)	(1, 0, 1)	(0, -2, 1)	(1, 3, 0)
1.23.	(23, -14, -30)	(2, 1, 0)	(1, -1, 0)	(-3, 2, 5)
1.24.	(3, 1, 3)	(2, 1, 0)	(1, 0, 1)	(4, 2, 1)
1.25.	(-1, 7, 0)	(0, 3, 1)	(1, -1, 2)	(2, -1, 0)
1.26.	(11, -1, 4)	(1, -1, 2)	(3, 2, 0)	(-1, 1, 0)
1.27.	(-13, 2, 18)	(1, 1, 4)	(-3, 0, 2)	(1, 2, -1)
1.28.	(0, -8, 9)	(0, -2, 1)	(3, 1, -1)	(4, 0, 1)
1.29.	(8, -7, -13)	(0, 1, 5)	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)
1.30.	(2, 7, 5)	(1, 0, 1)	(1, -2, 0)	(0, 3, 1)

Задача №2.

Определить коллинеарны ли векторы c_1 и c_2 , построенные на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

№ n/n	$\bar{a}$	$\bar{b}$	c_1	c_2
2.1.	(1, -2, 3)	(3, 0, -1)	$2\bar{a} + 4\bar{b}$	$3\bar{b} - \bar{a}$
2.2.	(1, 0, -1)	(-2, 3, 5)	$\bar{a} + 2\bar{b}$	$3\bar{a} - \bar{b}$
2.3.	(-2, 4, 1)	(1, -2, 7)	$5\bar{a} + 3\bar{b}$	$2\bar{a} - \bar{b}$
2.4.	(1, 2, -3)	(2, -1, -1)	$4\bar{a} + 3\bar{b}$	$8\bar{a} - \bar{b}$
2.5.	(3, 5, 4)	(5, 9, 7)	$2\bar{a} + \bar{b}$	$3\bar{a} - 2\bar{b}$
2.6.	(1, 4, -2)	(1, 1, -1)	$\bar{a} + \bar{b}$	$4\bar{a} + 2\bar{b}$
2.7.	(1, -2, 5)	(3, -1, 0)	$4\bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{b} - 2\bar{a}$
2.8.	(3, 4, -1)	(2, -1, 1)	$6\bar{a} - 3\bar{b}$	$\bar{b} - 2\bar{a}$
2.9.	(2, -3, -2)	(1, 0, 5)	$3\bar{a} + 9\bar{b}$	$\bar{a} - 3\bar{b}$
2.10.	(-1, 4, 2)	(3, -2, 6)	$2\bar{a} - \bar{b}$	$3\bar{b} - 6\bar{a}$
2.11.	(5, 0, -1)	(7, 2, 3)	$2\bar{a} - \bar{b}$	$3\bar{b} - 6\bar{a}$
2.12.	(0, 3, -2)	(1, -2, 1)	$5\bar{a} - 2\bar{b}$	$3\bar{a} + 5\bar{b}$
2.13.	(-2, 7, -1)	(-3, 5, 2)	$2\bar{a} + 3\bar{b}$	$3\bar{a} + 2\bar{b}$
2.14.	(3, 7, 0)	(1, -3, 4)	$4\bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{b} - 2\bar{a}$
2.15.	(-1, 2, -1)	(2, -7, 1)	$6\bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{b} - 3\bar{a}$
2.16.	(7, 9, -2)	(5, 4, 3)	$4\bar{a} - \bar{b}$	$4\bar{b} - \bar{a}$
2.17.	(5, 0, -2)	(6, 4, 3)	$5\bar{a} - 3\bar{b}$	$6\bar{b} - 10\bar{a}$
2.18.	(8, 3, -1)	(4, 1, 3)	$2\bar{a} - \bar{b}$	$2\bar{b} - 4\bar{a}$
2.19.	(3, -1, 6)	(5, 7, 10)	$4\bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{a} - 2\bar{b}$
2.20.	(1, -2, 4)	(7, 3, 5)	$6\bar{a} - 3\bar{b}$	$\bar{b} - 2\bar{a}$
2.21.	(3, 7, 0)	(4, 6, -1)	$3\bar{a} + 2\bar{b}$	$5\bar{a} - 7\bar{b}$
2.22.	(2, -1, 4)	(3, -7, -6)	$2\bar{a} - 3\bar{b}$	$3\bar{a} - 2\bar{b}$
2.23.	(5, -1, -2)	(6, 0, 7)	$3\bar{a} - 2\bar{b}$	$4\bar{b} - 6\bar{a}$
2.24.	(-9, 5, 3)	(7, 1, -2)	$2\bar{a} - \bar{b}$	$3\bar{a} + 5\bar{b}$
2.25.	(4, 2, 9)	(0, -1, 3)	$4\bar{b} - 3\bar{a}$	$4\bar{a} - 3\bar{b}$
2.26.	(2, -1, 6)	(-1, 3, 8)	$5\bar{a} - 2\bar{b}$	$2\bar{a} - 5\bar{b}$
2.27.	(5, 0, 8)	(-3, 1, 7)	$3\bar{a} - 4\bar{b}$	$12\bar{b} - 9\bar{a}$

