Министерство образования Российской Федерации

*“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО*

Кафедра ”Высшая математика”

А. В. Жемерев

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Методическое пособие для студентов 1-го курса
2-го факультета МАТИ

Москва 2003 г.

Оглавление

1. Бесконечно малые функции. Их свойства

Определение. *Функция $\alpha(x)$ называется* **бесконечно малой функцией (величиной)** *(БМВ) при $x \to a$ или при $x \to \infty$, если ее предел равен нулю:*

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to \infty} \alpha(x) = 0.$$

С помощью логических символов "на языке $\varepsilon - \delta$" это записывается следующим образом:

$$(\alpha(x) - \text{БМВ при x} \to \text{a}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x : 0 < |x - a| < \delta)|\alpha(x)| < \varepsilon;$$

$$(\alpha(x) - \text{БМВ при x} \to \infty) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x : |x| > \delta)|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Например, функция $f(x) = 1/x$ является бесконечно малой при стремлении $x \to \infty$.

Свойства бесконечно малых величин

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию есть величина бесконечно малая.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

В качестве примера докажем свойство 1 для двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$. Покажем, что функция $\alpha(x)+\beta(x)$ также является бесконечно малой при $x \to a$.

По условию $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые при $x \to a$. Это означает, что для любого $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ найдутся такие числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что всех x, удовлетворяющим условиям

$$0 < |x - a| < \delta_1$$

и

$$0 < |x - a| < \delta_2,$$

выполняются соответственно неравенства

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возмем в качестве числа δ минимальное из чисел δ_1 и δ_2. Тогда при выполнении неравенства

$$0 < |x - a| < \delta$$

будут верны два последних неравенства для $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Складывая их почленно, получим

$$|\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Используя неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$, получим

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяюших условию

$$0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon.$$

А это означает, что функция $\alpha(x) + \beta(x)$ есть величина бесконечно малая.

Связь бесконечно малых величин с пределами функций

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ $(x \to \infty)$ предел, равный A, то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$, при $x \to a$ $(x \to \infty)$

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Докажем теорему для случая $x \to a$. По условию

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta,$$

будет верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

или, обозначив

$$\alpha(x) = f(x) - A,$$

справедливо неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to a$.

Верна и обратная теорема:

Теорема. *Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$, при $x \to a$ ($x \to \infty$), то число A есть предел этой функции при $x \to a$ ($x \to \infty$) т.е. $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A$.*

По условию $f(x) = A + \alpha(x)$. Пусть, например, $x \to a$.

Так как функция

$$\alpha(x) = f(x) - A$$

есть бесконечно малая при $x \to a$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta,$$

будет верно неравенство

$$|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

2. Сравнение бесконечно малых функций

Рассмотрим предел частного от деления двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$.

Предел отношения двух бесконечно малых величин $A = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ может быть равен: нулю, конечному числу или ∞.

1. Если A конечно, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка и пишут $\alpha(x) = O[\beta(x)]$ при $x \to a$.

Если $A = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

2. Если $A = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ и пишут $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ при $x \to a$.

Если существует действительное число $r > 0$ такое, что

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^r} \neq 0$$

то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой порядка r относительно $\beta(x)$ при $x \to a$.

3. Если $A \to \infty$ при $x \to a$,то в этом случае $\beta(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и пишут $\beta(x) = o[\alpha(x)]$.

Конечно, может случиться, что отношение двух бесконечно малых не стремиться ни к какому пределу; например, если взять $\alpha = x$ и $\beta = x \sin \frac{1}{x}$, то их отношение, равное $\sin \frac{1}{x}$, равное $x \to 0$ предела не имеет. В таком случае говорят, что две бесконечно малые не сравнимы между собой.

3. Эквивалентные бесконечно малые. Их применение к вычислению пределов

При вычислении пределов полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых величин:

$$\sin x \sim x; \operatorname{tg} x \sim x; \arcsin x \sim x; \operatorname{arctg} x \sim x; \ln(1 + x) \sim x,$$

при $x \to 0$.

Их несложно получить, используя правило Лопиталя (см. ниже).

Пример. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$ и $\beta(x) = x \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

Заменим $\sin^2 x$ и $\operatorname{tg} x$ на их эквивалентные бесконечно малые $\sin^2 x \sim x^2$ и $\operatorname{tg} x \sim x$. Получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Таким образом, $\alpha(t) = o[\beta(t)]$ при $t \to 0$. Кроме того, $\alpha(x)$ является бесконечно малой порядка 2 относительно $\beta(x)$.

