*Владикавказский математический журнал*
*Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1*

*УДК* **517.51**

# ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ НА СОБОЛЕВСКИХ КЛАССАХ[1]

**Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко**

Рассматривается задача оптимального восстановления производных функций из соболевских классов на $\mathbb{R}^d$ по неточной информации об их преобразовании Фурье. Доказано, что существует область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ такая, что информация о преобразовании Фурье в любой области, содержащей $\Omega_0$, не ведет к уменьшению оптимальной погрешности восстановления.

В данной работе рассматривается задача оптимального восстановления производных функций из соболевских классов на $\mathbb{R}^d$ по информации о преобразовании Фурье самих функций, заданном приближенно. Перед постановкой задачи приведем некоторые определения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$. Для функции $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ через $D^\alpha x(\cdot)$ будем обозначать производную порядка $\alpha$ по Вейлю, определяемую равенством

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (i\tau)^\alpha Fx(\tau) e^{i\langle \tau, t\rangle}\, d\tau,$$

где

$$(i\tau)^\alpha = (i\tau_1)^{\alpha_1} \dots (i\tau_d)^{\alpha_d}, \quad \langle \tau, t\rangle = \tau_1 t_1 + \dots + \tau_d t_d,$$

а $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$. Соболевское пространство $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ определяется как совокупность функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ таких, что

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} = \left( \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|t\|^2\right)^r |Fx(t)|^2\, dt \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\|t\|^2 = t_1^2 + \dots + t_d^2$. Соответствующим соболевским классом назовем множество

$$H_2^r(\mathbb{R}^d) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d) : \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1 \,\}.$$

Задача оптимального восстановления оператора $D^\alpha$ на классе $H_2^r(\mathbb{R}^d)$ по преобразованию Фурье функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$, заданному с погрешностью $\delta > 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$, ставится следующим образом. Мы считаем, что для каждой функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такая, что

$$\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta.$$

© 2003 Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00-15-96109, №02-01-39012 и №02-01-00386), программы «Университеты России» (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S. CRDF – R.F. Ministry of Education Award VZ-010-0.

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные операторы $\varphi\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью данного метода $\varphi$ назовем величину

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in H_2^r(\mathbb{R}^d),\ y\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас будет интересовать *погрешность оптимального восстановления*, определяемая равенством

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi), \tag{1}$$

а также метод, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*.

Впервые задача оптимального восстановления для функционалов по конечномерной информации была поставлена С. А. Смоляком [1]. Впоследствии эта постановка обобщалась и развивалась в разных направлениях (см. [2–6]). Подход к задачам восстановления, основанный на общих принципах теории экстремума, который мы здесь также используем, развивался в работах [7–10].

В данной работе мы сначала решаем задачу (1), а затем обсуждаем некоторый эффект, связанный с тем, что знание преобразования Фурье лишь на некотором подмножестве $\mathbb{R}^d$ обеспечивает ту же погрешность оптимального восстановления, что и на всем пространстве.

***Теорема 1.*** *Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\alpha \neq 0$, $r > 1$ и $\sigma = \sum_{j=1}^d \alpha_j < r$. Положим*

$$\Delta = \frac{\delta}{(2\pi)^{d/2}}, \quad \Delta_0 = \left(\frac{r-\sigma}{r}\right)^{r/2}, \quad p = \prod_{j=1}^d \alpha_j^{\alpha_j}.$$

*Тогда, если $0 < \delta < (2\pi)^{d/2}\Delta_0$, то*

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \frac{\sqrt{p}}{\sigma^{\sigma/2}} \Delta^{1-\sigma/r} \left(1 - \Delta^{2/r}\right)^{\sigma/2},$$

*а метод*

$$D^\alpha x(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(i\tau)^\alpha y(\tau) e^{i\langle\tau,t\rangle}}{1 + \dfrac{\sigma\Delta^2}{r(\Delta_0^{2/r} - \Delta^{2/r})}(1+\|\tau\|^2)^r}\, d\tau$$

