

УДК 517.51

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ
НА СОБОЛЕВСКИХ КЛАССАХ¹

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Рассматривается задача оптимального восстановления производных функций из соболевских классов на \mathbb{R}^d по неточной информации об их преобразовании Фурье. Доказано, что существует область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ такая, что информация о преобразовании Фурье в любой области, содержащей Ω_0 , не ведет к уменьшению оптимальной погрешности восстановления.

В данной работе рассматривается задача оптимального восстановления производных функций из соболевских классов на \mathbb{R}^d по информации о преобразовании Фурье самих функций, заданном приближенно. Перед постановкой задачи приведем некоторые определения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Для функции $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ через $D^\alpha x(\cdot)$ будем обозначать производную порядка α по Вейлю, определяемую равенством

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (i\tau)^\alpha Fx(\tau) e^{i\langle \tau, t \rangle} d\tau,$$

где

$$(i\tau)^\alpha = (i\tau_1)^{\alpha_1} \dots (i\tau_d)^{\alpha_d}, \quad \langle \tau, t \rangle = \tau_1 t_1 + \dots + \tau_d t_d,$$

а $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$. Соболевское пространство $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ определяется как совокупность функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ таких, что

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r |Fx(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\|t\|^2 = t_1^2 + \dots + t_d^2$. Соответствующим соболевским классом назовем множество

$$H_2^r(\mathbb{R}^d) = \{x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d) : \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1\}.$$

Задача оптимального восстановления оператора D^α на классе $H_2^r(\mathbb{R}^d)$ по преобразованию Фурье функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$, заданному с погрешностью $\delta > 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$, ставится следующим образом. Мы считаем, что для каждой функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такая, что

$$\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta.$$

© 2003 Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00-15-96109, №02-01-39012 и №02-01-00386), программы «Университеты России» (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S. CRDF – R.F. Ministry of Education Award VZ-010-0.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные операторы $\varphi: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), y \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления, определяемая равенством

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi), \quad (1)$$

а также метод, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Впервые задача оптимального восстановления для функционалов по конечномерной информации была поставлена С. А. Смоляком [1]. Впоследствии эта постановка обобщалась и развивалась в разных направлениях (см. [2–6]). Подход к задачам восстановления, основанный на общих принципах теории экстремума, который мы здесь также используем, развивался в работах [7–10].

В данной работе мы сначала решаем задачу (1), а затем обсуждаем некоторый эффект, связанный с тем, что знание преобразования Фурье лишь на некотором подмножестве \mathbb{R}^d обеспечивает ту же погрешность оптимального восстановления, что и на всем пространстве.

Теорема 1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\alpha \neq 0$, $r > 1$ и $\sigma = \sum_{j=1}^d \alpha_j < r$. Положим

$$\Delta = \frac{\delta}{(2\pi)^{d/2}}, \quad \Delta_0 = \left(\frac{r - \sigma}{r} \right)^{r/2}, \quad p = \prod_{j=1}^d \alpha_j^{\alpha_j}.$$

Тогда, если $0 < \delta < (2\pi)^{d/2} \Delta_0$, то

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \frac{\sqrt{p}}{\sigma^{\sigma/2}} \Delta^{1-\sigma/r} \left(1 - \Delta^{2/r} \right)^{\sigma/2},$$

а метод

$$D^\alpha x(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(i\tau)^\alpha y(\tau) e^{i\langle \tau, t \rangle}}{1 + \frac{\sigma \Delta^2}{r(\Delta_0^{2/r} - \Delta^{2/r})} (1 + \|\tau\|^2)^r} d\tau$$

является оптимальным. Если $\delta \geq (2\pi)^{d/2} \Delta_0$, то

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \frac{\sqrt{p}}{r^{r/2}} (r - \sigma)^{(r-\sigma)/2},$$

а $D^\alpha x(t) \approx 0$ — оптимальный метод.

◁ Нетрудно показать, что имеет место следующее неравенство

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (2)$$

Действительно, для любого метода φ при всех $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$ (учитывая, что $-x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$), имеем

$$2\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|-D^\alpha x(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

откуда сразу же вытекает оценка (2).