Пример. Определить порядок малости $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x+1} - 1)$ относительно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Так как

$$\sqrt{x+1} - 1 = \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{x}{(\sqrt{x+1} + 1)}$$

то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

4. Бесконечно большие функции. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной, при $x \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что для всех x и удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Запись того, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$ означает следующее: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \to a$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что для всех x удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Пример: $y = \operatorname{tg} x$ бесконечно большая при $x \to \pi/2$.

Замечание: Функция может быть неограниченной, но не бесконечно большая. Например, функция $y = x \sin x$ – не ограничена на $(-\infty, \infty)$, но не бесконечно большая при $x \to \infty$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to a(x \to \infty)$, то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a(x \to \infty)$.

И обратно, если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a(x \to \infty)$, то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ есть величина бесконечно малая при $x \to a(x \to \infty)$.

Докажем первое утверждение для $x \to a$, т.е. если $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина, то $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая величина при $x \to a$.

По условию $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to a$, следовательно для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, будет верно неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно следующему $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ или $|f(x)| > M$, где $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ и $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

А это и означает, что при $x \to a$ функция $f(x)$ является бесконечно большой величиной.

Например, функция $y = \cos x$ – бесконечно малая при $x \to \pi/2$, тогда функция $\dfrac{1}{\cos x}$ – бесконечно большая. Функция $y = \dfrac{1}{2x - 7}$ - бесконечно малая при $x \to \infty$, тогда функция $y = 2x - 7$ - бесконечно большая при $x \to \infty$.

5. Непрерывность функции в точке

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является одним из основных понятий математического анализа.

Дадим два определения понятия непрерывности функции в точке.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной в точке** *a, если она удовлетворяет трем условиям: 1) $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, 2) существует конечный предел*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *3) этот предел равен значению функции $f(x)$ в точке a, т.е.* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

С помощью логических символов это определение можно записать в виде:

$$(f(x)\ \text{непр.в}\ \ x = a) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x : |x-a| < \delta)|f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью ее графика при прохождении данной точки.

Дадим второе определение непрерывности функции в точке.

Дадим аргументу a приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значения функции: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ (см. рис. 1).

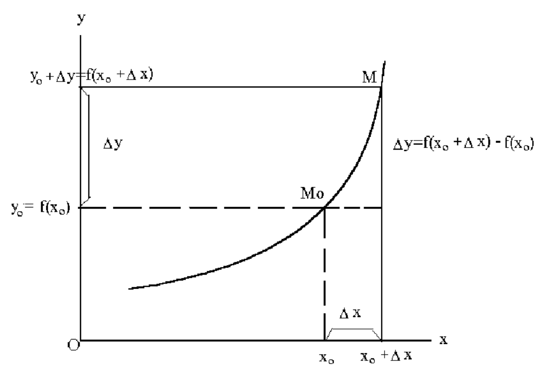

Рис. 1.

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется* **непрерывной в точке** *a, если она определена в некоторой окрестности точки $x = a$, и приращение ее Δy в этой точке, соответствующее приращениюΔx, стремится к нулю при стремлении Δx к нулю:* $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Покажем равносильность обоих определений.

Из первого определения при $x = a + \Delta x$ следует

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(a + \Delta x) = f(a),$$

так как стремление $x \to a$ равносильно условию $\Delta x \to 0$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $f(a+\Delta x) = f(a) + \alpha(\Delta x)$, где

$$\alpha(\Delta x) = f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta y$$

есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y) = 0$.

6. Свойства непрерывных функций

1. *Если функция $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то их сумма*

$$f(x) + g(x),$$

произведение

$$f(x)g(x)$$

и частное

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

(при условии, что $g(a) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке a.

2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$, то существует такая окрестность точки a, в которой $f(x) > 0$.*

3. *Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \psi(x)$ непрерывна в точке $u_0 = \psi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\psi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Свойство 3 может быть записано в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f[\psi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \psi(x)\right],$$

т.е. *под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.*

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в области их определения.

7. Точки разрыва функций и их классификация

Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } \mathrm{f(a+0)}=\lim_{\mathrm{x\to a+0}} \mathrm{f(x)},$$

причем не все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой, то точка a называется *точкой разрыва 1 рода* (существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при, не равные друг другу).

Точки разрыва 1 рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$, т.е. когда левый и правый пределы функции $f(x)$ в точке a равны между собой, но не равны значению функции $f(x)$ в этой точке) и на *точки скачка* (когда $f(a-0)\neq f(a+0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0)-f(a-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке a.

Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва 1 рода, называются *точками разрыва 2 рода.* В точках разрыва 2 рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

8. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой *графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x,f(x))$ до этой прямой стремится к 0 при неограниченном удалении точки графика от начала координат.*

Асимптоты бывают 3 видов: вертикальные (см. рис. 2а), горизонтальные (см. рис. 2б) и наклонные (см. рис. 2в).