*является оптимальным. Если $\delta \geqslant (2\pi)^{d/2}\Delta_0$, то*

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \frac{\sqrt{p}}{r^{r/2}} (r-\sigma)^{(r-\sigma)/2},$$

*а $D^\alpha x(t) \approx 0$ — оптимальный метод.*

$\lhd$ Нетрудно показать, что имеет место следующее неравенство

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in H_2^r(\mathbb{R}^d)\\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2}$$

Действительно, для любого метода $\varphi$ при всех $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$ (учитывая, что $-x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$), имеем

$$2\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ + \| - D^\alpha x(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода $\varphi$

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \varphi) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

откуда сразу же вытекает оценка (2).

Экстремальная задача в правой части неравенства (2) может быть записана в виде (для удобства мы ищем квадрат значения этой задачи)

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta, \quad \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1. \tag{3}$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{-d}\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

полагая

$$u(\cdot) = (2\pi)^{-d}|Fx(\cdot)|^2,$$

задача (3) в образах Фурье запишется в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha} u(t)\, dt \to \max, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(t)\, dt \leqslant \Delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|t\|^2\right)^r u(t)\, dt \leqslant 1, \ u(t) \geqslant 0 \text{ п. в.}, \tag{4}$$

где $|t|^{2\alpha} = |t_1|^{2\alpha_1} \ldots |t_d|^{2\alpha_d}$. Можно показать, что в этой задаче нет решения. Поэтому расширим ее, заменяя функции положительными мерами. Итак, рассмотрим следующую задачу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha}\, d\mu(t) \to \max, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mu(t) \leqslant \Delta^2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|t\|^2\right)^r\, d\mu(t) \leqslant 1, \ d\mu(t) \geqslant 0. \tag{5}$$

Это выпуклая задача. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\lambda_0 |t|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2 \left(1 + \|t\|^2\right)^r\right) d\mu(t).$$

Если $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (5), то согласно теореме Куна — Таккера (см., например, [8]) найдутся такие $\widehat{\lambda}_0 \leqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geqslant 0$, не равные нулю одновременно, что

$$\min_{d\mu(t) \geqslant 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \tag{6}$$

и

$$\widehat{\lambda}_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} d\widehat{\mu}(t)-\Delta^2\right)=0,\quad \widehat{\lambda}_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|t\|^2\right)^r\,d\widehat{\mu}(t)-1\right)=0. \tag{7}$$

Кроме того, если для допустимой в (5) меры $d\widehat{\mu}(\cdot)$ выполняются условия (6) и (7) с $\widehat{\lambda}_0<0$ и $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\geqslant 0$, то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (5). Действительно, для любой допустимой меры $d\mu(\cdot)$ имеем (используя последовательно допустимость этой меры и неотрицательность $\widehat{\lambda}_i$, $i=1,2$, условие (6) и условие (7))

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_0\int\limits_{\mathbb{R}^d}|t|^{2\alpha}\,d\mu(t)&\geqslant\widehat{\lambda}_0\int\limits_{\mathbb{R}^d}|t|^{2\alpha}\,d\mu(t)+\widehat{\lambda}_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}d\mu(t)-\Delta^2\right)\\&+\widehat{\lambda}_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|t\|^2\right)^r\,d\mu(t)-1\right)\geqslant\widehat{\lambda}_0\int\limits_{\mathbb{R}^d}|t|^{2\alpha}\,d\widehat{\mu}(t)\\&+\widehat{\lambda}_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}d\widehat{\mu}(t)-\Delta^2\right)+\widehat{\lambda}_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(1+\|t\|^2\right)^r\,d\widehat{\mu}(t)-1\right)\\&=\widehat{\lambda}_0\int\limits_{\mathbb{R}^d}|t|^{2\alpha}\,d\widehat{\mu}(t).\end{aligned}$$