2.28.	(-1, 3, 4)	(2, -1, 0)	$6\bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{b} - 3\bar{a}$
2.29.	(4, 2, -7)	(5, 0, -3)	$\bar{a} - 3\bar{b}$	$6\bar{b} - 2\bar{a}$
2.30.	(2, 0, -5)	(1, -3, 4)	$2\bar{a} - 5\bar{b}$	$5\bar{a} - 2\bar{b}$

Задача №3.

Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

№ n/n	A	B	C
3.1.	(6, 5, 1)	(0, 1, 2)	(2, 1, 0)
3.2.	(5, 4, 2)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)
3.3.	(2, 0, 4)	(1, 1, 1)	(3, 2, 1)
3.4.	(1, 2, 3)	(2, -1, 0)	(3, 2, 1)
3.5.	(1, -1, 2)	(5, -6, 2)	(2, 3, -1)
3.6.	(3, -3, 1)	(-3, -2, 0)	(5, 0, 2)
3.7.	(4, 2, 1)	(0, 4, 5)	(1, 2, 7)
3.8.	(1, 0, 2)	(2, 4, 3)	(1, 7, 1)
3.9.	(5, -1, 3)	(2, 0, 1)	(3, 1, -1)
3.10.	(0, 8, 1)	(2, 1, 1)	(-1, 4, 5)
3.11.	(1, 0, 4)	(0, 2, 3)	(-1, 1, 0)
3.12.	(2, 3, 4)	(3, 4, 5)	(-4, 5, 6)
3.13.	(1, -2, 3)	(0, -1, 2)	(3, -4, 5)
3.14.	(0, -3, 6)	(-12, -3, -3)	(-9, -3, -6)
3.15.	(3, 3, -1)	(5, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.16.	(-1, 2, -3)	(3, 4, -6)	(1, 1, -1)
3.17.	(-4, -2, 0)	(-1, -2, 4)	(3, -2, 1)
3.18.	(5, 3, -1)	(5, 2, 0)	(6, 4, -1)
3.19.	(-3, -7, -6)	(0, -1, -2)	(2, 3, 0)
3.20.	(2, -4, 6)	(0, -2, 4)	(6, -8, 10)
3.21.	(0, 1, -2)	(3, 1, 2)	(4, 1, 1)
3.22.	(3, 3, -1)	(1, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.23.	(2, 1, -1)	(6, -1, -4)	(4, 2, 1)
3.24.	(-1, -2, 1)	(-4, -2, 5)	(-8, -2, 2)
3.25.	(6, 2, -3)	(6, 3, -2)	(7, 3, -3)
3.26.	(0, 0, 4)	(-3, -6, 1)	(-5, -10, -1)
3.27.	(2, -8, -1)	(4, -6, 0)	(-2, -5, -1)
3.28.	(3, -6, 9)	(0, 3, 6)	(9, -12, 15)
3.29.	(0, 2, -4)	(8, 2, 2)	(6, 2, 4)
3.30.	(3, 3, -1)	(5, 1, -2)	(4, 1, 1)

Задача №4.

Определить направляющие косинусы вектора силы F . Найти момент силы F , приложенной в точке B , относительно точки A .