Экстремальная задача в правой части неравенства (2) может быть записана в виде (для удобства мы ищем квадрат значения этой задачи)

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta, \quad \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1. \quad (3)$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi)^{-d} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

полагая

$$u(\cdot) = (2\pi)^{-d} |Fx(\cdot)|^2,$$

задача (3) в образах Фурье запишется в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} u(t) dt \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} u(t) dt \leq \Delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r u(t) dt \leq 1, \quad u(t) \geq 0 \text{ п. в.}, \quad (4)$$

где $|t|^{2\alpha} = |t_1|^{2\alpha_1} \dots |t_d|^{2\alpha_d}$. Можно показать, что в этой задаче нет решения. Поэтому расширим ее, заменяя функции положительными мерами. Итак, рассмотрим следующую задачу

$$\int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(t) \leq \Delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r d\mu(t) \leq 1, \quad d\mu(t) \geq 0. \quad (5)$$

Это выпуклая задача. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lambda_0 |t|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2 (1 + \|t\|^2)^r \right) d\mu(t).$$

Если $d\hat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (5), то согласно теореме Куна — Таккера (см., например, [8]) найдутся такие $\hat{\lambda}_0 \leq 0$, $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, не равные нулю одновременно, что

$$\min_{d\mu(t) \geq 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \quad (6)$$

и

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} d\widehat{\mu}(t) - \Delta^2 \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r d\widehat{\mu}(t) - 1 \right) = 0. \quad (7)$$

Кроме того, если для допустимой в (5) меры $d\widehat{\mu}(\cdot)$ выполняются условия (6) и (7) с $\widehat{\lambda}_0 < 0$ и $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (5). Действительно, для любой допустимой меры $d\mu(\cdot)$ имеем (используя последовательно допустимость этой меры и неотрицательность $\widehat{\lambda}_i$, $i = 1, 2$, условие (6) и условие (7))

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\mu(t) &\geq \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\mu(t) + \widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(t) - \Delta^2 \right) \\ &\quad + \widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r d\mu(t) - 1 \right) \geq \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\widehat{\mu}(t) \\ &\quad + \widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} d\widehat{\mu}(t) - \Delta^2 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r d\widehat{\mu}(t) - 1 \right) \\ &= \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\widehat{\mu}(t). \end{aligned}$$

Предъявим $d\widehat{\mu}(\cdot) \geq 0$ и $\widehat{\lambda}_0 < 0$, $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, для которых будут справедливы равенства (6) и (7). Введем следующие обозначения $A = \min(\Delta^2, \Delta_0^2)$,

$$\widehat{t}_j = \sqrt{\frac{A^{-1/r} - 1}{\sigma}} \alpha_j^{1/2}, \quad j = 1, \dots, d, \quad \widehat{t} = (\widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_d)$$

и положим $\widehat{\lambda}_0 = -1$,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1 &= \frac{p(A^{-1/r} - 1)^{\sigma-1}}{\sigma^\sigma} \left(A^{-1/r} \left(1 - \frac{\sigma}{r} \right) - 1 \right), \\ \widehat{\lambda}_2 &= \frac{p(A^{-1/r} - 1)^{\sigma-1} A^{1-1/r}}{r\sigma^{\sigma-1}} \end{aligned}$$

и $d\widehat{\mu}(\cdot) = A\delta(\cdot - \widehat{t})$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция в нуле. Легко видеть, что $\widehat{\lambda}_1 \geq 0$ ($\widehat{\lambda}_1 = 0$, когда $A = \Delta_0^2$) и $\widehat{\lambda}_2 > 0$. Непосредственная проверка показывает, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима и справедливы равенства (7). Для доказательства равенства (6) достаточно доказать, что функция

$$G(t) = -|t|^{2\alpha} + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 (1 + \|t\|^2)^r$$

неотрицательна и в точке \widehat{t} обращается в ноль. Предположим сначала, что $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Сделаем замену переменных $\xi_j = 2 \ln |t_j|$, $j = 1, \dots, d$, в функции $|t|^{-2\alpha} G(t)$, $|t| > 0$. Тогда получим функцию

$$F(\xi) = -1 + e^{-\langle \alpha, \xi \rangle} \left(\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 (1 + e^{\xi_1} + \dots + e^{\xi_d})^r \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d).$$