Предъявим $d\widehat{\mu}(\cdot)\geqslant 0$ и $\widehat{\lambda}_0<0$, $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\geqslant 0$, для которых будут справедливы равенства (6) и (7). Введем следующие обозначения $A=\min(\Delta^2,\Delta_0^2)$,

$$\widehat{t}_j=\sqrt{\frac{A^{-1/r}-1}{\sigma}}\alpha_j^{1/2},\quad j=1,\dots,d,\quad \widehat{t}=(\widehat{t}_1,\dots,\widehat{t}_d)$$

и положим $\widehat{\lambda}_0=-1$,

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_1&=\frac{p(A^{-1/r}-1)^{\sigma-1}}{\sigma^\sigma}\left(A^{-1/r}\left(1-\frac{\sigma}{r}\right)-1\right),\\ \widehat{\lambda}_2&=\frac{p(A^{-1/r}-1)^{\sigma-1}A^{1-1/r}}{r\sigma^{\sigma-1}}\end{aligned}$$

и $d\widehat{\mu}(\cdot)=A\delta(\cdot-\widehat{t})$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция в нуле. Легко видеть, что $\widehat{\lambda}_1\geqslant 0$ ($\widehat{\lambda}_1=0$, когда $A=\Delta_0^2$) и $\widehat{\lambda}_2>0$. Непосредственная проверка показывает, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима и справедливы равенства (7). Для доказательства равенства (6) достаточно доказать, что функция

$$G(t)=-|t|^{2\alpha}+\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\left(1+\|t\|^2\right)^r$$

неотрицательна и в точке $\widehat{t}$ обращается в ноль. Предположим сначала, что $\alpha_j>0$, $j=1,\dots,d$. Сделаем замену переменных $\xi_j=2\ln|t_j|$, $j=1,\dots,d$, в функции $|t|^{-2\alpha}G(t)$, $|t|>0$. Тогда получим функцию

$$F(\xi)=-1+e^{-\langle\alpha,\xi\rangle}\left(\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\left(1+e^{\xi_1}+\ldots+e^{\xi_d}\right)^r\right),\quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_d).$$

Нетрудно убедиться, что эта функция выпукла, $F(\widehat{\xi}) = 0$, где $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_d)$, $\widehat{\xi}_j = 2\ln|\widehat{t}_j|$, $j = 1, \dots, d$, и, кроме того, градиент этой функции в точке $\widehat{\xi}$ равен нулю. Это означает, что $F(\xi) \geqslant 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Отсюда, возвращаясь к старым переменным, получаем, что $G(t) \geqslant 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$ и $G(\widehat{t}) = 0$. Если среди $\alpha_j$ есть нули, то аналогичные рассуждения приводят к тому же выводу для функции $G(\cdot)$, зависящей лишь от тех переменных, для которых соответствующие $\alpha_j > 0$. Добавляя оставшиеся переменные в функцию $G(\cdot)$ легко убедиться, что полученная функция по-прежнему останется неотрицательной, а $G(\widehat{t}) = 0$. Тем самым имеет место равенство (6), и значит, $d\widehat{\mu}(t)$ — решение задачи (5). Для ее значения имеем

$$R := \int\limits_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha}\, d\widehat{\mu}(t) = \begin{cases} \dfrac{p}{\sigma^\sigma}\Delta^{2(1-\sigma/r)}\left(1 - \Delta^{2/r}\right)^\sigma, & \delta < (2\pi)^{d/2}\Delta_0, \\ \dfrac{p}{r^r}(r-\sigma)^{r-\sigma}, & \delta \geqslant (2\pi)^{d/2}\Delta_0. \end{cases}$$

Эта величина дает оценку снизу для значения задачи (4), а, следовательно, и для квадрата значения задачи (3). Но эта оценка точна, так как можно выбрать последовательность допустимых в (3) функций $x_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ таких, что $(2\pi)^d|Fx_n(\cdot)|^2 \to A\delta(\cdot - \widehat{t})$ при $n \to \infty$. Итак, получена оценка снизу