№ n/n	F	B	A
4.1.	(3, 3, 3)	(3, -1, 5)	(4,-2,3)
4.2.	(4, 4, 4)	(4, -2, 5)	(5,-3,3)
4.3.	(8, -8, 8)	(10, -8, 1)	(9,-7,3)
4.4.	(-2, 2, -2)	(11, -9, 1)	(10,-8,3)
4.5.	(5, 5, 5)	(5, -3, 5)	(6,-4,3)
4.6.	(-3, 3, -3)	(12, -10, 1)	(11,-9,3)
4.7.	(6, 6, 6)	(6, -4, 5)	(7,-5,3)
4.8.	(-4, 4, -4)	(13, -11, 1)	(12,-10,3)
4.9.	(7, 7, 7)	(7, -5, 5)	(8,-6,3)
4.10.	(-5, 5, -5)	(14, -12, 1)	(13, -11, 3)
4.11.	(-1, -1, 1)	(8, -6, -5)	(9, -7, 3)
4.12.	(3, 3, -3)	(0, 1, 2)	(2, -1, -2)
4.13.	(-2, -2, -2)	(9, -7, 5)	(10, -8, 3)
4.14.	(4, 4, -4)	(1, 0, 2)	(3, 2, -2)
4.15.	(-3, -3, -3)	(10, -8, 5)	(11, -9, 3)
4.16.	(5, 5, -5)	(2,-1,2)	(4, -3, 2)
4.17.	(-4, -4, -4)	(11,-9,5)	(12, -10, 3)
4.18.	(6, 6, -6)	(3,-2,2)	(5, -4, -2)
4.19.	(-5, -5, -5)	(12,-10,5)	(13, -11, 3)
4.20.	(7, 7, -7)	(4,-3,2)	(6, -5, -2)
4.21.	(3, -3, 3)	(5,-3,1)	(4, -2, 3)
4.22.	(8, 8, -8)	(5,-4,2)	(7, -6, -2)
4.23.	(4, -4, 4)	(6,-4,1)	(5, -4, 3)
4.24.	(-2, -2, 2)	(6,-5,2)	(8, -7, -2)
4.25.	(5, -5, 5)	(7,-5,1)	(6, -4, 3)
4.26.	(-3, -3, 3)	(7,-6,2)	(9, -8, 2)
4.27.	(6, -6, 6)	(8,-6,1)	(7, -5, 3)
4.28.	(-4, -4, 4)	(8,-7,2)	(10, -9, -2)
4.29.	(7, -7, 7)	(9,-7,1)	(8, -6, 3)
4.30.	(-5, -5, 5)	(9,-8,2)	(11, -10, 2)

Задача №5.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b .

№ n/n	a	b	$ p $	$ q $	$(p \wedge q)$
5.1.	$p + 2q$	$3p - q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.2.	$3p + q$	$p - 2q$	4	1	$\frac{\pi}{4}$
5.3.	$p - 3q$	$p + 2q$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{\pi}{2}$
5.4.	$3p - 2q$	$p + 5q$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
5.5.	$p - 2q$	$2p + q$	2	3	$\frac{3\pi}{4}$
5.6.	$p + 3q$	$p - 2q$	2	3	$\frac{\pi}{3}$
5.7.	$2p - q$	$p + 3q$	3	2	$\frac{\pi}{2}$
5.8.	$4p + q$	$p - q$	7	2	$\frac{\pi}{4}$
5.9.	$p - 4q$	$3p + q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.10.	$p + 4q$	$2p - q$	7	2	$\frac{\pi}{3}$
5.11.	$3p + 2q$	$p - q$	10	1	$\frac{\pi}{2}$
5.12.	$4p - q$	$p + 2q$	5	4	$\frac{\pi}{4}$
5.13.	$2p + 3q$	$p - 2q$	6	7	$\frac{\pi}{3}$

5.14.	$3p - q$	$p + 2q$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
5.15.	$2p + 3q$	$p - 2q$	2	3	$\frac{\pi}{6}$
5.16.	$2p - 3q$	$3p + q$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.17.	$3p - 2q$	$2p + 3q$	2	5	$\frac{\pi}{6}$
5.18.	$4p - 3q$	$p + 2q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
5.19.	$p - q$	$p + q$	2	5	$\frac{\pi}{6}$
5.20.	$5p - q$	$p + 5q$	5	3	$\frac{\pi}{6}$
5.21.	$3p - q$	$p + 3q$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
5.22.	$p - 4q$	$p + 5q$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$
5.23.	$5p + q$	$p - 3q$	1	2	$\frac{\pi}{3}$
5.24.	$7p - 2q$	$p + 3q$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\pi}{2}$
5.25.	$6p - q$	$p + q$	3	4	$\frac{\pi}{4}$
5.26.	$10p + q$	$3p - 2q$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.27.	$6p - q$	$3p + 2q$	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
5.28.	$3p + 4q$	$q - p$	2,5	2	$\frac{\pi}{2}$
5.29.	$7p + q$	$p - 3q$	3	1	$\frac{3\pi}{4}$
5.30.	$p + 3q$	$3p - q$	3	5	$\frac{2\pi}{3}$

Задача №6

Определить компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, и $\bar{c}$.