Нетрудно убедиться, что эта функция выпукла, $F(\hat{\xi}) = 0$, где $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_d)$, $\hat{\xi}_j = 2 \ln |\hat{t}_j|$, $j = 1, \dots, d$, и, кроме того, градиент этой функции в точке $\hat{\xi}$ равен нулю. Это означает, что $F(\xi) \geq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Отсюда, возвращаясь к старым переменным, получаем, что $G(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$ и $G(\hat{t}) = 0$. Если среди α_j есть нули, то аналогичные рассуждения приводят к тому же выводу для функции $G(\cdot)$, зависящей лишь от тех переменных, для которых соответствующие $\alpha_j > 0$. Добавляя оставшиеся переменные в функцию $G(\cdot)$ легко убедиться, что полученная функция по-прежнему останется неотрицательной, а $G(\hat{t}) = 0$. Тем самым имеет место равенство (6), и значит, $d\hat{\mu}(t)$ — решение задачи (5). Для ее значения имеем

$$R := \int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\hat{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{p}{\sigma^\sigma} \Delta^{2(1-\sigma/r)} (1 - \Delta^{2/r})^\sigma, & \delta < (2\pi)^{d/2} \Delta_0, \\ \frac{p}{r^\sigma} (r - \sigma)^{r-\sigma}, & \delta \geq (2\pi)^{d/2} \Delta_0. \end{cases}$$

Эта величина дает оценку снизу для значения задачи (4), а, следовательно, и для квадрата значения задачи (3). Но эта оценка точна, так как можно выбрать последовательность допустимых в (3) функций $x_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ таких, что $(2\pi)^d |Fx_n(\cdot)|^2 \rightarrow A\delta(\cdot - \hat{t})$ при $n \rightarrow \infty$. Итак, получена оценка снизу

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) \geq \sqrt{R}.$$

Для получения оценки сверху рассмотрим экстремальную задачу

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \frac{\hat{\lambda}_1}{(2\pi)^d} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \hat{\lambda}_2 \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \hat{\lambda}_1 \Delta^2 + \hat{\lambda}_2. \quad (8)$$

Переходя к образам Фурье, а затем расширяя задачу, переходя к мерам, получаем следующую задачу (здесь опять для удобства рассматривается квадрат значения задачи (8))

$$\int_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} d\mu(\tau) \rightarrow \max, \quad \hat{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(\tau) + \hat{\lambda}_2 \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r d\mu(t) \leq \hat{\lambda}_1 \Delta^2 + \hat{\lambda}_2.$$

Пользуясь теми же соображениями, которые применялись ранее, нетрудно показать, что $d\hat{\mu}(\cdot) = \hat{A}\delta(\cdot - \hat{\tau})$ является решением и этой задачи. Таким образом, значение задачи (8) равно тоже \sqrt{R} .

Рассмотрим теперь такую задачу: для фиксированной функции $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ найти величину

$$\min_{x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{(2\pi)^d} \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \hat{\lambda}_2 \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)}^2 \right). \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция $x_y(\cdot)$ такая, что

$$Fx_y(t) = \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 (1 + \|t\|^2)^r} y(t).$$

Введем в линейном пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ полускалярное произведение

$$(z^1, z^2)_H = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\widehat{\lambda}_1 z_1^1(t) \overline{z_1^2(t)} + \widehat{\lambda}_2 (1 + \|t\|^2)^r F z_2^1(t) \overline{F z_2^2(t)} \right) dt$$

(здесь $z^1 = (z_1^1(\cdot), z_2^1(\cdot))$, $z^2 = (z_1^2(\cdot), z_2^2(\cdot))$) и соответствующую полунорму обозначим через $\|\cdot\|_H$. Тогда задача Н может быть записана в следующем виде

$$\|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2 \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d). \quad (10)$$

Поскольку $x_y(\cdot)$ — решение задачи (10), то производная минимизируемого функционала в этой точке равна нулю, т. е. для всех $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство

$$((Fx_y(\cdot), x_y(\cdot)) - (y(\cdot), 0), (Fx(\cdot), x(\cdot)))_H = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2 &= \|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (Fx_y(\cdot), x_y(\cdot))\|_H^2 \\ &\quad + \|(Fx_y(\cdot), x_y(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Если $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$, то из (11), полагая $h(\cdot) = x(\cdot) - x_y(\cdot)$, получим

$$\|(Fh(\cdot), h(\cdot))\|_H^2 \leq \|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2 \leq \widehat{\lambda}_1 \Delta^2 + \widehat{\lambda}_2.$$