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) \geqslant \sqrt{R}.$$

Для получения оценки сверху рассмотрим экстремальную задачу

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \frac{\widehat{\lambda}_1}{(2\pi)^d}\|Fx(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\lambda}_2\|x(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\lambda}_1\Delta^2 + \widehat{\lambda}_2. \tag{8}$$

Переходя к образам Фурье, а затем расширяя задачу, переходя к мерам, получаем следующую задачу (здесь опять для удобства рассматривается квадрат значения задачи (8))

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |t|^{2\alpha}\, d\mu(\tau) \to \max, \quad \widehat{\lambda}_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mu(\tau) + \widehat{\lambda}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|t\|^2\right)^r\, d\mu(t) \leqslant \widehat{\lambda}_1\Delta^2 + \widehat{\lambda}_2.$$

Пользуясь теми же соображениями, которые применялись ранее, нетрудно показать, что $d\widehat{\mu}(\cdot) = \widehat{A}\delta(\cdot - \widehat{\tau})$ является решением и этой задачи. Таким образом, значение задачи (8) равно тоже $\sqrt{R}$.

Рассмотрим теперь такую задачу: для фиксированной функции $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ найти величину

$$\min_{x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \left( \frac{\widehat{\lambda}_1}{(2\pi)^d}\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\lambda}_2\|x(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \right). \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция $x_y(\cdot)$ такая, что

$$Fx_y(t) = \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\left(1 + \|t\|^2\right)^r} y(t).$$

Введем в линейном пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ полускалярное произведение

$$(z^1, z^2)_H = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left( \widehat{\lambda}_1 z_1^1(t) \overline{z_1^2(t)} + \widehat{\lambda}_2 \left(1 + \|t\|^2\right)^r F z_2^1(t) \overline{F z_2^2(t)} \right) dt$$

(здесь $z^1 = (z_1^1(\cdot), z_2^1(\cdot))$, $z^2 = (z_1^2(\cdot), z_2^2(\cdot))$) и соответствующую полунорму обозначим через $\|\cdot\|_H$. Тогда задача Н может быть записана в следующем виде

$$\|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2 \to \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d). \tag{10}$$

Поскольку $x_y(\cdot)$ — решение задачи (10), то производная минимизируемого функционала в этой точке равна нулю, т. е. для всех $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство

$$((Fx_y(\cdot), x_y(\cdot)) - (y(\cdot), 0), (Fx(\cdot), x(\cdot)))_H = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2 = \|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (Fx_y(\cdot), x_y(\cdot))\|_H^2& \\ + \|(Fx_y(\cdot), x_y(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2.& \end{aligned} \tag{11}$$

Если $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$, то из (11), полагая $h(\cdot) = x(\cdot) - x_y(\cdot)$, получим

$$\|(Fh(\cdot), h(\cdot))\|_H^2 \leqslant \|(Fx(\cdot), x(\cdot)) - (y(\cdot), 0)\|_H^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \Delta^2 + \widehat{\lambda}_2.$$

Поэтому для всех $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$, имеем

$$\begin{gathered} \|D^\alpha x(\cdot) - D^\alpha x_y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|D^\alpha h(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \sup \left\{ \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 : \frac{\widehat{\lambda}_1}{(2\pi)^d} \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \widehat{\lambda}_2 \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)}^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 \Delta^2 + \widehat{\lambda}_2 \right\} = \sqrt{R}. \end{gathered}$$

Тем самым доказано, что метод

$$D^\alpha x(\cdot) \approx D^\alpha x_y(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (i\tau)^\alpha \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \left(1 + \|\tau\|^2\right)^r} y(\tau) e^{i\langle \tau, t\rangle}\, d\tau,$$

является оптимальным. Остается лишь подставить выражения для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$. $\rhd$