№ n/n	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
6.1.	(2,3,1)	(-1,0,-1)	(2,2,2)
6.2.	(3,2,1)	(2,3,4)	(3,1,-1)
6.3.	(1,5,2)	(-1,1,-1)	(1,1,1)
6.4.	(1,-1,-3)	(3,2,1)	(2,3,4)
6.5.	(3,3,1)	(1,-2,1)	(1,1,1)
6.6.	(3,1,-1)	(-2,-1,0)	(5,2,-1)
6.7.	(4,3,1)	(1,-2,1)	(2,2,2)
6.8.	(4,3,1)	(6,7,4)	(2,0,-1)
6.9.	(3,2,1)	(1,-3,-7)	(1,2,3)
6.10.	(3,7,2)	(-2,0,-1)	(2,2,1)
6.11.	(1,-2,6)	(1,0,1)	(2,-6,17)
6.12.	(6,3,4)	(-1,-2,-1)	(2,1,2)
6.13.	(7,3,4)	(-1,-2,-1)	(4,2,4)
6.14.	(2,3,2)	(4,7,5)	(2,0,-1)
6.15.	(5,3,4)	(-1,0,-1)	(4,2,4)
6.16.	(3,10,5)	(-3,-2,-3)	(2,4,3)
6.17.	(-2,-4,-3)	(4,3,1)	(6,7,4)
6.18.	(3,1,-1)	(1,0,-1)	(8,3,-2)
6.19.	(4,2,2)	(-3,-3,-3)	(2,1,2)
6.20.	(4,1,2)	(9,2,5)	(1,1,-1)
6.21.	(5,3,4)	(4,3,3)	(9,5,8)
6.22.	(3,4,2)	(1,1,0)	(8,11,6)
6.23.	(4,-1,-6)	(1,-3,-7)	(2,-1,-4)
6.24.	(3,1,0)	(-5,-4,-5)	(4,2,4)
6.25.	(3,0,3)	(8,1,6)	(1,1,-1)
6.26.	(1,-1,4)	(1,0,3)	(1,-3,8)
6.27.	(6,3,4)	(-1,-2,-1)	(2,1,2)
6.28.	(4,1,1)	(-9,-4,-9)	(6,2,6)
6.29.	(-3,3,3)	(-4,7,6)	(3,0,-1)
6.30.	(-7,10,-5)	(0,-2,-1)	(-2,4,-1)

Задача №7

Вычислить объем пирамиды и вершинами в точках A , B , C , и D , и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC .

№ n/n	A	B	C	D
7.1.	(0,1,2)	(2,1,7)	(2,7,4)	(0,0,4)
7.2.	(1,2,3)	(2,8,-4)	(0,5,4)	(2,9,4)
7.3.	(1,1,1)	(2,4,-2)	(2,0,2)	(0,1,-1)
7.4.	(1,-1,1)	(0,2,3)	(1,-1,0)	(0,2,2)
7.5.	(2,1,3)	(4,-2,0)	(1,3,-3)	(7,5,2)
7.6.	(-2,0,4)	(1,3,-1)	(4,-1,3)	(2,7,3)
7.7.	(1,2,3)	(0,0,0)	(1,4,3)	(1,8,-1)
7.8.	(-1,2,0)	(1,0,3)	(0,2,2)	(1,8,3)
7.9.	(2,-1,1)	(3,3,2)	(2,1,0)	(4,1,-3)
7.10.	(2,1,-1)	(-3,1,2)	(0,1,2)	(-1,8,3)
7.11.	(-2,1,1)	(5,5,4)	(3,2,-1)	(4,1,3)
7.12.	(0,1,-1)	(3,-1,5)	(1,0,4)	(3,5,7)
7.13.	(1,1,2)	(-1,1,3)	(2,-2,4)	(-1,0,-2)
7.14.	(2,3,1)	(4,1,-2)	(6,3,7)	(7,5,-3)
7.15.	(1,1,-1)	(2,3,1)	(3,2,1)	(5,9,-8)
7.16.	(1,5,-7)	(-3,5,3)	(-2,7,3)	(-4,8,-12)
7.17.	(-3,4,-7)	(1,5,-4)	(-6,-2,0)	(2,5,4)
7.18.	(-1,2,-3)	(4,-1,0)	(2,1,-2)	(3,4,5)
7.19.	(4,-1,3)	(-2,1,0)	(0,-5,1)	(3,2,-6)
7.20.	(1,-1,1)	(-2,0,3)	(2,1,-1)	(2,-2,-4)
7.21.	(1,2,0)	(1,-1,2)	(0,1,-1)	(-3,0,1)
7.22.	(1,0,2)	(1,2,-1)	(2,-2,1)	(2,1,0)
7.23.	(1,2,-3)	(1,0,1)	(-2,-1,6)	(0,-5,-4)
7.24.	(3,10,-1)	(-2,3,-5)	(-6,0,-3)	(1,-1,2)
7.25.	(-1,2,4)	(-1,-2,-4)	(3,0,-1)	(7,-3,1)
7.26.	(0,-3,1)	(-4,1,2)	(2,-1,5)	(3,1,-4)
7.27.	(1,3,0)	(4,-1,2)	(3,0,1)	(-4,3,5)
7.28.	(-2,-1,-1)	(0,3,2)	(3,1,-4)	(-4,7,3)
7.29.	(-3,-5,6)	(2,1,-4)	(0,-3,-1)	(-5,2,-8)
7.30.	(2,-4,-3)	(5,-6,0)	(-1,3,-3)	(-10,-8,7)