Поэтому для всех $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$, имеем

$$\begin{aligned} &\|D^\alpha x(\cdot) - D^\alpha x_y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|D^\alpha h(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \sup \left\{ \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 : \frac{\widehat{\lambda}_1}{(2\pi)^d} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \widehat{\lambda}_1 \Delta^2 + \widehat{\lambda}_2 \right\} = \sqrt{R}. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что метод

$$D^\alpha x(\cdot) \approx D^\alpha x_y(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (i\tau)^\alpha \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 (1 + \|\tau\|^2)^r} y(\tau) e^{i\langle \tau, t \rangle} d\tau,$$

является оптимальным. Остается лишь подставить выражения для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$. \triangleright

Предположим теперь, что преобразование Фурье функции известно с ошибкой не на всем пространстве \mathbb{R}^d , а на некотором измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Тогда соответствующую погрешность оптимального восстановления определим равенством

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), y \in L_2(\Omega) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем операторам $\varphi: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$. Нетрудно убедиться, что при $\Omega_1 \subset \Omega_2$

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega_1) \geq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega_2).$$

Оказывается, что существует множество $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ такое, что для всех измеримых Ω , для которых $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, имеет место равенство

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega) = E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta).$$

Иными словами, для максимально точного восстановления производной порядка α в метрике пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ достаточно знать преобразование Фурье на множестве Ω_0 , а использование приближенной информации о преобразовании Фурье в более широких областях не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. В одномерном случае этот эффект был обнаружен в работе [10].

Точный результат здесь формулируется следующим образом.

Теорема 2. В условиях и обозначениях теоремы 1 положим

$$\Omega_0 = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : \frac{|t|^{2\alpha}}{(1 + \|t\|^2)^r} > \frac{p}{r\sigma^{\sigma-1}} \left(1 - \Delta^{2/r}\right)^{\sigma-1} \Delta^{2(1-\sigma/r)} \right\}.$$

Тогда для всех измеримых Ω таких, что $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, имеет место равенство

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega) = E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta),$$

а метод

$$D^\alpha x(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} \frac{(i\tau)^\alpha y(\tau) e^{i\langle \tau, t \rangle}}{1 + \frac{\sigma \Delta^2}{r(\Delta_0^{2/r} - \Delta^{2/r})} (1 + \|\tau\|^2)^r} d\tau$$

является оптимальным.

◁ Схема доказательства этой теоремы та же, что и предыдущей. Остановимся лишь на некоторых отличиях. После перехода к образам Фурье функция Лагранжа расширенной задачи будет иметь вид (считаем сразу, что $\lambda_0 = -1$)

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(-|t|^{2\alpha} + \lambda_1 \chi_\Omega(t) + \lambda_2 (1 + \|t\|^2)^r \right) d\mu(t),$$

где $\chi_\Omega(\cdot)$ — характеристическая функция множества Ω . В силу доказанного в теореме 1, определения множества Ω_0 и того, что $\Omega_0 \subseteq \Omega$, имеем

$$-|t|^{2\alpha} + \hat{\lambda}_1 \chi_\Omega(t) + \hat{\lambda}_2 (1 + \|t\|^2)^r \geq 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}^d$. Далее доказательство оценки снизу проводится так же, как и в теореме 1.

При оценке сверху надо рассмотреть линейное пространство $H = L_2(\Omega) \times \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$. Полускалярное произведение в нем следует определить равенством

$$(z^1, z^2)_H = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\lambda}_1 \int_{\Omega} z_1^1(t) \overline{z_1^2(t)} dt + \hat{\lambda}_2 \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|t\|^2)^r F z_2^1(t) \overline{F z_2^2(t)} dt.$$

В остальном доказательство то же, что и в теореме 1. ▷

Рассмотрим теперь несколько примеров для случая $d = 2$.