Предположим теперь, что преобразование Фурье функции известно с ошибкой не на всем пространстве $\mathbb{R}^d$, а на некотором измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Тогда соответствующую погрешность оптимального восстановления определим равенством

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega) = \inf_\varphi \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d),\ y \in L_2(\Omega) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где нижняя грань берется по всем операторам $\varphi\colon L_2(\Omega) \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Нетрудно убедиться, что при $\Omega_1 \subset \Omega_2$

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega_1) \geqslant E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega_2).$$

Оказывается, что существует множество $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ такое, что для всех измеримых $\Omega$, для которых $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, имеет место равенство

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega) = E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta).$$

Иными словами, для максимально точного восстановления производной порядка $\alpha$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ достаточно знать преобразование Фурье на множестве $\Omega_0$, а использование приближенной информации о преобразовании Фурье в более широких областях не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. В одномерном случае этот эффект был обнаружен в работе [10].

Точный результат здесь формулируется следующим образом.

***Теорема 2.*** *В условиях и обозначениях теоремы 1 положим*

$$\Omega_0 = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : \frac{|t|^{2\alpha}}{(1+\|t\|^2)^r} > \frac{p}{r\sigma^{\sigma-1}} \left(1 - \Delta^{2/r}\right)^{\sigma-1} \Delta^{2(1-\sigma/r)} \right\}.$$

*Тогда для всех измеримых $\Omega$ таких, что $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, имеет место равенство*

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, \Omega) = E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta),$$

*а метод*

$$D^\alpha x(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_\Omega \frac{(i\tau)^\alpha y(\tau) e^{i\langle \tau, t\rangle}}{1 + \dfrac{\sigma\Delta^2}{r(\Delta_0^{2/r} - \Delta^{2/r})} (1+\|\tau\|^2)^r}\, d\tau$$

*является оптимальным.*

$\lhd$ Схема доказательства этой теоремы та же, что и предыдущей. Остановимся лишь на некоторых отличиях. После перехода к образам Фурье функция Лагранжа расширенной задачи будет иметь вид (считаем сразу, что $\lambda_0 = -1$)

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left( -|t|^{2\alpha} + \lambda_1 \chi_\Omega(t) + \lambda_2 \left(1 + \|t\|^2\right)^r \right) d\mu(t),$$

где $\chi_\Omega(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\Omega$. В силу доказанного в теореме 1, определения множества $\Omega_0$ и того, что $\Omega_0 \subseteq \Omega$, имеем

$$-|t|^{2\alpha} + \widehat{\lambda}_1 \chi_\Omega(t) + \widehat{\lambda}_2 \left(1 + \|t\|^2\right)^r \geqslant 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}^d$. Далее доказательство оценки снизу проводится так же, как и в теореме 1.

При оценке сверху надо рассмотреть линейное пространство $H = L_2(\Omega) \times \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$. Полускалярное произведение в нем следует определить равенством

$$(z^1, z^2)_H = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{\lambda}_1 \int\limits_\Omega z_1^1(t) \overline{z_1^2(t)}\, dt + \widehat{\lambda}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|t\|^2\right)^r F z_2^1(t) \overline{F z_2^2(t)}\, dt.$$

В остальном доказательство то же, что и в теореме 1. $\rhd$

Рассмотрим теперь несколько примеров для случая $d = 2$.

Пусть $\alpha = (1, 0)$ и $r = 2$. Иными словами, рассматривается задача восстановления частной производной $x_{t_1}(\cdot, \cdot)$ на классе $H_2^2(\mathbb{R}^2)$. Из теорем 1 и 2 получаем, что при $0 < \delta < \pi$

$$E(D^{(1,0)}, H_2^2(\mathbb{R}^2), \delta) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\delta(2\pi - \delta)},$$

множество насыщения $\Omega_0$ представляет собой два круга с центрами в точках $\pm\sqrt{\pi/\delta}$ и радиусами $\sqrt{\pi/\delta - 1}$, а метод

$$x_{t_1}(t_1, t_2) \approx \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\Omega_0} \frac{i\tau_1 y(\tau_1, \tau_2) e^{i(\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2)}}{1 + \dfrac{\delta^2}{4\pi(\pi - \delta)}(1 + \tau_1^2 + \tau_2^2)^2}\, d\tau_1 d\tau_2$$

является оптимальным.