Асимптоты находят, используя следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x\to x_0-0$ (слева) или $x\to x_0+0$*

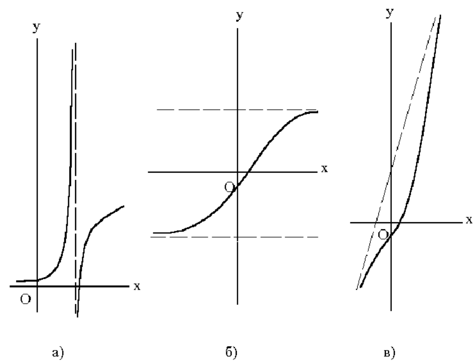

Рис. 2.

(справа) равен бесконечности. Тогда прямая является $x = x_0$ *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$.

Вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$.

Теорема 2. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена при достаточно больших* x *и существует конечный предел функции*

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = b.$$

Тогда прямая $y = b$ *есть горизонтальная асимптота графика функции* $y = f(x)$.

Теорема 3. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена при достаточно больших* x *и существуют конечные пределы*

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

и

$$\lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Тогда прямая $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$.

Пример. Найти асимптоты графика дробно-рациональной функции

$$y(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; c \neq 0; ad - bc \neq 0.$$

Если $c = 0$, то дробно-рациональная функция становится линейной

$$y(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}.$$

Особая точка $x = -d/c$. Найдём предел $\lim\limits_{x \to -d/c} f(x)$.

Перепишем дробно-рациональную функцию в виде:

$$y(x) = \frac{ax + b}{c(x + d/c)}$$

Так как $ad - bc \neq 0$ то при $x \to d/c$ числитель дробно-рациональной функции не стремится к нулю. Поэтому прямая $x = -d/c$ - асимптота графика дробно-рациональной функции.

Найдём предел $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a + b/x}{c + d/c} = \frac{a}{c}$$

$y = a/c$ - является горизонтальной асимптотой дробно-рациональной функции.

Пример. Найти асимптоты кривой $y(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1.$$

Поэтому $k = 1$.

Теперь ищем b.

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 1} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-x}{x^2 + 1}\right)$$

Функция $y(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ имеет наклонную асимптоту $y = x$.

9. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса

1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существуют такие постоянные и конечные* *числа m и M, что*

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{при} \quad a \leq x \leq b$$

(см. рис. 3а).

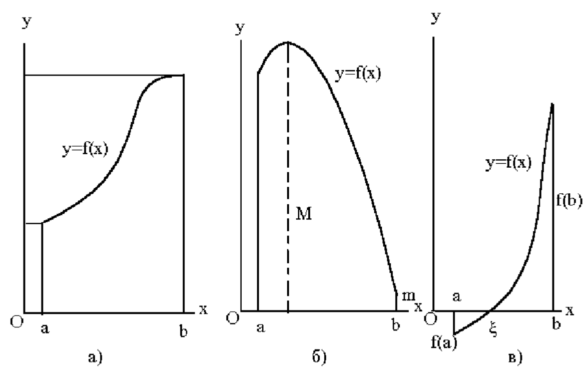

Рис. 3.

2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего значения M и наименьшего значения m* (см. рис. 3б).

3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и значения её на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдётся точка $\xi \in (a, b)$, такая, что $f(\xi) = 0$* (см. рис. 3в).

1 и 2 свойства функций, непрерывных на отрезке, в литературе иногда называют 1 и 2 теоремами Вейерштрасса.

Докажем 1 теорему Вейерштрасса.

При этом воспользуемся леммой Больцано – Вейерштрасса, которую примем без доказательства. *Из любой ограниченной последовательности всегда можно извлечь такую частичную последовательность*[1], *которая сходилась бы к конечному пределу.*

Доказательство поведем от противного: допустим, что функция $f(x)$ при изменении x в промежутке $[a, b]$ оказывается неограниченной.

[1]Последовательность, извлеченная из данной. См. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчислений, т.1, С.85-87

В таком для каждого натурального числа n найдется в промежутке $[a, b]$ такое значение $x = x_n$, что

$$|f(x_n)| \geq n.$$

По лемме Больцано – Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу:

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (\text{при} \;\; k \to \infty),$$

причем, очевидно, что $a \leq x \leq b$. Вследствие непрерывности функции в точке x_0, тогда должно быть и

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

а это невозможно, так как из $|f(x_n)| \geq n$ следует, что

$$|f(x_{n_k})| \to \infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.