Пусть $\alpha = (1, 0)$ и $r = 2$. Иными словами, рассматривается задача восстановления частной производной $x_{t_1}(\cdot, \cdot)$ на классе $H_2^2(\mathbb{R}^2)$. Из теорем 1 и 2 получаем, что при $0 < \delta < \pi$

$$E(D^{(1,0)}, H_2^2(\mathbb{R}^2), \delta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\delta(2\pi - \delta)},$$

множество насыщения Ω_0 представляет собой два круга с центрами в точках $\pm\sqrt{\pi/\delta}$ и радиусами $\sqrt{\pi/\delta - 1}$, а метод

$$x_{t_1}(t_1, t_2) \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_0} \frac{i\tau_1 y(\tau_1, \tau_2) e^{i(\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2)}}{1 + \frac{\delta^2}{4\pi(\pi - \delta)} (1 + \tau_1^2 + \tau_2^2)^2} d\tau_1 d\tau_2$$

является оптимальным.

Вид множеств насыщения Ω_0 для рассматриваемой задачи при ряде значений δ представлен на рис. 1.

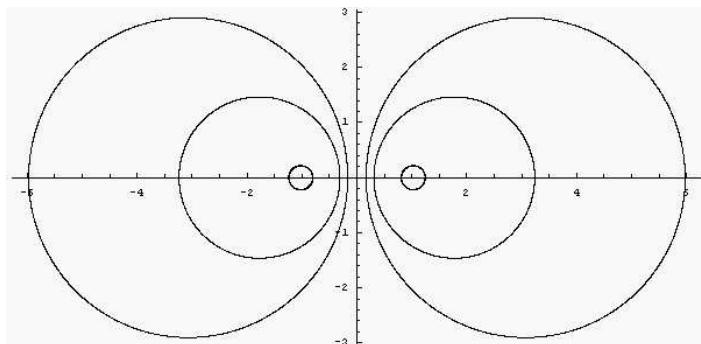


Рис. 1.

В случае восстановления смешанной производной $x_{t_1 t_2}(\cdot, \cdot)$ на классе $H_2^4(\mathbb{R}^2)$ множество насыщения в полярных координатах будет иметь вид

$$1 + \rho^2 < \left(\frac{\delta}{4\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \right) \right)^{-1/4} \rho \sqrt{|\sin 2\varphi|}.$$

Эти множества при ряде значений δ представлено на рис. 2.

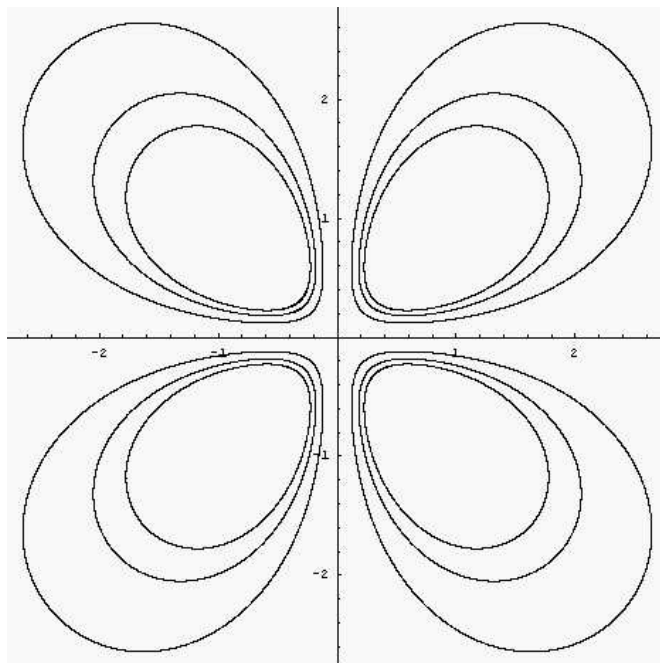


Рис. 2.

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. на соиск. степ. канд. физ.-мат. наук.—Москва: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // In: Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
3. Трауб Дж., Вожьянковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов.—М: Мир, 1983.—382 с.
4. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—P. 21–93. (Lecture Notes in Math.; V. 1129.)
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
6. Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Functions.—Huntington–New York: Nova Science Publ., Inc., 2000.—220 с.
7. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 12.—С. 73–106.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2000.—176 с.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН.—2001.—Т. 379, № 2.—С. 161–164.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003. (в печати).