Вид множеств насыщения $\Omega_0$ для рассматриваемой задачи при ряде значений $\delta$ представлен на рис. 1.

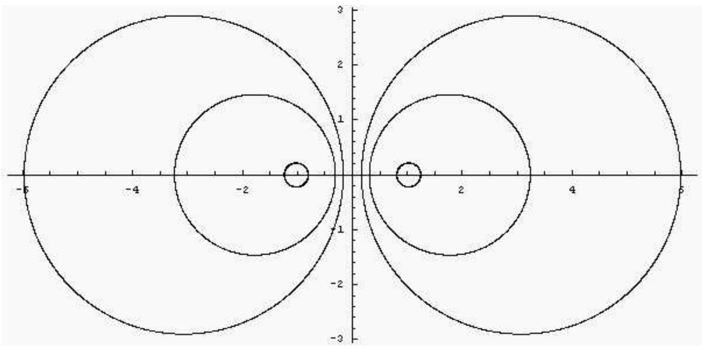


Рис. 1.

В случае восстановления смешанной производной $x_{t_1 t_2}(\cdot, \cdot)$ на классе $H_2^4(\mathbb{R}^2)$ множество насыщения в полярных координатах будет иметь вид

$$1 + \rho^2 < \left(\frac{\delta}{4\pi}\left(1 - \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}}\right)\right)^{-1/4} \rho\sqrt{|\sin 2\varphi|}.$$

Эти множества при ряде значений $\delta$ представлено на рис. 2.

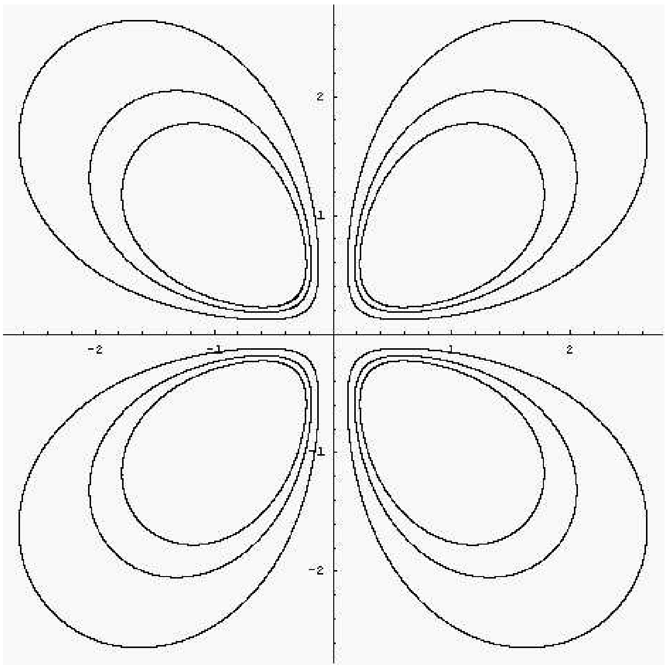

Рис. 2.

## Литература


1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. на соиск. степ. канд. физ.-мат. наук.—Москва: МГУ, 1965.
2. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // In: Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
3. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов.—М: Мир, 1983.— 382 с.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery.—Berlin: Springer–Verlag, 1985.—P. 21–93. (Lecture Notes in Math.; V. 1129.)
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
6. *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions.—Huntington–New York: Nova Science Publ., Inc., 2000.—220 c.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 12.—С. 73–106.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2000.—176 с.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН.—2001.—Т. 379, № 2.—С. 161–164.
10. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003. (в печати).


*г. Москва* *Статья поступила 19 января 2003 г.*